P. MARMIER

KERNPHYSIK I

Vorlesung von Prof. Dr. P. Marmier

KERNPHYSIK I

ausgearbeitet von

Dr. Eric Sheldon und Roland Szostak



4. Unveränderte Auflage

Druck Benziger Einsiedeln / Zürich

VORWORT

Der VMP-Verlag freut sich den Studierenden der Abteilung IX diese neue Autographie vorlegen zu können. Sie ist vor allem für die Absolventen des Vordiplomes, etwa vom 5. Semester an, gedacht, welche wohl die Experimentalphysik beherrschen, aber die Vorlesungen über theoretische Physik noch nicht besucht haben. Sie soll eine Einführung in sämtliche Gebiete der Kernphysik geben.

Der Stoff der Autographie geht bedeutend über den Rahmen der bisherigen Vorlesung von Prof. Marmier hinaus. Deshalb erscheint sie in zwei Teilen. In diesen ersten Teil sind viele Kurven und Tabellen aufgenommen worden, welche wertvolle Unterlagen für die Übungen einerseits, und andernseits für die spätere Arbeit im Laboratorium abgeben, und so dem Werk über seinen Wert als Vorlesungsunterlage hinaus einen viel allgemeineren Charakter verleihen. In diesem Sinne füllt die Autographie eine besonders von Studenten mittlerer Semester empfundene Lücke in der deutschen Literatur aus, und wir hoffen gerne, dass sie auf vielfaches Interesse stossen wird.

Unser verbindlichster Dank gehört Herrn Prof. Marmier und den beiden Ausarbeitern Herrn Dr. Sheldon und Herrn Szostak,die freundlicherweise die Herausgabe ermöglicht haben. Last, but not least, danken wir der Firma International Business Machines in Zürich, die uns einmal mehr in zuvorkommender Weise eine ihrer IBM Electric-Schreibmaschinen für das Aufsetzen der Vorlagen zur Verfügung gestellt hat.

Zürich, im Oktober 1960

Der Verlagsleiter des VMP

H. Vogt

V O R W O R T   Z U R   Z W E I T E N   A U F L A G E

Die Gelegenheit wurde benutzt, kleine Korrekturen und Ergänzungen in der zweite Auflage einzufügen, aber im Wesentlichen bleibt der Text unverändert gegenüber der früheren Auflage.

Es wäre ebenfalls wichtig darauf hinzuweisen, dass die "Richtlinien für den Schutz gegen ionisierende Strahlen" (vgl. S.93,94) inzwischen durch das Inkrafttreten der neuen schweiz. Strahlenschutz-Verordnung ersetzt worden sind: das Handbuch "Atomenergie und Strahlenschutz in der Schweiz" (1963) herausgegeben von der Schweiz. Vereinigung für Atomenergie (FABAG-Fachschriften-Verlag, Zürich 1) bietet eine ausführliche Information über dieses Gebiet.

Auf Wunsch verschiedener Studenten sei noch an dieser Stelle eine kurze Zusammenstellung einiger wichtigen Kernphysik-Lehrbücher in englischer und deutscher Sprache beigefügt:

R.T.Beyer (ed.) : "Foundations of Nuclear Physics", (Dover Publications, New York, 1949), 272 pp.

J.M.Blatt & V.F.Weisskopf : "Theoretical Nuclear Physics", (John Wiley, New York, 1952), 811 pp.

E.Segrè (ed.) :"Experimental Nuclear Physics", (John Wiley, New York ; Chapman & Hall, London) 1953), Vol. I, 789 pp. ; Vol.II, 600 pp.

R.D.Evans : "The Atomic Nucleus", (McGraw-Hill, New York, 1955), 972 pp.

A.E.S.Green : "Nuclear Physics", (McGraw-Hill, New York, 1955), 535 pp.

D.Halliday : "Introductory Nuclear Physics", (John Wiley, New York, 1955), 493 pp.

I.Kaplan : "Nuclear Physics", (Addison-Wesley, Cambridge, 1955), 609 pp.

K.Siegbahn (ed.) : "Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy", (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955), 959 pp.

E.Fermi (lecturer) : "Nuclear Physics", Notes compiled by J.Orear, A.H.Rosenfeld & R.A.Schluter, (revised), (University of Chicago Press, 1956), 248 pp.

S.Flügge (ed.) : "Handbuch der Physik", (Springer-Verlag, Berlin):
"Aussere Eigenschaften der Atomkerne", 1958, 38/1, 471 pp.
"Neutronen und verwandte Gammastrahlprobleme", 1959, 38/2,868 pp.
"Bau der Atomkerne", 1957, 39, 566 pp.
"Kernreaktionen I" 1957, 40, 553 pp.
"Kernreaktionen II : Theorie" 1959, 41/1, 580 pp.
"Betazerfall" 1962, 41/2, 117 pp.
"Kernreaktionen III", 1957, 42, 626 pp.
"Instrumentelle Hilfsmittel der Kernphysik I", 1959, 44,473 pp.
"Instrumentelle Hilfsmittel der Kernphysik II",1958, 45,544 pp.

P.M.Endt & M.Demeur (ed.) : "Nuclear Reactions", (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959), Vol. I, 502 pp.

P.M.Endt & P.B.Smith (ed.) : "Nuclear Reactions" , (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1962), Vol. II, 542 pp.

F.Ajzenberg-Selove (ed.) : "Nuclear Spectroscopy", (Academic Press, New York & London, 1960), Part A, 621 pp. ; Part B, 522 pp.

G.Hertz (ed.) : "Lehrbuch der Kernphysik", Band II : "Physik der Atomkerne", (B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig,1960),914 pp.

K.H.Hellwege (ed.): Landolt-Börnstein : "Zahlenwerte und Funktionen", Gruppe I : "Kernphysik und Kerntechnik", Band 1 : "Energie-Niveaus der Kerne : A=5 bis A=257", (Springer-Verlag, Berlin, 1961), 813 pp.

M.A.Preston : "Physics of the Nucleus", (Addison-Wesley, Reading, 1962), 661 pp.

A.S.Dawydow : "Theorie des Atomkerns", (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963), 597 pp.

R.A.Howard : "Nuclear Physics", (Wadsworth Publishing Co., Belmont, Cal., 1963), 578 pp.

Zürich, im September 1963

KERNPHYSIK I.

INHALTSVERZEICHNIS

KERNPHYSIK I

Die Erforschung der Materie bezüglich ihrer Struktur und Energie führt im Wesentlichen auf die Untersuchung der Atomkerne und der Elementarteilchen.

Die Kernphysik ist eine junge Disziplin; zuweilen ist sie zwar sozusagen ein wenig disziplinlos. Aber als Entschädigung zu der Ungeschlossenheit an einigen Stellen bietet sie ständig den Reiz einer fortschreitenden Entwicklung voller Überraschungen und die Herausforderung zur Erforschung der eigentlichen Grundlagen für den Aufbau der Materie. Viele ihrer Resultate sind gegenwärtig eher empirisch, und manche ihrer Konzeptionen und Theorien sind durchaus mit Vorsicht zu betrachten. Dennoch sind ihre Erfolge eindrucksvoll und ihre Möglichkeiten scheinen unerschöpflich.

1. GRUNDBEGRIFFE DER KERNPHYSIK

1.1 Zusammensetzung der Kerne

Atomkerne sind aus PROTONEN und NEUTRONEN zusammengesetzt, die gemeinsam als NUKLEONEN bezeichnet werden. Die entsprechende Anzahl der Protonen Z heisst die ORDNUNGSZAHL (ATOMIC NUMBER); sie charakterisiert das Element und die chemischen Eigenschaften, während die physikalischen Eigenschaften sowohl durch Z als auch durch die NEUTRONENZAHL N (NEUTRON NUMBER) bestimmt werden. Jede Kernsorte (NUCLIDE) wird durch ihre MASSENZAHL (MASS NUMBER)

$$A = Z + N \qquad (1.1)$$

unterschieden.

Man benutzt zur Kennzeichnung eines Kernes die Schreibweise

$${}_{Z}E_{N}^{A}$$

oder in kürzerer Form E^A, z.B.:

$$He^4 = {}_2He_2^4, \qquad U^{235} = {}_{92}U_{143}^{235}$$

da das Element unmittelbar durch Z und ebenso N durch N = A - Z festgelegt ist. Es besteht aber keine eindeutige Beziehung zwischen A und Z, sondern nur eine empirische Näherung

$$Z = \frac{A}{1,98 + 0,0155\, A^{2/3}} \qquad (1.2)$$

1.2 Bezeichnungen der Kerne

Kerne mit gleicher	Ordnungszahl Z	heissen	ISOTOPE.
Kerne mit gleicher	Massenzahl A	heissen	ISOBARE.
Kerne mit gleicher	Neutronenzahl N	heissen	ISOTONE.
Kerne mit spiegelbildlichen	Z und N	heissen	SPIEGELKERNE.
Kerne in langlebigen, angeregten	Zuständen	heissen	ISOMERE.

Tab. 1.1

Bezeichnung	Charakteristikum	Beispiel	Bemerkungen
Kern	(A, Z)	${}_1H^1$, ${}_{92}U^{235}$	z. Zt. über 1250 Kernsorten bekannt
Isotop	Z = const.	${}_{92}U^{235}$, ${}_{92}U^{238}$	bis zu 23 Isotope pro Element bekannt
Isobar	A = const.	${}_6C^{14}$, ${}_7N^{14}$	bei β -Zerfall A = const.
Isoton	N = const.	${}_6C_8^{14}$, ${}_7N_8^{15}$, ${}_8O_8^{16}$	—
Spiegelkerne	$N_1=Z_2$; $N_2=Z_1$	${}_1H_2^3$, ${}_2He_1^3$	nur leichte Kerne
Isomer	E^{A*}	—	Lebensdauer $> 10^{-9}$ sec

1.3 Ladung, Masse und Stabilität der Nukleonen

Das Proton besitzt eine positive elektrische Ladung, deren Betrag gleich der Elementarladung e ist. Es ist ein stabiles Teilchen.

Das Neutron ist elektrisch ungeladen, seine Masse ist ein wenig grösser als die des Protons. Im freien Zustand ist es instabil; beim Zerfall entsteht ein Proton.

Es empfiehlt sich, folgende Einheiten zu benützen:

Ladung: $|e|$ = 4,8029 . 10^{-10} el. stat. cgs. = 1,6021 . 10^{-19} Coulomb

Masse: 1 AME = 1 Atomare Masseneinheit = (AMU, Atomic Mass Unit)

$= \frac{1}{16}$ Masse des O^{16} Atoms *) = 1,6597 . 10^{-24} g.

Im Gegensatz zu dieser "Physikalischen AME" ist die "Chemische AME" als $\frac{1}{16}$ der Masse des natürlichen Isotopengemisches von Sauerstoff definiert. Der Unterschied ist gering:

$$\frac{1 \text{ Physikal. AME}}{1 \text{ Chemische AME}} = 0{,}999728$$

Es handelt sich hier nicht um die Massen der Kerne, sondern um die der neutralen Atome.

Infolge der Äquivalenz von Masse und Energie $E = mc^2$ entspricht

$$1 \text{ g} = 9 \cdot 10^{20} \text{ erg} = 5{,}61 \cdot 10^{26} \text{ MeV}$$

$$1 \text{ AME} = 931{,}14 \text{ MeV}$$

mit

$$1 \text{ eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-12} \text{ erg.}$$

Die Massen von Proton und Neutron betragen

$$M_n = 1{,}008\,982 \text{ AME}$$

$$M_p = 1{,}007\,593 \text{ AME.}$$

1.4 Energiebetrachtungen

Die experimentell gefundenen ATOMGEWICHTE M **) sind nicht ganze Vielfache A der atomaren Masseneinheit. Diese Abweichung wird als MASSENDEFEKT ΔM bezeichnet:

$$\Delta M = M - A. \qquad (1.3)$$

Der Massendefekt pro Nukleon heisst PACKUNGSANTEIL (PACKING FRACTION)

$$f = \frac{\Delta M}{A} \quad . \qquad (1.4)$$

---

*) Es sind Bestrebungen im Gange

$$1 \text{ AME} = \frac{1}{12} \cdot \text{Masse des } C^{12}\text{-Atoms}$$

oder

$$1 \text{ AME} = \frac{1}{19} \cdot \text{Masse des } F^{19}\text{-Atoms}$$

einzuführen. Die C^{12}-Skala wurde kürzlich von Chemikern (UIPAC) hauptsächlich aus massenspektroskopischen Gründen angenommen (Whiffen, J. Roy. Inst. Chem. 1960, 84, 133). Auf physikalischer Seite hingegen hätte die F^{19}-Skala den Vorteil, dass Fluor ein Element mit nur einem bekannten Isotop ist.

**) Hier ist nicht das Atomgewicht eines chemischen Elements in seiner natürlichen Isotopenzusammensetzung, sondern das eines reinen Isotops gemeint, und zwar handelt es sich nicht um das Kerngewicht, sondern das Atomgewicht.

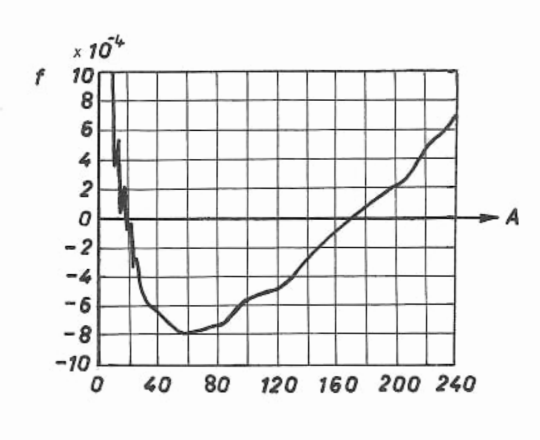


Fig.1.1

Ferner ist auch die Masse M(Z, A) eines Kerns nicht genau gleich der Summe der Massen seiner Nukleonen, sondern stets kleiner:

$$M(Z,A) < Z \cdot M_p + N \cdot M_n \,. \qquad (1.5)$$

Die Massendifferenz

$$\delta M = Z \cdot M_p + NM_n - M(Z,A) \qquad (1.6)$$

ist zufolge der Einsteinschen Beziehung $E = mc^2$ einer Energie

$$B = \delta M \cdot c^2 = \left[Z \cdot M_p + N \cdot M_n - M(Z,A) \right] c^2 \qquad (1.7)$$

äquivalent, die erforderlich wäre, um den Kern in einzelne freie Nukleonen zu zerlegen. B heisst die TOTALE BINDUNGS-ENERGIE des Kerns; sie ist nur auf stabile Kerne anwendbar, so dass B stets positiv ist.

B/A ist die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon; sie hat für alle Kerne, mit Ausnahme der sehr leichten und der sehr schweren, einen etwa gleichbleibenden Wert von 8 MeV pro Nukleon (Fig. 1.2).

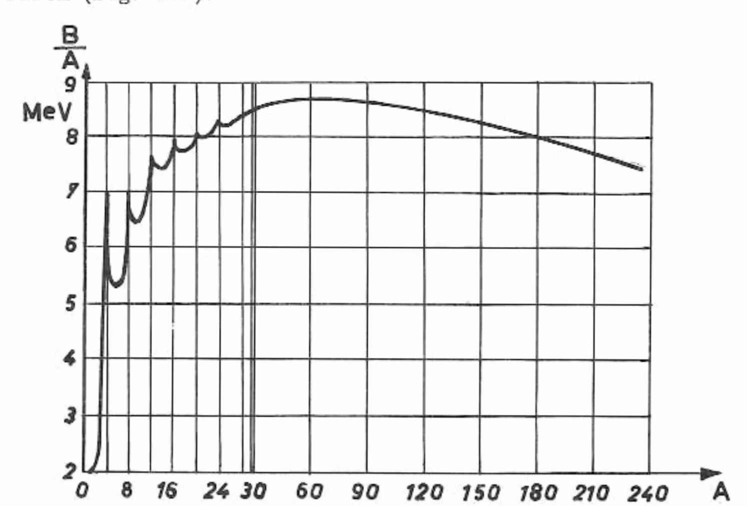


Fig. 1.2

Diese Kurve verläuft ungefähr spiegelbildlich zu der des Packungsanteils. -

Bei Kernumwandlungen tritt eine Änderung in der Bilanz der Bindungsenergien ein. Die Reaktionsgleichung für den Prozess

$$A\ (a,\ b)\ B\ ,$$

bei dem sich der Targetkern A unter dem Beschuss durch das Teilchen a in den Kern B umwandelt und das Teilchen b emittiert wird, lautet

$$A + a \longrightarrow B + b + Q\ ,$$

wobei Q für die Energiebilanz eingeführt wird. Diese Gleichung muss die Erhaltungssätze für Ladung, Nukleonenzahl und Gesamtenergie erfüllen.

Die Gesamtenergie setzt sich aus der Energie der Ruhemassen und den kinetischen Energien der Teilchen zusammen. Da sich die Gesamtruhemasse der Teilchen ändert, erscheint in einem zusätzlichen Glied Q die REAKTIONSENERGIE, die die

Änderung der Bindungsenergien angibt. Diese tritt zumeist als kinetische Energie der Teilchen auf. Jede Reaktion besitzt einen Q-WERT (Q VALUE), wobei

$Q > 0$ für exotherme,

$Q < 0$ für endotherme

Reaktionen ist.

Die kinetische Energie, die das einfallende Teilchen als mindeste besitzen muss, um eine Reaktion auszulösen, heisst SCHWELLENENERGIE (THRESHOLD ENERGY), deren Betrag im Schwerpunktssystem gleich dem Q-Wert ist. Die kinetische Energie der Reaktionsprodukte ist dabei null.

Die Reaktionsenergie lässt sich aus den Massendifferenzen berechnen. Als Beispiel dafür werde die Reaktion

$$ {}_5B^{10} + {}_0n^1 \longrightarrow {}_3Li^7 + {}_2He^4 + Q $$

gewählt:

M_n	= 1,008 982 AME	M_{Li}	= 7,018 235 AME
M_B	=10,016 122 AME	M_α	= 4,003 876 AME
M_I	=11,025 104 AME	M_{II}	=11,022 111 AME
M_{II}	=11,022 111 AME		
Q	= 0,002 993 AME	=	2,79 MeV.

Q ist positiv: Die Reaktion $B^{10}(n,\alpha)Li^7$ ist exotherm; sie wird bereits durch langsame Neutronen ausgelöst.

Es wäre hingegen ein Irrtum anzunehmen, die umgekehrte, endotherme Reaktion $Li^7(\alpha, n)B^{10}$ würde bei einer kinetischen Energie der α -Teilchen $E_\alpha = 2,79$ MeV einsetzen. Denn durch Rückstoss nimmt der getroffene Targetkern einen Teil der kinetischen Energie des Geschosses als eigene kinetische Energie auf. Bei der obigen (n,α)-Reaktion war diese Rückstossenergie verschwindend klein, weil die Geschossenergie sehr gering sein konnte. Hingegen ist dieser Rückstoss für die endotherme (α, n)-Reaktion nicht vernachlässigbar, und die Geschossenergie muss grösser als 2,79 MeV im Laborsystem sein. Massgebend für die Auslösung einer Reaktion ist die kinetische Energie E_s im Schwerpunktssystem:

$$ E_s = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{rel}^2 \qquad (1.8) $$

worin

$$ \mu = \frac{M_\alpha \cdot M_{Li}}{M_\alpha + M_{Li}} \quad \text{die REDUZIERTE MASSE} \qquad (1.9) $$

und v_{rel} die systemunabhängige Geschwindigkeit des Geschosses, bezogen auf den Targetkern ist.

Das α -Teilchen muss also im Schwerpunktssystem die Energie $E_s = 2,79$ MeV und im Laborsystem die Energie

$$ E_\alpha = E_s \cdot \frac{M_{total}}{M_{Target}} = E_s \cdot \frac{M_\alpha + M_{Li}}{M_{Li}} = 4,38 \text{ MeV} \qquad (1.10) $$

erreichen, um die Reaktion $Li^7(\alpha, n)B^{10}$ auszulösen. - (Beachte : E_α sei die totale Energie im Laborsystem und E_S die totale Energie im Schwerpunktssystem,

$$ E_S = E_\alpha' + E_{Li}' \; .). - $$

Notwendigerweise sind die Energien im Laborsystem stets grösser als im Schwerpunktssystem. Dieser Unterschied ist besonders gross im relativistischen Bereich (s. Anh. B). So beträgt z. B. die Energie der Protonen des CERN-Proton-Synchrotrons 28 GeV im Laborsystem, aber nur 5,7 GeV im Schwerpunktssystem, wenn sie mit ruhenden Protonen in Wechselwirkung treten.

Da Q-Werte Energiedifferenzen entsprechen, sind ihre numerischen Werte systemunabhängig. Eine ausführliche Zusammenstellung von Q-Werten: Ashby und Catron UCRL 5419 (1959).

1.5 Kernradius

Die Gestalt der Kerne lässt sich aus energetischen Gründen in erster Näherung als kugelförmig annehmen. Gemäss den experimentellen Daten erfüllen die Kernradien R recht gut die Beziehung

$$\boxed{R = R_o A^{1/3},} \qquad (1.11)$$

wobei A die Nukleonenzahl (Massenzahl) ist und R_o dem Nukleonenradius entspricht. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die mittlere Massendichte ρ_o in allen Kernen konstant ist, da A herausfällt:

$$\rho_o \cong \frac{A \cdot M_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_o^3} \cong const. \qquad (1.12)$$

Die Dichte ist ausserordentlich hoch: $\rho_o \approx 10^{14}$ g. cm^{-3}. Infolge der konstanten Dichte legt es sich in Analogie zur inkompressiblen Flüssigkeit nahe, auf den Kern das Modell eines Flüssigkeitströpfchens anzuwenden.

R und R_o sind jedoch keine scharf definierten Grössen. Der Kern ist keine starre Kugel und hat keine scharf abgegrenzte Oberfläche. Man muss Ladungs- und Massenverteilungen annehmen, deren Dichten im Bereich der "Oberfläche" nicht sprunghaft sondern stetig auf null abfallen (Fig. 1.3).

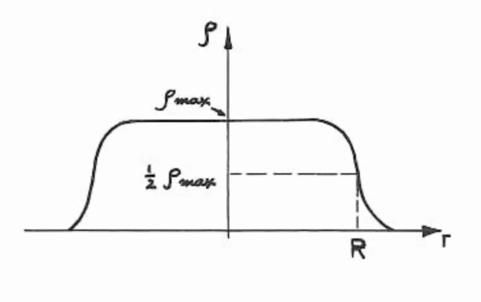


Fig.1.3

Zweckmässige Definitionen für den Kernradius R sind

a) $r = R$, wo $\rho = \frac{1}{2}\rho_{max}$ ist,

oder

b) $r = R$, wo ρ am stärksten abfällt, d.h.

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} = 0 \qquad (1.13)$$

Die Massen- und Ladungsverteilungen im Kern können nicht als gleich angesehen werden. Ausserdem sind die experimentellen Ergebnisse für R_o je nach Untersuchungsmethode etwas, jedoch deutlich voneinander verschieden. Als neueste und zuverlässigste Resultate gelten die von Hofstadter (Ann. Rev. Nucl. Sci. 1957, 7, 231) durch Streuung von schnellen Elektronen an Kernen gewonnenen Werte (Fig. 1.4).

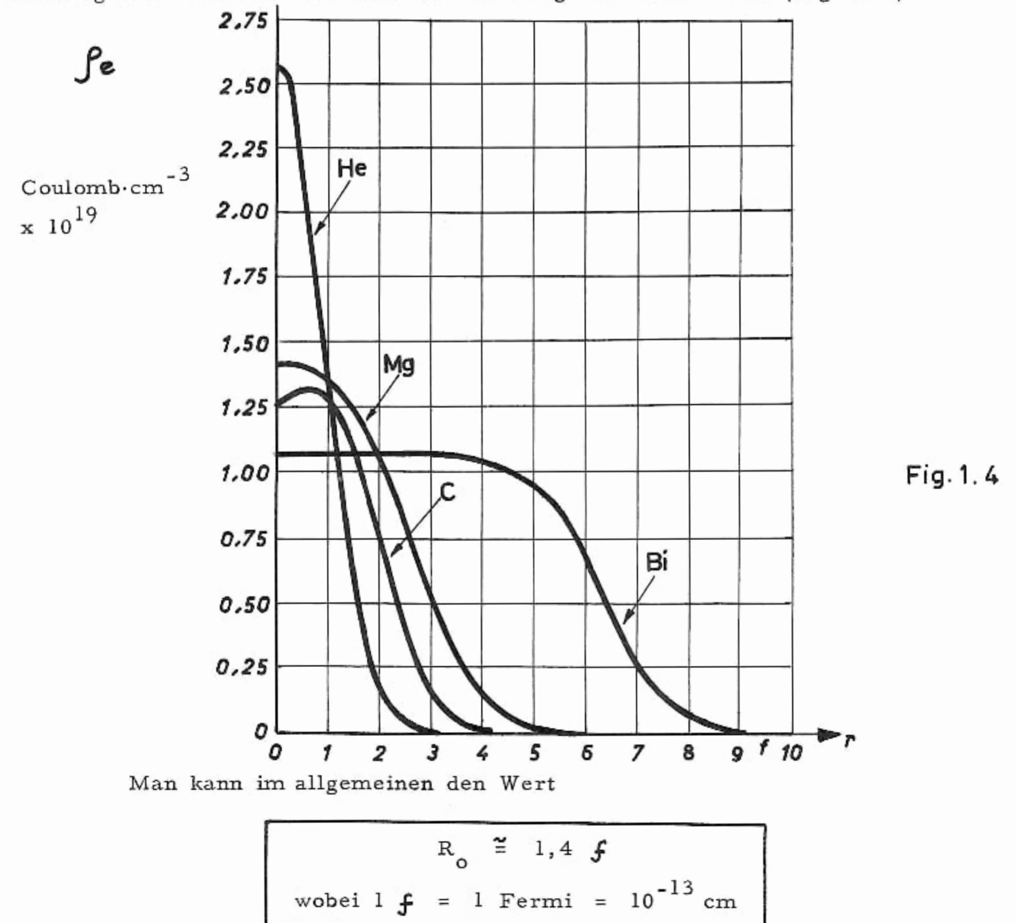


Fig. 1.4

Man kann im allgemeinen den Wert

$$R_o \cong 1,4\ f$$

wobei $1\ f = 1$ Fermi $= 10^{-13}$ cm

benutzen, der gut mit der Reichweite der Kernkräfte in der Theorie von Yukawa übereinstimmt. Dieser Wert ist ziemlich genau gleich der Hälfte des klassischen Elektronenradius r_o.

Zwischen dem KLASSISCHEN ELEKTRONENRADIUS

$$r_o = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82\ f, \qquad (1.14)$$

der reduzierten COMPTON-WELLENLÄNGE des Elektrons

$$\lambda\!\!\!^{-}_c = \frac{\hbar}{m_e c} = 386\ f \qquad (1.15)$$

und dem BOHRSCHEN RADIUS

$$a_o = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529\ \text{Å} \qquad (1.16)$$

bestehen über die FEINSTRUKTURKONSTANTE

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137} \qquad (1.17)$$

die sehr einprägsamen Beziehungen

$$r_0 = \alpha \lambda_c \cong \frac{1}{137} \cdot \lambda_c , \quad (1.18)$$

$$\lambda_c = \alpha a_0 \cong \frac{1}{137} \cdot a_0 . \quad (1.19)$$

1.6 Semiempirische Massenformel nach v. Weizsäcker

Die Masse eines Kerns ist gemäss (1.7)

$$M(Z,A) = Z \cdot M_p + NM_n - B \quad (1.20)$$

Hierin ist B die Bindungsenergie in Masseneinheiten. Wenn es gelingt, B zu berechnen, so lassen sich alle Kernmassen M (A, Z) theoretisch voraussagen.

v. Weizsäcker hat eine halbempirische Formel für B angegeben. Dabei wird das Modell eines Flüssigkeitströpfchens für den Kern angenommen; B kann dabei als die latente Kondensationsenergie angesehen werden.

B setzt sich infolge verschiedener Einflüsse, die sich überlagern, aus mehreren Anteilen zusammen:

$$B = B_o + B_1 + B_2 + \ldots\ldots \quad (1.21)$$

Es ist teilweise zweckmässig, die Bindungsenergie pro Nukleon B /A zu betrachten.

1.6.1 Volumenenergie

Der grösste Anteil B_o an der Bindungsenergie rührt von den direkten Wechselwirkungen der Nukleonen unter dem Einfluss der Kernkräfte her. Aus dem Gang der Bindungsenergie pro Nukleon B /A mit der Nukleonenzahl A (Fig. 1.2) zeigt sich, dass dieser Anteil B_o/A für mittlere Kerne als annähernd konstant in der Grössenordnung von 8 MeV angesetzt werden kann. Bei sehr leichten und sehr schweren Kernen sind dann noch andere Effekte überlagert.

v. Weizsäcker ging von dem Befund aus, dass die Massendichte in allen Kernen konstant ist. Diese Konstanz folgt aus der Annahme kurzer Reichweite für die Kernkräfte. Dann tritt jedes Nukleon nur mit seinem unmittelbaren Nachbarn in direkte Wechselwirkung, und deren Zahl ist notwendigerweise begrenzt. Die Bindungsenergie eines Nukleons bezüglich der Kernkräfte ist aber allein durch diese Partner bestimmt, also unabhängig davon, wieviele Nukleonen noch jenseits der unmittelbaren Nachbarn anwesend sind; also ist B_o/A = const. - Im Fall von Kräften mit langer Reichweite (wie z.B. bei Gravitationskräften) würde jedes neu hinzugefügte Teilchen mit allen schon vorhandenen in direkte Wechselwirkung treten; diese ist also umso stärker, je mehr Teilchen bereits vorhanden sind. Die Dichte müsste mit der Nukleonenzahl zunehmen. Die Bindungsenergie wäre proportional A^2.

Wegen ρ = const. kann also B_o/A = const. und

$$B_o = a_v \cdot A \quad (1.22)$$

angesetzt werden. B_o heisst die VOLUMENENERGIE ; a_v ist eine empirisch zu bestimmende Konstante.

1.6.2 Oberflächenenergie

Strikte Proportionalität zwischen B_o und A enthält die Annahme, dass jedes Teilchen in gleich starker Wechselwirkung mit seiner Umgebung steht. Diejenigen Teilchen, die sich an der Oberfläche befinden, sind jedoch weniger stark gebunden als die im Innern des Kernvolumens, weil sie weniger unmittelbare Nachbarn haben. Die Zahl der davon betroffenen Nukleonen ist proportional zur Oberfläche der Kerne, also proportional $A^{2/3}$. Für sie ist ein Korrekturterm entgegengesetzten Vorzeichens wie B_o von der Form

$$B_1 = - a_s \cdot A^{2/3} \qquad (1.23)$$

hinzufügen. B_1 heisst die OBERFLÄCHENENERGIE; sie kann in Analogie zum Flüssigkeitstropfen als Ausdruck einer Oberflächenspannung angesehen werden.

Die Kugelgestalt bietet einem vorgegebenen Volumen die kleinste Oberfläche und damit den Kernkräften die meiste Wechselwirkung untereinander. Kugelsymmetrische Kerne sind also am stabilsten.

Diese Betrachtung gilt nicht für sehr leichte Kerne ($A < 30$); auch bei gewissen schweren Kernen ist eine Abweichung von der Kugelgestalt vorhanden.

1.6.3 Coulomb-Energie

Die im Kern vereinigten gleichnamigen Ladungen üben abstossende Kräfte aufeinander aus. Coulomb-Kräfte haben lange Reichweite, und die aus ihnen resultierende COULOMB-ENERGIE B_2 ist proportional Z^2; diese hängt ferner von der Ladungsverteilung ab. Für eine kontinuierlich über das Innere einer Kugel vom Radius R verteilte Gesamtladung eZ beträgt die elektrostatische Energie

$$E = - a \cdot \frac{(eZ)^2}{R} . \qquad (1.24)$$

Für eine homogene Ladungsverteilung ist die Konstante $a = \frac{3}{5}$. Diese ist für Kerne empirisch in guter Annäherung bestätigt. Die Coulomb-Energie des Kernes mit dem Radius $R = R_o \cdot A^{1/3}$ ist demnach:

$$B_2 = - a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \qquad \text{mit} \qquad a_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_o} . \qquad (1.25)$$

1.6.4 Asymmetrieenergie (Neutronenüberschuss)

In Fig. 1.5 ist N als Funktion von Z für stabile Kerne angegeben. Bei leichten Kernen sind N und Z gleich, während bei schweren Kernen zunehmend Neutronen im Überschuss vorhanden sind (bis zu $N/Z \cong 1,6$).

Die offenen Kreise in Fig. 1.5 stellen instabile (radioaktive) Kerne dar, die ausgefüllten Kreise stabile Kerne. Die Massenzahlachse A fällt offensichtlich mit der Geraden N = Z zusammen, derart dass zum Beispiel die Isobare A = 50 von dem Punkt N = 50 auf der N-Achse nach Z = 50 auf der Z-Achse verläuft. Wie man sieht, entsprechen auf einer solchen Geraden Isobare mit ungeradem A gewöhnlich nur einem stabilen Kern, während zu geradem A oft zwei oder manchmal drei stabile isobare Kerne gehören. Diese charakteristische Eigenschaft wird weiter in Abschnitt 1.6.7 diskutiert werden; man kann sich senkrecht der (N, Z)-Ebene als dritte Koordinate die atomare Masse M(Z, A) aufgetragen denken und das stabile Gebiet als ein Massen-Energie-Tal ansehen, das man "NUKLEARE ENERGIEFLÄCHE" (NUCLEAR ENERGY SURFACE) nennt. Die stabilen Kerne liegen auf dem Talgrund, die instabilen auf den seitlichen Hängen, etwa wie Anfänger beim Skilaufen. Die Verbindung der stabilen Punkte gibt die "Kurve der β -Stabilität" und folgt dem "Grunde" Z_o des Massen-Energie-Tales; Querschnitte längs Isobaren durch dieses Tal weisen einen parabolischen Verlauf von M(Z, A) gegen Z auf, der im Abschnitt 1.6.7 behandelt wird.

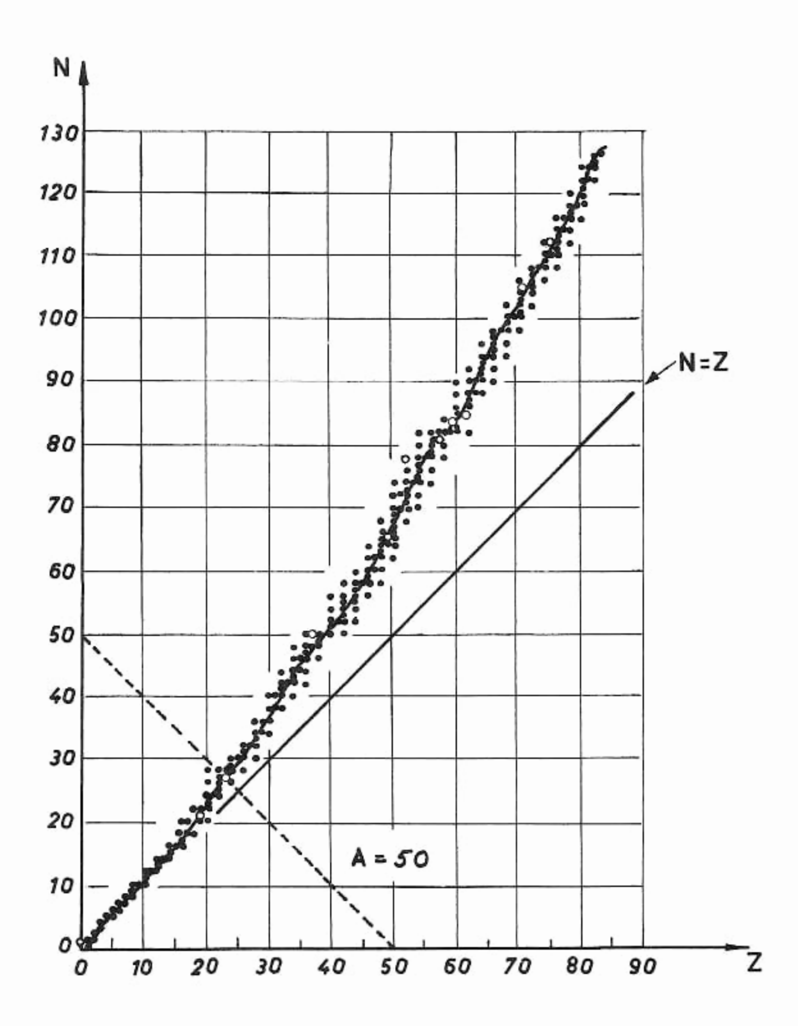


Fig. 1.5

Die Coulombkräfte nehmen mit wachsendem Z stark zu und würden schwerere Kerne mit der Zusammensetzung N = Z instabil machen. Man erhält beispielsweise unter Benützung der bisherigen Terme

$$M(A,Z) = Z . M_p + N . M_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c . \frac{Z^2}{A^{1/3}} \qquad (1.26)$$

mit Hilfe von $\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right)_A = 0$ für die maximale Stabilität die Beziehung

$$Z = 0,66 . A^{1/3}, \qquad (1.27)$$

die in krassem Widerspruch zu Erfahrung steht. Demnach wäre z. B. Z = 4 für A = 223. Es fehlt also mindestens noch ein wesentlicher Term.

Die Korrektur des Neutronenüberschusses beruht im Gegensatz zu den bisherigen auf einem reinen Quanteneffekt. Die einzelnen Nukleonen befinden sich im Kern in gequantelten Energiezuständen (NIVEAUX). Dabei gilt für Protonen und Neutronen getrennt das Ausschlussprinzip von Pauli: Auf jedem Niveau können sich nicht mehr als zwei gleiche Teilchen befinden, und zwar nur mit entgegengesetzter Spinorientierung. Sie besetzen in dieser Weise die untersten Niveaux zuerst. Ist ein Neutronenüberschuss vorhanden, so besetzen diese Neutronen auch höher gelegene Niveaux als die Protonen (Fig. 1.6).

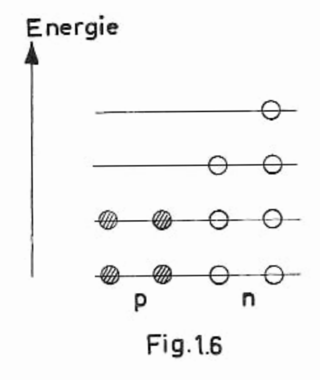


Fig.1.6

Die Überschussneutronen, die sich notwendigerweise auf höheren Niveaux befinden, sind weniger gebunden als die übrigen Nukleonen.

Daraus ergibt sich ein Defizit der Bindungsenergie, das eine Funktion des Neutronenüberschusses (N - Z) ist. Hätte man einen Protonenüberschuss, so wäre das Verhalten ganz ähnlich. Die Energiekorrektur des Überschusses einer Teilchensorte hängt also nicht vom Vorzeichen des Arguments (N - Z) ab; nimmt man bei einer Reihenentwicklung nach Potenzen dieses Arguments als Näherung den ersten Term, so ist

$$B_3 \sim (N - Z)^2 . \qquad (1.28)$$

Eine genauere Berechnung ergibt als quadratische Näherung (skizziert in Fermi, p. 22, 1956):

$$B_3 = - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} = - a_a . \frac{(A - 2Z)^2}{A} . \qquad (1.29)$$

B_3 hat entgegengesetztes Vorzeichen zu B_o, um die Lockerung der Bindung auszudrücken. Die Neutronen wirken, soweit es nur die Terme B_o und B_2 anbelangt, als "Kitt". Diese Eigenschaft wird mit wachsendem Überschuss jedoch durch B_3 eingeschränkt. Das hat zur Folge, dass der Neutronenüberschuss nicht so ungeheuer gross ist wie nach (1.27).

Bei Hinzunahme des Terms B_3 zu (1.26) erhält man mit Hilfe von $\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right)_A = 0$ für die stabilsten Kerne die Beziehung (1.2):

$$Z_o = \frac{A}{1,98 + 0,0155\, A^{2/3}} \quad . \qquad (1.30)$$

Hiernach steigt der Neutronenüberschuss von dem Wert $N/Z \approx 1$ bei leichten Kernen nur langsam mit wachsendem A an. Die Beziehung (1.30) ist bei geeigneter Wahl der beiden numerischen Koeffizienten in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Hierzu Fig. 1.7: Die darin ausgezogene Kurve $(N - Z) = 0,0060\, A^{5/3}$ ist eine aus (1.30) gewonnene, etwas vereinfachte Beziehung. -

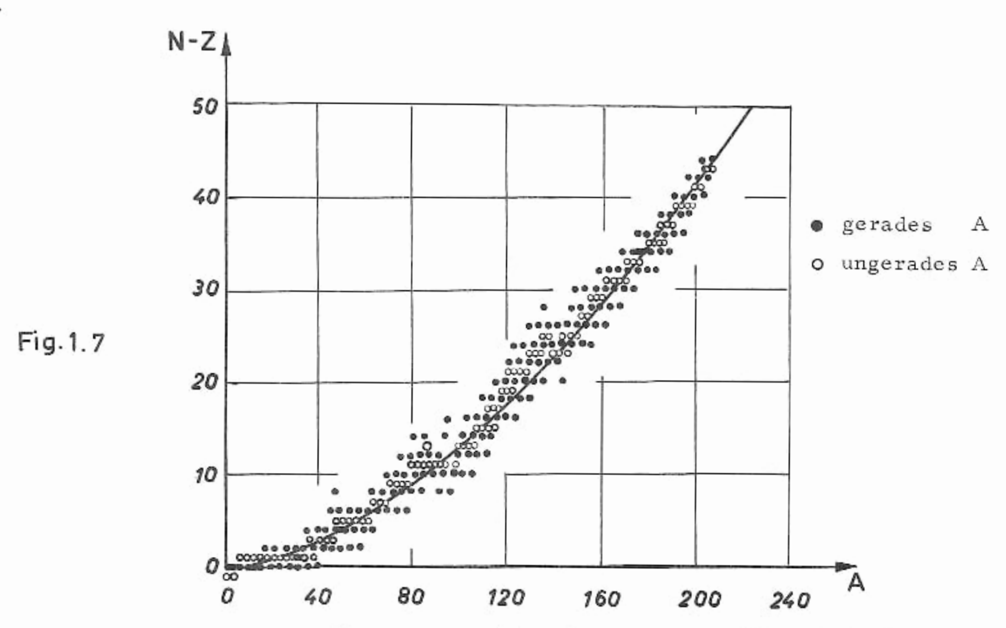


Fig. 1.7

Die Terme B_o und B_3 lassen sich auch gemeinsam klassisch mit dem Flüssigkeitströpfchen-Modell ableiten, wobei die Protonen und Neutronen im Kern als eine binäre Lösung angesehen werden. Dann hängt der volumenprozentuale Teil der Bindungsenergie B/A nur von der Konzentration N/A bzw. Z/A ab:

$$\frac{B}{A} = f\left(\frac{N}{A}\right) \quad . \qquad (1.31)$$

Die Summe beider Konzentrationen ist gleich 1. Sind die Wechselwirkungen zwischen Protonen und zwischen Neutronen gleich, so hängt f nur von der Differenz der Konzentrationen $\frac{N-Z}{A}$ ab, und zwar wegen der Symmetrie bezüglich N und Z als gerade Funktion. Entwickelt man f nach geraden Potenzen dieses Arguments

$$f = a_v + a_a' \cdot \frac{(N-Z)^2}{A} + \ldots\ldots , \qquad (1.32)$$

so ergeben die beiden ersten Glieder die Terme, die B_o und B_3 entsprechen.

1.6.5 Paarungsenergie

In Fig. 1.7 fällt auf, dass die Zahl der stabilen Kerne mit gerader Nukleonenzahl wesentlich grösser ist als die mit ungerader.

Zur näheren Unterscheidung wird eine Einteilung der Kerne in vier Klassen mit folgender Bezeichnung durchgeführt:

gg-Kern:	gerade Protonenzahl Z,	gerade Neutronenzahl N
gu- " :	" "	ungerade "
ug- " :	ungerade "	gerade "
uu- " :	" "	ungerade "

gg- und uu-Kerne haben gerade Massenzahl A

gu- und ug-Kerne haben ungerade Massenzahl A.

Die Harkins'sche Regel besagt, dass die gg-Kerne sehr stabil, die ug- und gu-Kerne weniger stabil und die uu-Kerne zumeist instabil sind. Tab. 1.2 gibt eine Zusammenstellung dazu:

Tab. 1.2

Kerntyp	Zahl der stab. Isotope	Stabilität	Zahl der Isotope pro Element
gg	165	sehr stabil	mehrere
gu	55 }	stabil	1
ug	50 }		
uu	4	zumeist instabil	1

Die vier stabilen uu-Kerne sind alle sehr leichte Kerne:
${}_1H^2$, ${}_3Li^6$, ${}_5B^{10}$, ${}_7N^{14}$ (mnemotechnisch: Z = 1, 3, 5, 7); sie fallen nicht in den eigentlichen Gültigkeitsbereich des Flüssigkeitströpfchen-Modells.

Entsprechend dem Befund, dass die Bindungsenergie der gg-Kerne grösser und die der uu-Kerne kleiner als die der gu- und ug-Kerne ist, wird in der Massenformel ein weiterer Term

$$B_4 = \begin{cases} +\,\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für gu-, und ug-Kerne} \\ -\,\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \qquad (1.33)$$

hinzugefügt.

Dieser Term ist wiederum nicht-klassisch. Infolge des Pauli-Prinzips sind im Grundzustand alle unteren Energieniveaux im Kern lückenlos von Protonen mit paarweise entgegengesetztem Spin und von Neutronenpaaren in der gleichen Weise besetzt. Jedes unpaarige Neutron z.B. findet nur in einem höhergelegenen Niveau Platz. Ganz ähnlich wie im Fall der Neutronenüberschuss-Energie ist demnach die Bindungsenergie für Kerne mit ungerader Neutronenzahl kleiner als für die mit gerader Neutronenzahl. Dasselbe gilt für Protonen. Also sind gu- oder ug-Kerne weniger stabil als gg-Kerne; und uu-Kerne sind noch weniger stabil.

δ erweist sich bei näherer Untersuchung als unabhängig von Z; als eine empirisch gut bestätigte Näherung gilt

$$\delta = a_p \cdot A^{-3/4} . \qquad (1.34)$$

Durch den Umstand, dass infolge des Neutronenüberschusses sich das unpaarige Neutron bei gu-Kernen auf einem viel höheren Niveau befindet als bei ug-Kernen das unpaarige Proton, ist für ug- bzw. gu-Kerne der Wert $B_4 = \pm\ \varepsilon$ genauer als $B_4 = 0$, wobei ε allerdings sehr klein ist und zumeist ausser Betracht bleiben kann.

1.6.6 Zusammenfassung

Durch Summation aller Terme B_o bis B_4 und Einsetzen in (1.20) erhält man die SEMIEMPIRISCHE MASSENFORMEL nach v. Weizsäcker

$$M(Z,A) = Z \cdot M_H + (A-Z)\,M_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \begin{cases} + a_p A^{-3/4} & \text{für } uu \\ 0 & \text{" } ug, gu \\ - a_p A^{-3/4} & \text{" } gg \end{cases} \qquad (1.35)$$

Man beachte, dass jetzt im ersten Term die Masse des Protons M_p durch die Masse des Wasserstoffatoms M_H ersetzt worden ist. Dadurch sind die Massen der Hüllenelektronen hinzugerechnet worden. M(Z,A) ist dann nicht die Masse des Kerns, sondern - wenn man von den Bindungsenergien der Elektronen absieht - die Masse des neutralen Atoms, was für praktische Zwecke brauchbarer ist. Für die Berechnung der Energien von Kernreaktionen spielt dieser Unterschied keine Rolle, wenn die Elektronenzahlen sich auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung herausheben.

Neuere Werte der fünf empirisch bestimmten Konstanten sind:

a_c	=	0,595 MeV
a_v	=	14,1 MeV
a_s	=	13 MeV
a_a	=	19 MeV
a_p	=	33,5 MeV

(1.36)

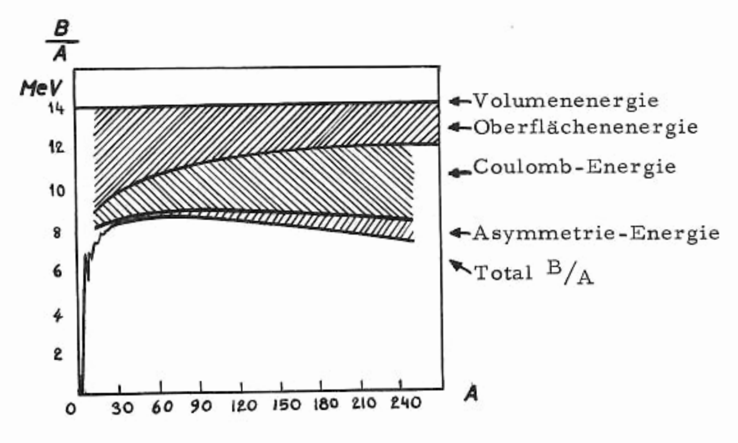


Fig. 1.8

In Fig. 1.8 sind die Beiträge der einzelnen Terme zur mittleren Bindungsenergie pro Nukleon B/A anschaulich gemacht.

Der Gültigkeitsbereich der Massenformel (1.35) ist für leichte Kerne eingeschränkt. Oberhalb A = 40 liefert sie für alle Kerne die Bindungsenergie bis etwa 1% genau; das entspricht Massenberechnungen mit einer Genauigkeit besser als 10^{-4}, z.B.:

Cr^{52} nach (1.35) 51,96 AME, experimentell 51,95 AME
U^{238} " " 238,12 " " 238,12 "

1.6.7 Anwendungen

Die Massenformel (1.35) liefert als Anwendungen zahlreiche Aussagen, von denen einige hier behandelt werden:

a) Uranspaltung

Durch Einfang eines Neutrons bildet sich aus U^{238} der instabile U^{239}-Kern, der sich spontan spaltet:

$$U^{238} + n \rightarrow U^{239} \rightarrow X + Y .$$

Als Spaltprodukte X, Y seien zwei etwa gleichschwere Kerne angenommen. Die Bindungsenergie pro Nukleon steigt von $\cong$ 7,6 MeV bei A = 239 auf $\cong$ 8,5 MeV bei etwa $A = \frac{239}{2}$; die Differenz beträgt also pro Nukleon $\cong$ 0,9 MeV und für die Spaltung des ganzen Kerns $\cong$ 210 MeV.

Die Massenformel (1.35) liefert für den Fall symmetrischer Spaltung

$$Q = M(Z,A) - 2 \cdot M\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right), \qquad (1.37)$$

also $$Q = a_s A^{2/3}\left[1 - 2^{1/3}\right] + a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left[1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right] . \qquad (1.38)$$

(δ vernachlässigt)

Im Falle des U^{238} ergibt sich daraus

$$Q = -130 + 300 = 170 \text{ MeV}. \qquad (1.39)$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Resultaten rührt daher: Die durch Spaltung und Folgeprozesse insgesamt freiwerdende Energie beträgt 210 MeV, und zwar entsprechen die dafür benützten B/A-Werte den Anfangs- und Endprodukten als stabilen Kernen. Die 170 MeV entstehen nur während der Spaltung selbst. Die so gebildeten Kerne sind jedoch hochgradig instabil infolge zu grossen Neutronenüberschusses. Sie wandeln sich durch n-, β^--, und γ -Emission in stabile Kerne um. Dabei werden die restlichen 40 MeV abgegeben (Fig. 1.9).

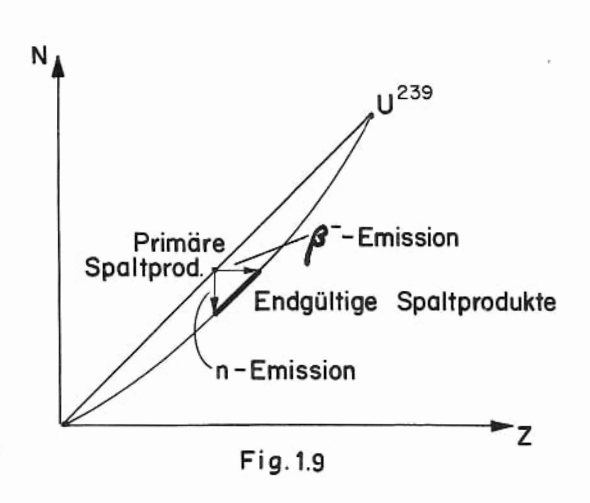


Fig. 1.9

Die beiden Anteile, aus denen sich Q in (1.39) zusammensetzt, stammen von der Coulomb-Energie, die freigesetzt wird, und von der Oberflächenspannung, die zu überwinden ist. Die Energiebilanz bei der Spaltung ist ein Wechselspiel zwischen Coulomb-Kräften und Oberflächenspannung.

Aus dem Verlauf der Kurve B/A (Fig. 1.2) folgt, dass schon für mittelschwere Kerne, etwa ab A = 100, der Prozess der Spaltung exotherm ist. Warum tritt nun dieser Prozess nicht spontan ein? Dem steht entgegen, dass bei der Reaktion ein Potentialberg überwunden werden muss (s. Kap. 7).

b) Spiegelkerne

Die Differenz der Bindungsenergien für Spiegelkerne ist

$$\Delta E = M(Z, A) - M(Z', A') \qquad (1.40)$$

mit

$$A = A' \quad \text{und} \quad Z = \frac{A - n}{2}, \quad Z' = \frac{A + n}{2}, \qquad (1.41)$$

wobei n der Neutronenüberschuss einer der Kerne ist. In ΔE bleiben aus (1.35) nur zwei Terme:

$$\Delta E = n \left[(M_n - M_H) - a_c A^{2/3} \right] . \qquad (1.42)$$

Hieraus kann über $a_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0}$ die Grösse von R_o bestimmt werden.

c) Das Verhalten von Isobaren

Beim β-Zerfall bleibt die Nukleonenzahl A im Kern konstant. Mutter- und Tochterkern sind Isobare.

Zur Untersuchung von Isobaren wird für die Massenformel (1.35) die verkürzte Schreibweise

$$M(Z, A) = \alpha . A + \beta . Z + \gamma . Z^2 \pm \delta \qquad (1.43)$$

eingeführt, worin α, β, γ folgende Konstanten sind:

$$\alpha = M_n - \left(a_v - a_a - a_s \cdot \frac{1}{A^{1/3}} \right) \qquad (1.44)$$

$$\beta = - \left[4 a_a + (M_n - M_H) \right] \qquad (1.45)$$

$$\gamma = \frac{4 a_a}{A} \left(1 + \frac{A^{2/3}}{4 \cdot a_a / a_c} \right) . \qquad (1.46)$$

Um M(Z, A) bei konstantem A als Funktion von Z aufzutragen, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Bei ug- und gu-Kernen ist $\delta = 0$ und man erhält eine Parabel (Fig. 1.10). Bei uu-Kernen ist in (1.43) $+\delta$ und bei gg-Kernen $-\delta$ zu benutzen; man erhält dann zwei Parabeln übereinander im Abstand 2δ, von denen die obere für uu-Kerne und die untere für gg-Kerne gilt (Fig. 1.11).

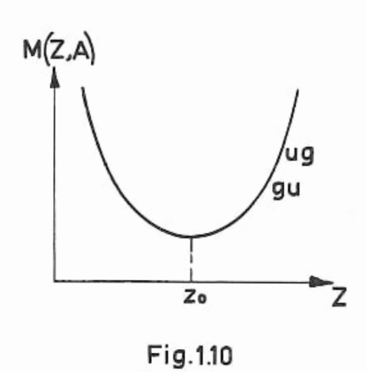


Fig.1.10

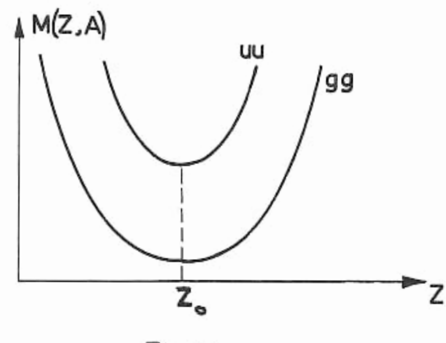


Fig.1.11

In beiden Fällen liegt das Minimum der Parabeln bei

$$\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right)_A = \beta + 2\gamma Z_0 = 0 \qquad (1.47)$$

$$Z_0 = -\frac{\beta}{2\gamma} . \qquad (1.48)$$

(1.48) ist mit der Beziehung (1.30) identisch. Das stabilste, mögliche Isobar ist dasjenige, dessen ganzzahliges Z dem Wert Z_o am nächsten liegt.

Jedes Isobar, dessen Masse grösser ist als die des stabilsten, wandelt sich durch β -Zerfall in das jeweils benachbarte, tieferliegende um. Dabei ändert sich die Kernladung Z bei jedem Schritt um eine Einheit, und zwar nimmt Z bei β^--Emission um 1 zu und bei β^+-Emission um 1 ab.

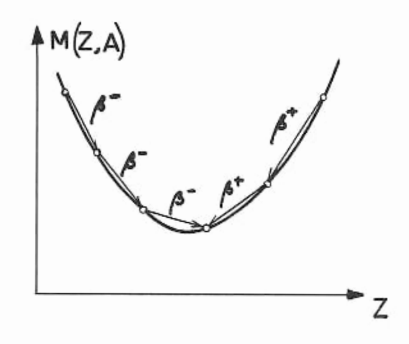


Fig.1.12

Bei Kernen mit ungeraden A gibt es also nur ein stabiles Isobar (Fig. 1.12). Bei den Kernen, die auf dem linken Parabelast liegen, kann nur β^--Zerfall vorkommen, und bei denen, die auf dem rechten Ast liegen, nur β^+-Zerfall.

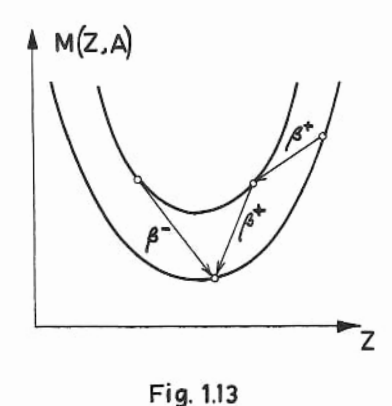


Fig. 1.13

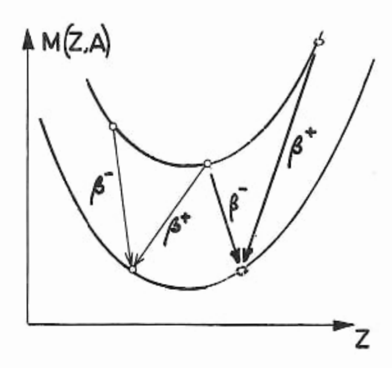


Fig. 1.14

Bei Kernen mit geradem A entsteht durch β-Zerfall aus einem gg-Kern ein uu-Kern und umgekehrt (Fig. 1.13 und 1.14). Die Zerfallsschritte führen abwechselnd zwischen der oberen und der unteren Parabel hin und her. Auf diese Weise enden die Zerfallsketten stets auf der unteren; es gibt keine stabilen uu-Kerne (bis auf die vier Ausnahmen, die nicht in den Gültigkeitsbereich der Massenformel fallen). Indessen kann es mehr als ein stabiles gg-Isobar bei vorgegebenem A geben, da die auf der gg-Parabel liegenden benachbarten Isobare um $\Delta Z = 2$ auseinanderliegen und sich nicht ineinander umwandeln. In den Fällen, wo es zwei oder mehr stabile gg-Isobare gibt, kommen uu-Isobare mit gleichzeitiger β^+- und β^-- Emission vor (Fig. 1.14).

Ferner lässt sich aus (1.43) die β-Zerfallsenergie berechnen. Die Massendifferenz der einzelnen Isobare gegenüber dem stabilsten Isobar ist für ungerade A:

$$M(Z,A) - M(Z_0,A) = \gamma (Z - Z_0)^2 . \qquad (1.49)$$

Bei β^--Zerfällen geht $Z \rightarrow (Z+1)$, und die Zerfallsenergie ist

$$Q_{\beta^-} = M(Z,A) - M(Z+1,A) = 2\gamma \left(Z_0 - Z - \tfrac{1}{2}\right) . \qquad (1.50)$$

Bei β^+-Zerfällen geht $Z \rightarrow (Z-1)$, und die Zerfallsenergie ist

$$Q_{\beta^+} = M(Z,A) - M(Z-1,A) = 2\gamma \left(Z - Z_0 - \tfrac{1}{2}\right) . \qquad (1.51)$$

Beide Fälle lassen sich zusammengefasst schreiben:

$$Q_{\beta^\pm} = 2\gamma \left(\pm [Z - Z_0] - \tfrac{1}{2} \right) . \qquad (1.52)$$

Bei Kernen mit geradem A wird als "hypothetisch stabilstes Isobar" Z_o nur dasjenige auf der gg-Parabel angesehen, dessen Masse

$$M(Z_0, A) = \alpha . A - \gamma . Z_0^2 - \delta \qquad (1.53)$$

ist, so dass die Massendifferenzen der einzelnen Isobare gegenüber diesem

$$M(Z,A) - M(Z_0,A) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma (Z - Z_0)^2 & \text{für gg-Kerne} \\ \gamma (Z - Z_0)^2 + 2\delta & \text{für uu-Kerne} \end{array} \right\} \qquad (1.54)$$

In jedem Fall nehmen die Zerfallsenergien mit dem Abstand von dem "stabilsten Isobar" Z_o zu. Da die Lebensdauern mit zunehmender Zerfallsenergie abnehmen, sind die weit aussen auf den Parabelästen liegenden Isobare sehr kurzlebig; infolgedessen ist die Zahl der beobachtbaren Isobare begrenzt.

Bei Spaltung schwerer Kerne entstehen Produkte mit sehr grossem Neutronenüberschuss, also sehr hoch auf dem linken Parabelast befindliche Isobare, die lange β^--Zerfallsreihen ergeben, z.B.:

$$I^{139} \xrightarrow[\beta^-]{2,7\,s} Xe^{139} \xrightarrow[\beta^-]{41\,s} Cs^{139} \xrightarrow[\beta^-]{9,5\,m} Ba^{139} \xrightarrow[\beta^-]{85\,m} La^{139} .$$

2. WIRKUNGSQUERSCHNITT

2.1 Definition des Wirkungsquerschnittes

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reaktion infolge einer Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen (z.B. Streuung, Absorption) stattfindet, wird durch den REAKTIONS - WIRKUNGSQUERSCHNITT angegeben.

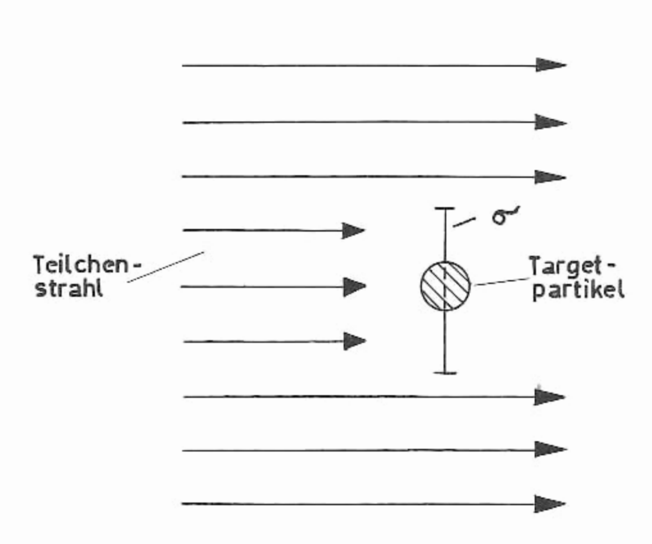


Fig. 2.1

Um in der skizzierten Anordnung (Fig. 2.1) die Häufigkeit, mit der sich die Reaktion ereignet, zu beschreiben, lässt sich folgendes Modell verwenden: Jedem Targetpartikel wird eine Fläche σ als gedachte Zielscheibe zugeordnet, deren Grösse so gewählt wird, dass die Reaktion stattfindet, wenn ein einfallendes Teilchen diese Scheibe trifft, und dass sie nicht stattfindet, wenn es diese Zielscheibe verfehlt. Diese Fläche heisst der WIRKUNGSQUERSCHNITT.

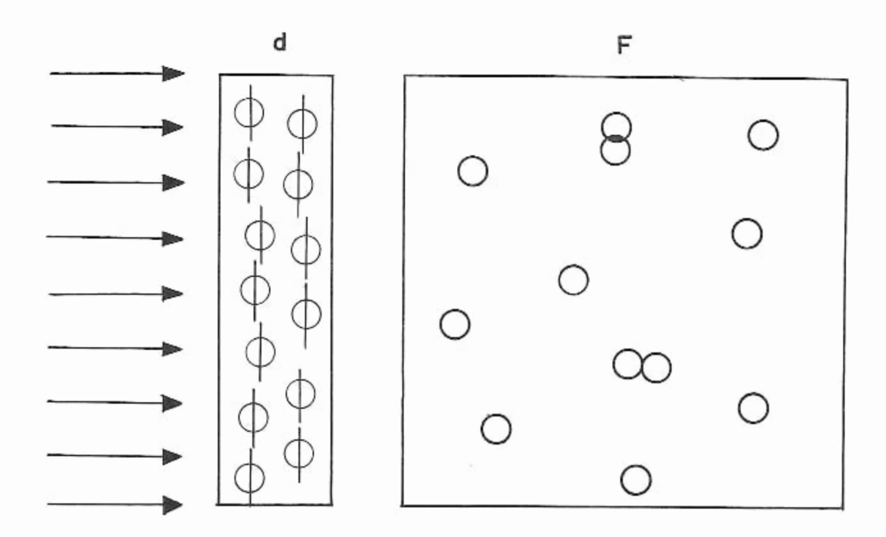


Fig. 2.2

Wenn das Target der Fläche F und der Dicke d (Fig. 2.2) eine Anzahl n Teilchen enthält, und wenn d so dünn ist, dass sich die einzelnen Zielscheiben statistisch nur zu einem verschwindend kleinen Anteil gegenseitig verdecken, dann ist die gesamte, sich als Zielscheibe anbietende Fläche n σ und die Wahrschein-

lichkeit, dass ein auftreffendes Partikel eine Reaktion auslöst

$$W = \frac{n\sigma}{F} \quad . \tag{2.1}$$

Mit

$$n^{\square} \equiv \frac{n}{Fd} \tag{2.2}$$

als der Zahl der Targetteilchen pro cm^3 ist

$$W = n^{\square} . \sigma . d \quad . \tag{2.3}$$

Treffen N_o einfallende Partikel pro sec auf das Target, so ist die Zahl der Reaktionen pro sec

$$\boxed{N = N_o . W = N_o . n^{\square} \sigma d} \quad . \tag{2.4}$$

Bei einem dicken Target ist die Summation n σ nicht in der obigen Form gültig, da sich die einzelnen Zielscheiben teilweise verdecken. Die Summation lässt sich nur in einer dünnen Schicht $x \rightarrow x + dx$, innerhalb der die Verdeckung vernachlässigbar ist, wie oben ausführen (Fig. 2.3). Durch die Wechselwirkung mit den Targetteilchen in den davorliegenden Schichten wird der Partikelstrom geschwächt und die Zahl der Partikel, die pro sec auf die Schicht bei x fallen, ist nicht mehr N_o, sondern N(x) ; die Zahl der Reaktionen in der betreffenden Schicht ist gleich der Abnahme der Partikel, die auf die dahinterliegende Schicht auftreffen und weiterhin Reaktionen auslösen können:

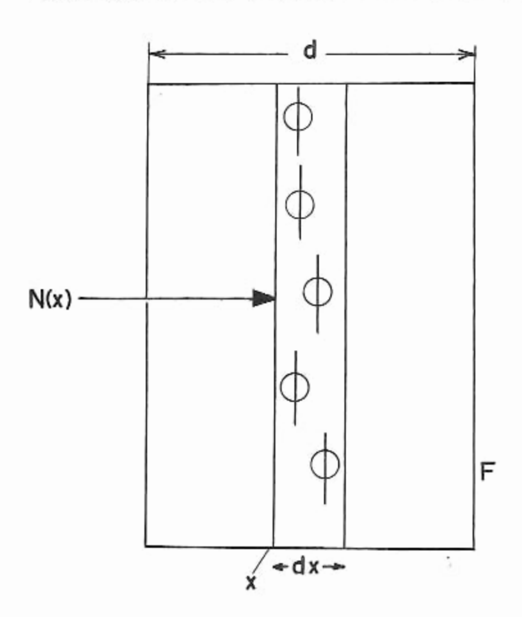


Fig. 2.3

$$- d\, N(x) = N(x) . n^{\square} . \sigma . dx \quad . \tag{2.5}$$

Durch Integration über alle diese Schichten ergibt sich für die Zahl der Partikel, die das ganze Target ohne Reaktion durchdringen

$$\boxed{N = N_o \, e^{- n^{\square} . \sigma . d}} \tag{2.6}$$

Dabei wurde stillschweigend eine Energieabhängigkeit des σ unterdrückt. Der Partikelstrom wird dann exponentiell geschwächt. Die Zahl der Reaktionen in dem Target ist

$$R = N_o - N = N_o \left(1 - e^{- n^{\square} . \sigma . d}\right) \quad . \tag{2.7}$$

Die Vorstellung vom Wirkungsquerschnitt als einer Fläche der Targetteilchen bietet ein anschauliches Mass für die Stärke einer Wechselwirkung. Starke Wechselwirkungen ergeben grosse Wirkungsquerschnitte, schwache Wechselwirkungen kleine Wirkungsquer-

schnitte. σ darf jedoch nicht als eine wirkliche Fläche, sondern nur als eine dem Targetteilchen für eine bestimmte Wechselwirkung zugeordnete hypothetische Fläche verstanden werden. Die Ausdehnung der einfallenden Partikel wird dabei als null angenommen.

Der Wirkungsquerschnitt ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion und in dieser Eigenschaft vor allem als praktisches Mass direkt auf die experimentellen Verhältnisse zugeschnitten:

$$\sigma = \frac{N}{N_0} \cdot \frac{1}{n/F} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen} \cdot \text{sec}^{-1}}{\text{Zahl d. einfall. Partikel} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Targetteilchen} \cdot \text{cm}^{-2}} \quad . \tag{2.8}$$

Die bisherige Darstellung bezog sich allein auf das Partikelbild. In ganz analoger Weise lässt sich der Wirkungsquerschnitt für die Wellendarstellung definieren. Für die Wechselwirkung einer einfallenden (ebenen) Welle mit einem Target gilt:

$$\sigma = \frac{I}{I_0} \cdot \frac{1}{n/F} = \frac{\text{Intensitätsabnahme d. einfall. Welle}}{\text{Intensität d. einfall. Welle} \cdot \text{Zahl d. Targetteilchen} \cdot \text{cm}^{-2}} \quad . \tag{2.9}$$

Die zu (2.5) analoge Beziehung lautet

$$- dI = I_0 \cdot n^a \cdot \sigma \cdot dx \quad . \tag{2.10}$$

Entsprechend der Dualität Welle-Korpuskel sind in der Modellvorstellung dieses Wirkungsquerschnittes als Fläche einige Elemente dual: Im Gegensatz zum Partikelbild ist σ hier eine gedachte Fläche in der einfallenden Wellenfront, die von der Wechselwirkung mit den Targetteilchen betroffen wird, und die Ausdehnung der Targetteilchen wird grundsätzlich als null angenommen.

Um Übereinstimmung zwischen den Wirkungsquerschnitten in der Partikel- und der Wellendarstellung zu erzielen, ist es zweckmässig, σ dimensionsmässig grundsätzlich als das Verhältnis zwischen Energiegrössen zu wählen:

$$\sigma = \frac{Q/t}{Q_0/t} \cdot \frac{1}{n/F} = \frac{\text{aus dem Primärstrom v. Reaktion betroffene Energie} \cdot \text{sec}^{-1}}{\text{einfall. Energiestrom} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Zahl d. Targetpartikel} \cdot \text{cm}^{-2}} \quad . \tag{2.11}$$

Allgemein ist σ eine Funktion der kinetischen Energie E der einfallenden Teilchen

$$\sigma = \sigma(E) \tag{2.12}$$

bzw. eine Funktion der Wellenlänge λ der einfallenden Wellen

$$\sigma = \sigma(\lambda) \quad . \tag{2.13}$$

Bei der obigen Integration (2.6) wurde stillschweigend σ als unabhängig von x vorausgesetzt, d.h. σ unabhängig von E und E unabhängig von x. Das ist dann erfüllt, wenn jedes einfallende Partikel nicht mehr als eine Reaktion in dem Target erleidet. Dann gilt das exponentielle Gesetz (2.6) streng. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn das einfallende Partikel durch die Reaktion unmittelbar für weitere Wechselwirkungen ausscheidet (z.B. bei Absorption) oder wenn die mittlere Entfernung zwischen zwei Reaktionen für ein und dasselbe Partikel sehr gross ist gegenüber der Targetdicke.

Das exponentielle Gesetz ist charakteristisch für γ -Strahlen, während es für die Bremsung geladener Teilchen, die ihre Energie in einer Vielzahl von Einzelereignissen abgeben, nicht gilt.

2.2 Partieller und totaler Wirkungsquerschnitt

Bisher wurde nur jeweils eine einzige spezifische Reaktion als Wechselwirkung betrachtet. Wenn mehrere Reaktionen verschiedener Art unabhängig voneinander zugleich stattfinden, was zumeist der Fall ist, so addieren sich die als Wirkungsquerschnitte formulierten Einzelwahrscheinlichkeiten zu einem TOTALEN WIRKUNGSQUERSCHNITT

$$\sigma_{total} = \sum \sigma_{partiell} \quad . \qquad (2.14)$$

Die auf die spezifischen Einzelreaktionen (Streuung, Absorption, Paarbildung, Spaltung etc.) bezogenen Anteile heissen PARTIELLE WIRKUNGSQUERSCHNITTE.

2.3 Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt

Der DIFFERENTIELLE WIRKUNGSQUERSCHNITT

$$\sigma(\vartheta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad (2.15)$$

gibt die Winkelverteilung von Strahlung oder von Teilchen an, die infolge einer Reaktion aus dem Target ausgesandt werden. $\sigma(\vartheta).d\Omega$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen bzw. eine Welle in das Raumelement $d\Omega$ unter dem Winkel ϑ, bezogen auf die Einfallsrichtung, emittiert wird.

So wird bei der Streuung an einem Target auf diese Weise beschrieben, mit welcher Häufigkeit die Teilchen bzw. mit welcher Intensität die Wellen unter dem Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung nach Passieren des Target anzutreffen sind. Es können ebenso auch andere Partikel emittiert werden, z.B. in einer (n,γ)-Reaktion, wobei man sich für die γ -Winkelverteilung interessiert.

Werden bei einem Prozess mehrere Teilchen emittiert, so hat der differentielle Wirkungsquerschnitt die Form

$$\sigma(\vartheta_i, \vartheta_k) = \frac{d^2\sigma}{d\Omega_i \; d\Omega_k} \quad . \qquad (2.16)$$

$\sigma(\vartheta_i, \vartheta_k) d\Omega_i \, d\Omega_k$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen i in das Raumwinkelelement $d\Omega_i$ unter dem Winkel ϑ_i und gleichzeitig das Teilchen k in das Raumwinkelelement $d\Omega_k$ unter dem Winkel ϑ_k emittiert werden.

Ebenso kann der Wirkungsquerschnitt von dem Polarisationswinkel ε eines Teilchens bzw. einer Welle abhängen:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad . \qquad (2.17)$$

$\sigma(\varepsilon)\,d\varepsilon$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Reaktion bei einem Polarisationswinkel zwischen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ abspielt.

Die Summe der differentiellen Wirkungsquerschnitte über alle Richtungen

$$\sigma = \int \sigma(\vartheta)\, d\Omega \qquad (2.18)$$

bzw. über alle Orientierungen

$$\sigma = \int \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (2.19)$$

heisst der TOTALE WIRKUNGSQUERSCHNITT.

Beachte: Die Bezeichnung totaler Wirkungsquerschnitt ist nicht eindeutig; z.B. heisst auch die Summe der partiellen Wirkungsquerschnitte totaler Wirkungsquerschnitt.

2.4 Wirkungsquerschnitt bezogen auf Elektron, Atom etc.

Die Theorie liefert in der Regel zunächst die Wirkungsquerschnitte bezogen auf ein Elektron, einen Kern, ein Atom etc. Die betreffenden Wirkungsquerschnitte werden durch Suffixe ${}_e\sigma$, ${}_n\sigma$ und ${}_a\sigma$ unterschieden.

Erfolgt die Wechselwirkung mit den einzelnen Elektronen unabhängig voneinander, so ist

$${}_a\sigma = Z \cdot {}_e\sigma \quad . \qquad (2.20)$$

2.5 Masseinheit des Wirkungsquerschnittes

Als international festgelegte Einheit für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\boxed{1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{cm}^2} \; {}^{*)}$$

Die Mehrzahl aller Wirkungsquerschnitte ist von dieser Grössenordnung.

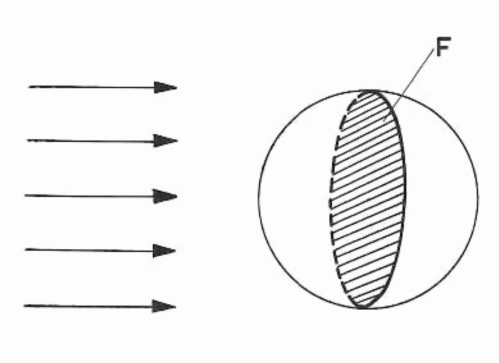


Fig. 2.4

Als GEOMETRISCHER WIRKUNGSQUERSCHNITT wird die Querschnittsfläche eines Targetteilchens gemäss seiner "geometrischen Ausdehnung" bezeichnet (Fig. 2.4). So liegt der geometrische Querschnitt für das Elektron

$${}_e\sigma_g = \pi r_o^2 \qquad (2.21)$$

der mit Hilfe des klassischen Elektronenradius

$$r_o = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{cm} \qquad (2.22)$$

berechnet wird, sehr genau bei $\frac{1}{4}$ barn.

*) barn = Scheune, vgl. englisches Idiom: "as big as a barn".

Die geometrischen Wirkungsquerschnitte für Kerne liegen in der gleichen Grössenordnung.

Der von Thomson für die Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem Elektron klassisch berechnete, totale Wirkungsquerschnitt (p. 34) ist:

$$\boxed{\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_o^2 \approx \frac{2}{3}\ barn} \quad . \qquad (2.23)$$

Die quantenmechanisch berechneten Wirkungsquerschnitte stimmen in der Regel nicht mit den klassisch berechneten und noch weniger mit den geometrischen überein. Die geometrischen Wirkungsquerschnitte enthalten z. B. keine Energieabhängigkeit. Dennoch tritt in vielen quantenmechanisch berechneten Wirkungsquerschnitten dieses ${}_e\sigma_g$ als grössenordnungsbestimmender Faktor auf. In der Ableitung des THOMSON-QUERSCHNITTES, der praktisch nur durch r_o charakterisiert ist, wird das Elektron übrigens auch als punktförmig angenommen.

2.6 Linearer Schwächungskoeffizient und Massenschwächungskoeffizient

In den Gleichungen (2.4) bis (2.7) erscheint der Ausdruck $(n^a \sigma d)$ als charakteristische Grösse für die Schwächung des einfallenden Strahles bzw. für die Zahl der Reaktionen in dem Target. Fasst man für praktische Zwecke $n^a \sigma$ als LINEAREN SCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

$$\mu \equiv n^a \sigma \qquad (2.24)$$

zusammen, so wird

$$\boxed{N = N_o e^{-\mu d}} \quad . \qquad (2.25)$$

Hierin ist $1/\mu$ diejenige Targetdicke, bei der der einfallende Strahl auf den e-ten Teil geschwächt wird. μ hat die Dimension cm^{-1}.

Dabei ist σ der auf ein Atom bzw. einen Kern bezogene Wirkungsquerschnitt und $n^a = \frac{\rho L}{A}$ die Zahl der Atome . cm^{-3} in dem Target mit

L = Loschmidtsche Zahl
A = Atomgewicht des Target
ρ = spez. Dichte des Target

so dass

$$\boxed{\mu = \frac{\rho L}{A} \cdot \sigma} \quad . \qquad (2.26)$$

μ ist also über ρ noch von Druck, Temperatur und Aggregatzustand des Target abhängig.

Bei Verwendung des MASSEN-SCHWÄCHUNGS-KOEFFIZIENTEN μ/ρ ist die Abhängigkeit von diesen Parametern eliminiert. Gemäss

$$N = N_o e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\cdot(\rho d)} \qquad (2.27)$$

wird dann die Targetdicke als $(\rho\, d)$ in g . cm^{-2} angegeben, die ein direktes Mass für die Substanzmenge pro cm^2 ist. μ/ρ hat die Dimension g^{-1} . cm^2.

Für den speziellen Fall $_a\sigma = Z \cdot {}_e\sigma$ ist der Massen-Schwächungskoeffizient

$$\boxed{\frac{\mu}{\rho} = L \cdot \frac{Z}{A} \cdot {}_e\sigma} \qquad (2.28)$$

in bezug auf eine bestimmte Reaktion für alle Elemente ungefähr gleich, da $Z/A \approx$ const. ist.

Besteht das Target nicht aus einem einheitlichen Stoff sondern aus einem Gemisch, einer chemischen Verbindung oder einem Isotopengemisch, so ist die Gewichtskonzentration C der Targetteilchen, die die Reaktion betrifft, in den Exponenten von (2.25) und (2.27) als Faktor hinzuzufügen.

Tragen mehrere solcher Bestandteile zum gleichen Prozess bei, so ist der gemeinsame Massen-Schwächungskoeffizient gegeben durch

$$\frac{\mu}{\rho} = \sum_i \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_i C_i \ . \qquad (2.29)$$

2.7 Berechnung einer Reaktionsrate (Yield)

Aufgabe:

Für die (n,γ)-Reaktion bei der Resonanzenergie $E_o = 0{,}178$ eV des Cd^{113}-Kernes (natürliche Isotopenhäufigkeit C = 12,26%) beträgt der Resonanz-Wirkungsquerschnitt $\sigma = 63\,600$ barn. Ein Target aus natürlichem Cd der Dicke $\rho\, d = 1\ mg \cdot cm^{-2}$ werde mit $N_o = 10^8$ Neutronen . sec^{-1} dieser Energie beschossen. Es soll die Zählrate in einem γ-Zähler mit der effektiven Fläche $S = 5\ cm^2$ (Ansprechwahrscheinlichkeit $\eta = 0{,}25$) im Abstand d = 1 m von dem Target bestimmt werden, wenn die räumliche Verteilung der emittierten γ-Quanten isotrop angenommen wird.

Lösung:

Es sei $n^\square$ die Zahl der Cd^{113}-Kerne pro cm^3
und n die Zahl der Cd^{113}-Kerne in dem Target
sowie F die Fläche des Target in cm^2.

Dann ist die Zahl der Reaktionen pro sec

$$R = N_o \left(1 - e^{-n^\square \cdot \sigma \cdot d}\right) . \qquad (2.30)$$

Aus dem Gewicht der in dem Target vorhandenen Cd^{113}-Kerne

$$\frac{n}{L} \cdot A = F \cdot d \cdot \rho \cdot C \qquad (2.31)$$

gewinnt man

$$n^\square = \frac{n}{Fd} = \frac{L}{A} \cdot C \cdot \rho \qquad (2.32)$$

so dass

$$n^\square \sigma d = \frac{L}{A} \cdot C \cdot \sigma \cdot (\rho d) = 0{,}04 \ . \qquad (2.33)$$

Da n σ d $\ll$ 1 ist, lässt sich die e-Funktion in (2.30) in eine Reihe entwickeln, so dass

$$R = N_0 \cdot n^{\square} \sigma d = 4 . 10^6 \ sec^{-1} . \tag{2.34}$$

Die Zählrate beträgt

$$R' = R . \frac{\omega}{4\pi} . \eta , \tag{2.35}$$

worin $\omega = \frac{S}{d^2} = 5.10^{-4}$ der Raumwinkel ist, den der Zähler von dem Target aus gesehen einnimmt. Dann ist die Reaktionsausbeute

$$\underline{R' = 40 \ sec^{-1} = 2\ 400 \ min^{-1}} .$$

3. WECHSELWIRKUNGEN ELEKTROMAGNETISCHER STRAHLUNG MIT MATERIE

3.1 Einleitung

Elektromagnetische Strahlung wird je nach Entstehungsart verschieden bezeichnet:

Emission aus den äusseren Elektronenschalen:	Licht
Emission aus den übrigen Elektronenschalen:	Röntgen-Strahlung
Emission aus dem Kern :	γ -Strahlung
Emission bei Abbremsung eines geladenen Teilchens:	Bremsstrahlung.

Diese historisch bedingte Einteilung bedeutet jedoch keine fundamentale Wesensverschiedenheit.

Beim Durchgang durch Materie wird die Intensität elektromagnetischer Strahlung geschwächt; γ -Quanten treten dabei in Wechselwirkung mit

(a) Atomelektronen
(b) Kernen
(c) elektrischen Feldern der Elektronen und Kerne
(d) Mesonenfeldern der Kerne.

Dabei treten Energieverluste sowie Änderungen der Ausbreitungsrichtung und Polarisation auf. Die Beeinflussungen der γ -Strahlung lassen sich unterscheiden als

(i) totale Absorption
(ii) inelastische Streuung (inkohärent)
(iii) elastische Streuung (kohärent).

Zwischen den beiden Gruppen (a) - (d) und (i) - (iii) gibt es folgende 12 Kombinationsmöglichkeiten (Tab. 3.1):

Tab. 3.1

<table>
<tr><th></th><th>Absorption</th><th>Inelast. Streuung</th><th>Elast. Streuung</th></tr>
<tr><td>Elektronen</td><td>Photoeffekt</td><td>Compton-Effekt</td><td rowspan="2">Rayleigh-Streuung
Thomson-Streuung</td></tr>
<tr><td>Kerne</td><td>Kernphotoeffekt</td><td>Kernresonanz-Streuung</td></tr>
<tr><td>Elektr. Felder</td><td>Paarerzeugung</td><td>—</td><td>Delbrück-Streuung
Kernpot-Streuung</td></tr>
<tr><td>Mesonenfelder</td><td>Mesonenerzeugung</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Die wichtigsten Prozesse von diesen sind

der Photoeffekt,
der Compton-Effekt,
die Paarerzeugung,

während die übrigen Effekte verhältnismässig schwach sind und zumeist bei nicht zu hohen Energien vernachlässigt werden können.

3.2 Photoeffekt

3.2.1 Absorptionskanten

Atomelektronen können die Energie eines γ-Quants vollständig absorbieren. Dabei wird ein Elektron entweder auf einen gebundenen Zustand höherer Energie gehoben, oder es wird, wenn die Energie des Photons $h\nu$ grösser ist als die Bindungsenergie B_e des Elektrons, mit der kinetischen Energie

$$T = h\nu - B_e \qquad (3.1)$$

emittiert. Die Bindungsenergie eines Hüllenelektrons ist von der Kernladung Z abhängig und davon, in welcher Schale es sich befindet.

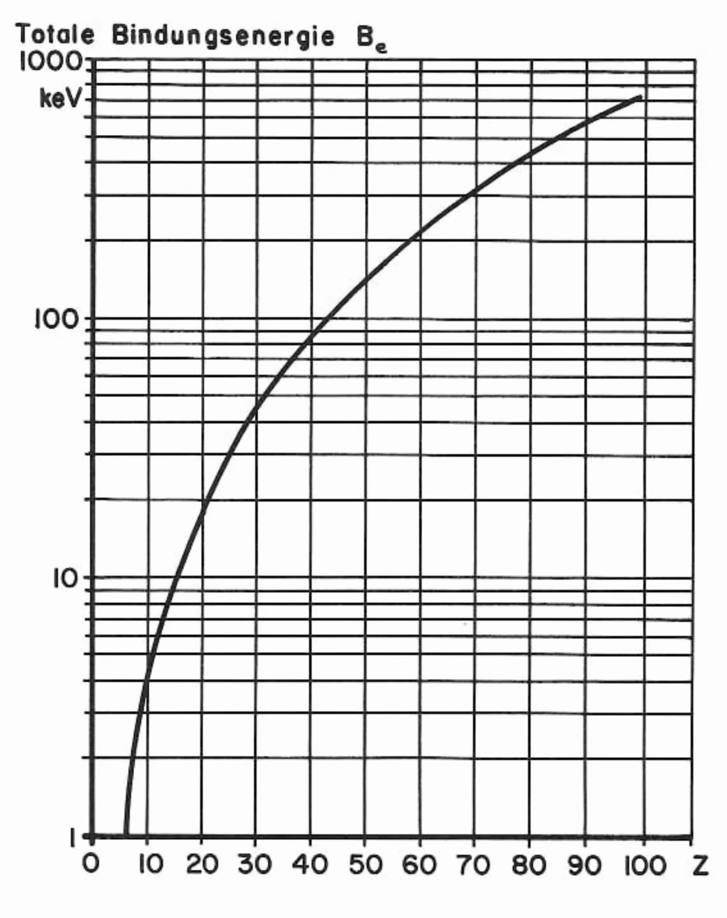


Fig. 3.1

Die Kernladung wird für die weiter aussen liegenden Schalen zunehmend durch die inneren abgeschirmt. Für die Bindungsenergien kann man folgende Näherungswerte benutzen:

K-Elektronen : $B_e = Ry\ (Z-1)^2$ (3.2)

L-Elektronen : $B_e = \frac{Ry}{4}\ (Z-5)^2$ (3.3)

M-Elektronen : $B_e = \frac{Ry}{9}\ (Z-13)^2$ (3.4)

wobei die Konstante Ry = 13,52 eV die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms ist.

Ist die Energie des Photons kleiner als die Bindungsenergie des Elektrons, so reicht seine Energie nicht zur Ionisierung aus. Der Verlauf der Absorptionskurve zeigt bei $h\nu = B_e$ einen scharfen Abfall, und zwar jeweils bei der Ionisationsenergie der K, L, M, ... Schale. So kommt der sägezahnförmige Verlauf zustande (Fig. 3.2).

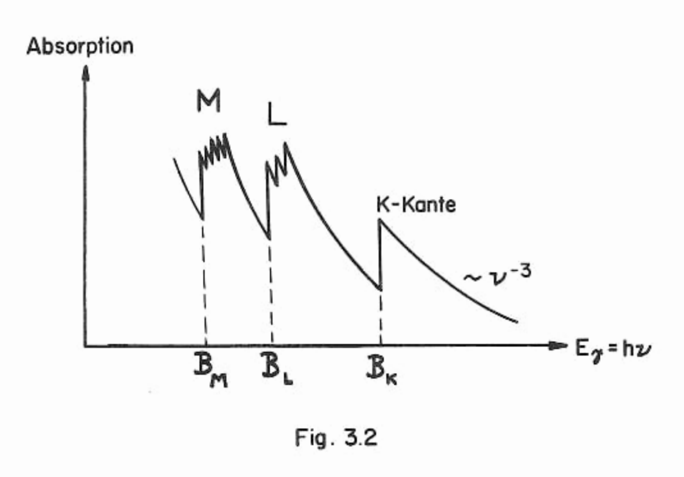


Fig. 3.2

Die Unterscheidung der K, L, M, ... Schalen ist durch die Hauptquantenzahl n (p. 131) gegeben. Mit Ausnahme der K-Schale besitzen alle weiteren mehrere Unterschalen, denen verschiedene Quantenzahlen ℓ und s bzw. j zugeordnet sind. Die räumliche Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ist je nach der Bahnquantenzahl ℓ unterschiedlich, demzufolge auch die Abschirmung der Kernladung und die Bindungsenergie. Durch die Spinbahnkopplung (ℓs) ist seine Bindungsenergie nochmals verschieden: Die Absorptionskanten sind entsprechend der Multiplizität von j aufgespalten, die L-Kante in drei, die M-Kante in fünf, etc.

3.2.2 Energieabhängigkeit

Ein freies Elektron kann wegen des Impulserhaltungssatzes die Energie eines Photons nicht vollständig aufnehmen; indessen ist das bei Atomelektronen möglich, weil dann das Atom den restlichen Impuls als Rückstoss aufnimmt. Dementsprechend absorbieren die am festesten gebundenen Elektronen am stärksten; so ist der Wirkungsquerschnitt für die Absorption in der K-Schale 80% dessen für alle Schalen zusammen, vorausgesetzt dass $h\nu$ grösser ist als die Bindungsenergie der K-Elektronen.

Ein Elektron erscheint umso weniger gebunden, je grösser $h\nu$ gegenüber B_e ist ($h\nu \gg B_e$). Infolgedessen nimmt der Wirkungsquerschnitt von jeder Absorptionskante her mit steigender Photonenenergie stetig ab (vgl. Sägezahnform in Fig. 3.2).

Die theoretische Berechnung des Wirkungsquerschnittes τ für den Photoeffekt bereitet Schwierigkeiten, weil man einerseits die Dirac-Gleichung für ein gebundenes Elektron lösen muss. Ausserdem ist man zumeist darauf angewiesen, die Abschirmung der Kernladung empirisch einzufügen. Analytisch ist τ eine komplizierte Funktion von $h\nu$. Sie werde für die beiden K-Elektronen in drei Bereichen betrachtet (Fig. 3.3):

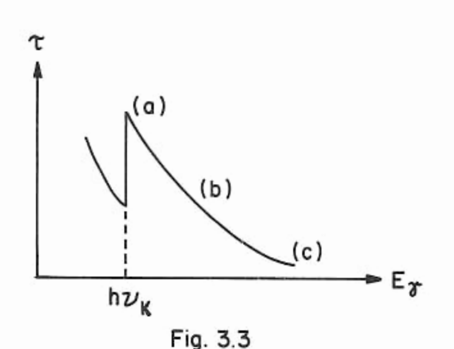


Fig. 3.3

(a) in der Nähe der Kante

(b) in hinreichender Entfernung von der Kante

(c) im relativistischen Gebiet ($h\nu \gg m_e c^2$).

In dem mittleren Bereich (b) lautet sie für beide K-Elektronen zusammen (Heitler, Quantum Theory of Radiation 1956, p. 207):

$$\tau_K = \sigma_{Th} \cdot 4\sqrt{2}\,\alpha^4 \cdot Z^5 \cdot \varepsilon_\gamma^{-7/2} \qquad (3.5)$$

worin

$\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_0^2$ der Thomson-Querschnitt,

$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$ die Feinstrukturkonstante und

$\varepsilon_\gamma \equiv \frac{h\nu}{m_e c^2}$ die "reduzierte" γ-Energie

ist.

In logarithmischer Darstellung ergibt (3.5) eine Gerade der Steigung - 3,5 (Fig. 3.4):

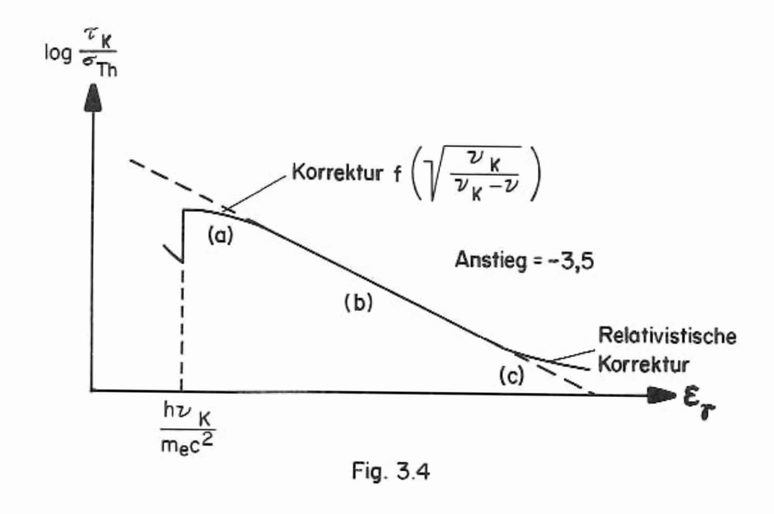


Fig. 3.4

In dem Bereich (a) nahe der Kante ist die γ-Energie von gleicher Grössenordnung wie die Bindungsenergie des K-Elektrons. Man muss dann für die Berechnung von τ_K genauere Wellenfunktionen benutzen, wodurch die Näherung (3.5) mit einem Korrekturfaktor der Form $f\left(\sqrt{\frac{\nu_K}{\nu_K - \nu}}\right)$ zu multiplizieren ist. Dieser zieht τ_K in dem Bereich (a) herunter (Fig. 3.4).

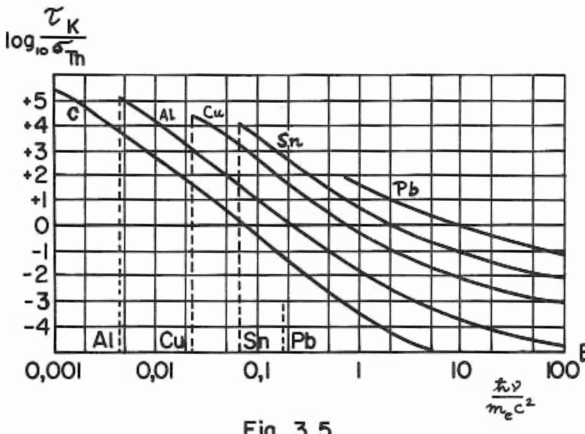


Fig. 3.5

Die relativistische Korrektur bewirkt, dass τ_K in dem Bereich (c) weniger stark abfällt (Fig. 3.4) als gemäss (3.5).

Fig. 3.5 zeigt den Verlauf von τ_K für verschiedene Elemente.

3.2.3 Z-Abhängigkeit

Dass τ_K nicht proportional Z ist, deutet an, dass die Wechselwirkung beim Photoeffekt nicht mit einem Atomelektron allein stattfindet. In der Näherung (3.5) ist τ_K proportional Z^5; durch die erwähnten Korrekturen, die ihrerseits Z-abhängig sind, wie man beispielsweise an $f\left(\sqrt{\frac{\nu_K}{\nu_K - \nu}}\right)$ sieht, wird τ_K eine kompliziertere Funktion von Z, die sich als $\tau_K \sim Z^n$ schreiben lässt. Der Exponent liegt etwa bei $n \approx 4$, ist aber energieabhängig, wie sich aus einer empirischen Zusammenstellung ersehen lässt (Fig. 3.6).

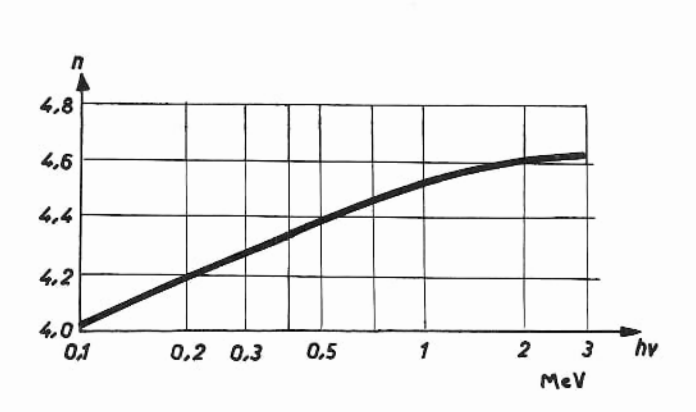


Fig. 3.6

In der Nähe der K-Kante ist näherungsweise

$$\tau_K \sim \frac{Z^4}{(h\nu)^3} . \qquad (3.6)$$

3.2.4 Winkelverteilung

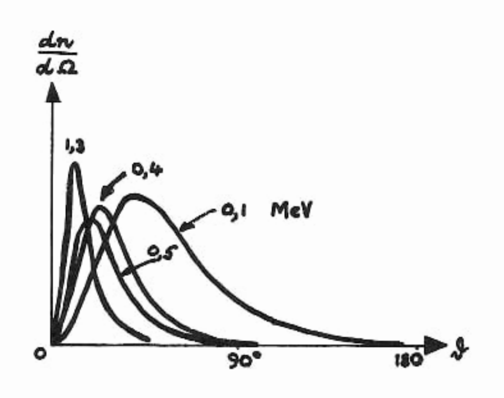


Fig. 3.7

Bei kleinem $h\nu$ werden die Photoelektronen überwiegend in Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Welle, also senkrecht zur Einfallsrichtung emittiert. Bei grossem $h\nu$ geschieht die Emission bevorzugt in Vorwärtsrichtung (Fig. 3.7).

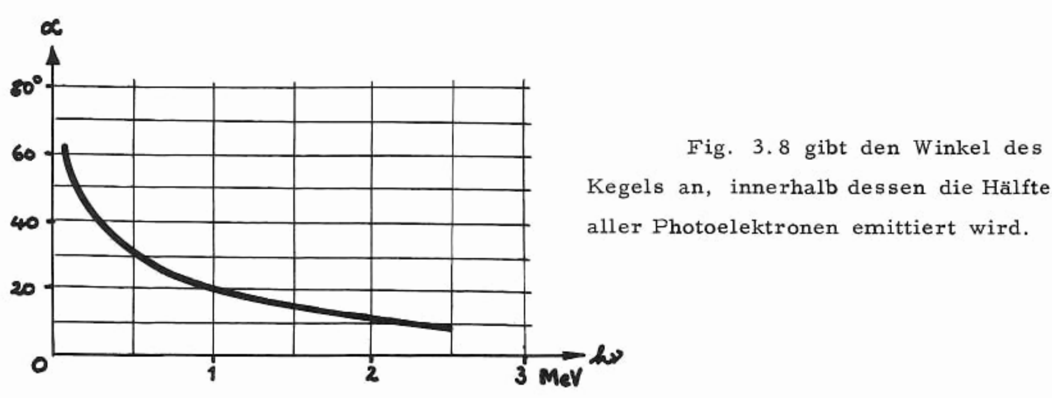


Fig. 3.8

Fig. 3.8 gibt den Winkel des Kegels an, innerhalb dessen die Hälfte aller Photoelektronen emittiert wird.

3.3 Auger-Elektronen

Im Grundzustand des Atoms sind alle Niveaux von unten her besetzt. Wird durch Photoeffekt ein Elektron z.B. aus der K-Schale herausgeschlagen, so befindet sich das Atom im angeregten Zustand. Es kehrt dadurch in den Grundzustand zurück, dass ein Elektron von einem höheren Niveau z.B. aus der L-Schale in diese Lücke springt, wobei ein γ -Quant der Energie $(E_K - E_L)$ emittiert wird. Die dabei freiwerdende Energie $(E_K - E_L)$ kann von einem Photon fortgetragen werden (K_α - Röntgenlinie) oder einem anderen Hüllenelektron, beispielsweise einem L-Elektron übertragen werden. Da dessen Bindungsenergie $E_L < (E_K - E_L)$ ist, wird dieses als AUGER-ELEKTRON mit der diskreten Energie $(E_K - 2E_L)$ emittiert (Fig. 3.9).

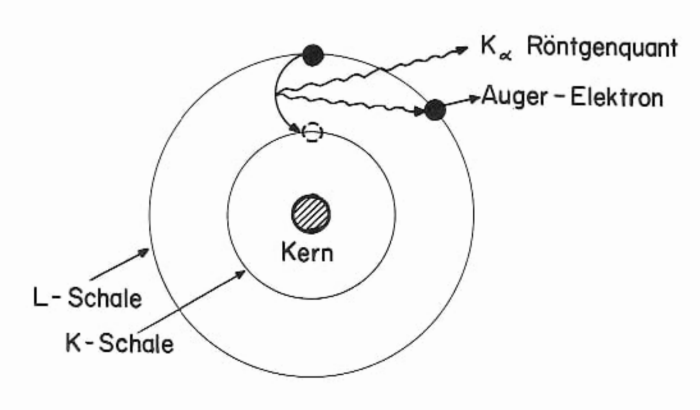


Fig. 3.9

Die Anzahl der emittierten Photonen N_γ pro Lücke in der K-Schale (K FLUORESCENCE YIELD) ist in seiner empirischen Abhängigkeit von Z in Fig. 3.10 wiedergegeben.

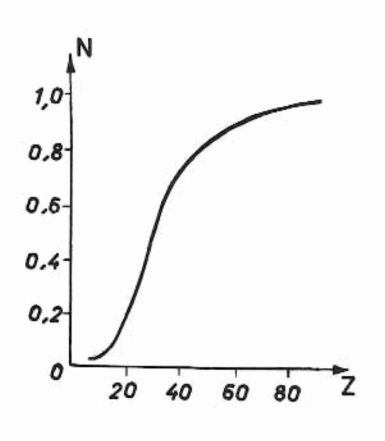


Fig. 3.10

Demnach überwiegen die Auger-Elektronen bei leichten Elementen.

Der Auger-Effekt kann als innerer Stoss zweiter Art bezeichnet werden. Stösse zweiter Art sind solche, bei denen sich einer der Stosspartner ursprünglich im angeregten Zustand befindet.

3.4 Thomson-Querschnitt

Die elastische Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem geladenen Teilchen wurde klassisch von Thomson behandelt. Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess lässt sich nach folgenden Überlegungen herleiten:

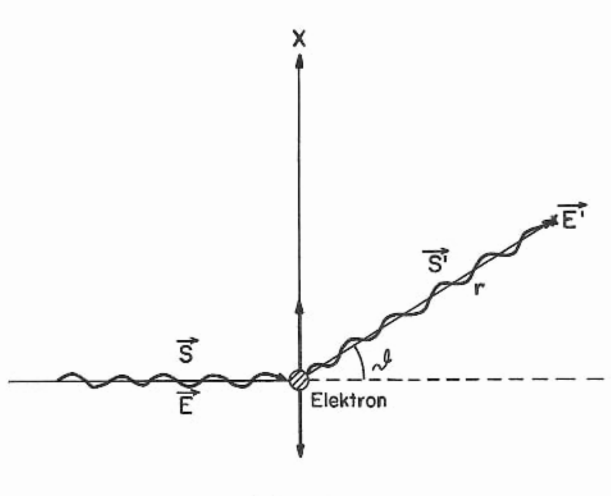


Fig. 3.11

Die in eine bestimmte Richtung pro Zeit strömende Energiedichte ist allgemein durch den Poyntingschen Vektor

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}||\vec{H}| \qquad (3.7)$$

gegeben. Für den Wirkungsquerschnitt (vgl. Definition (2.11)) ist dann der einfallende Energiestrom pro Zeit und Fläche

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \qquad (3.8)$$

der durch die ebene Primärwelle (Fig. 3.11) auf ein einzelnes Elektron wirkt.

Das Elektron oszilliert unter dem Einfluss dieses Feldes und emittiert dabei eine Dipolstrahlung, dessen Energiedichte pro Zeit in einer bestimmten Richtung ϑ

$$|\vec{S}'| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}'|^2 \qquad (3.9)$$

ist. Die gesamte aus dem Primärstrom pro Zeit gestreute Energie $\frac{dE'}{dt}$ ergibt sich durch Integration von S' über die Oberfläche F einer Kugel:

$$\frac{dE'}{dt} = \int_F |\vec{S}'| \, df = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\vec{S}'| \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, . \qquad (3.10)$$

Zur Berechnung dieses Integrals muss $|\vec{S}'|$, d.h. $|\vec{E}'|$ bekannt sein. Gemäss der Hertzschen Theorie ergibt sich im Abstand r für das Feld $\vec{E}'$ eines Dipols mit dem Moment M = ex, wobei x die Auslenkung des Elektrons aus der Ruhelage ist:

$$|\vec{E}'| = \frac{|\ddot{M}|}{c^2 r} \cdot \sin\vartheta = \frac{e|\ddot{x}|}{c^2 r} \cdot \sin\vartheta \, . \qquad (3.11)$$

Dann ergibt sich durch Substitution von (3.11) und (3.9) in (3.10)

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^2|\ddot{x}|^2}{c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^2|\ddot{x}|^2}{c^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{\frac{dE'}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot |\ddot{x}|^2} \qquad (3.12)$$

Dieses ist die von einem Teilchen der Ladung e infolge Beschleunigung bzw. Bremsung $|\ddot{x}|$ ausgestrahlte Energie pro Zeit. -

Für den THOMSON-QUERSCHNITT ist nach Definition (2.11) die Grösse

$$\sigma_{Th} = \frac{dE'/dt}{|\vec{S}|} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\cdot|\ddot{x}|^2\cdot\frac{1}{|\vec{S}|} \qquad (3.13)$$

zu berechnen. Hierin ist $|\vec{S}|$ durch (3.8) und $|\ddot{x}|$ durch die Bewegungsgleichung des Elektrons in dem elektrischen Feld E der einfallenden Welle

$$m_e\,\ddot{x} = e\,\vec{E} \qquad (3.14)$$

gegeben, so dass

$$\boxed{\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{e^4}{m_e^2\,c^4} \equiv \frac{8\pi}{3}\,r_0^2} \quad , \qquad (3.15)$$

wobei r_0 der klassische Elektronenradius ist.

Man beachte, dass dieser Ausdruck r_0 enthält, obwohl das Elektron bei dieser Ableitung stillschweigend als punktförmig angenommen wurde.

σ_{Th} ist unabhängig von der Frequenz der einfallenden Strahlung und gilt nur für den Fall der elastischen Streuung.

3.5 Compton-Effekt

Der Compton-Effekt beschreibt die elastische Streuung eines Photons an einem freien Elektron. Die inelastische Streuung an Atomelektronen kann als Compton-Effekt behandelt werden, wenn deren Bindungsenergie klein ist gegen die Energie $h\nu$ des einfallenden Photons.

Dem Elektron wird bei dem inelastischen Stoss die kinetische Energie T bzw. der Impuls $\vec{p}$ in der Richtung ϑ_e gegenüber der Einfallsrichtung des Photons erteilt, während das Photon mit der Energie $h\nu'$ unter dem Winkel ϑ_γ gestreut wird. Es werde angenommen, dass sich das Elektron vor dem Stoss in Ruhe befunden habe. Dann sind die drei Impulsvektoren $\frac{h\nu}{c}$, $\frac{h\nu'}{c}$ und $\vec{p}$ komplanar (Fig. 3.12).

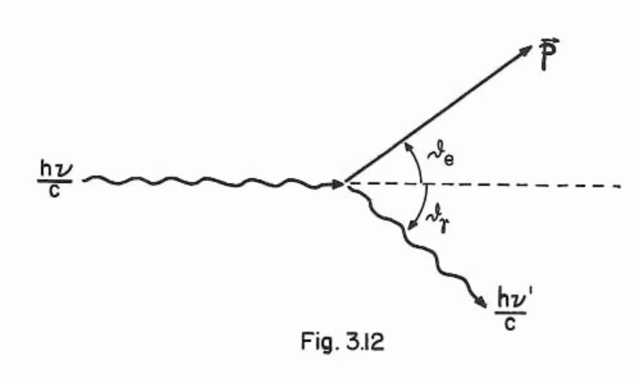


Fig. 3.12

Der Impulserhaltungssatz ergibt für die Impulskomponenten parallel und senkrecht zur Einfallsrichtung

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\vartheta_\gamma + p\cos\vartheta_e \qquad (3.16)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\vartheta_\gamma - p\sin\vartheta_e \qquad (3.17)$$

und der Energiesatz

$$h\nu = h\nu' + T \; . \qquad (3.18)$$

Zwischen den relativistischen Grössen p und T besteht die Beziehung (s. Anh. A):

$$pc = \sqrt{T\,(T + 2\,m_e c^2)}\,. \qquad (3.19)$$

Daraus folgen einige allgemeingültige Beziehungen über Energie- und Winkelgrössen:

(a) Für das gestreute Quant gilt unabhängig von der Energie des einfallenden Photons die COMPTON-VERSCHIEBUNG (COMPTON-SHIFT)

$$\boxed{\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \lambda_c\,(1 - \cos\vartheta_\gamma)}\,. \qquad (3.20)$$

λ, λ' sind die Wellenlängen des einfallenden und des gestreuten Photons und $\lambda_c \equiv \frac{h}{m_e c}$ die COMPTON-WELLENLÄNGE des Elektrons.

Ferner gilt für die Energie des gestreuten Photons die Winkelbeziehung

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{1}{1 + \varepsilon\,(1 - \cos\vartheta_\gamma)}\,. \qquad \left(\varepsilon \equiv \frac{h\nu}{m_e c^2}\right) \qquad (3.21)$$

Für $\vartheta_\gamma = 0$ ist $\nu' = \nu$ bei allen Werten der "reduzierten" γ -Energie ε. In Vorwärtsrichtung findet nur elastische Streuung statt.

(3.21) stellt eine Ellipse dar, die umso exzentrischer ist, je grösser ε. Für den Fall $\varepsilon \ll 1$ wird $\nu' \approx \nu$ für alle Winkel ϑ_γ, also findet auch bei kleinen γ -Energien nur elastische Streuung statt, und (3.21) nähert sich einem Kreis.

(b) Die Energie des Elektrons ist

$$T = h\nu - h\nu'\,. \qquad (3.22)$$

Sie lässt sich als Funktion von ϑ_γ oder ϑ_e darstellen:

$$T = h\nu \cdot \frac{\varepsilon\,(1 - \cos\vartheta_\gamma)}{1 + \varepsilon\,(1 - \cos\vartheta_\gamma)} \qquad (3.23)$$

$$T = h\nu \cdot \frac{2\varepsilon\,\cos^2\vartheta_e}{(1+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta_e}\,. \qquad (3.24)$$

(c) Zwischen den Winkeln ϑ_e und ϑ_γ besteht die Beziehung

$$\operatorname{ctg}\vartheta_e = (1 + \varepsilon)\,\operatorname{tg}\frac{\vartheta_\gamma}{2}\,. \qquad (3.25)$$

(d) Die maximale Energieübertragung ist

$$T_{max} = \frac{h\nu}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}} \qquad (3.26)$$

Dabei ist $\vartheta_e = 0$ und $\vartheta_\gamma = 180^\circ$, d.h. das Elektron wird nach vorn und das Photon nach hinten gestreut.

3.5.1 Klein-Nishina Formel

Die klassische Behandlung der inelastischen Streuung einer elektromagnetischen Welle gilt nur für $\varepsilon \ll 1$. Für höhere Photonenenergien ist eine relativistische, quantenmechanische Berechnung erforderlich. Klein und Nishina haben 1928 aus der Dirac-Gleichung den Compton-Wirkungsquerschnitt abgeleitet. Er lautet (s. Heitler, Quantum Theory of Radiation 1954, p. 217):

$$\boxed{\frac{d_e\sigma}{d\,\Omega_\gamma} = \frac{1}{4}\, r_0^2 \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - 2 + 4\cos^2\theta\right)} \quad . \qquad (3.27)$$

$\frac{d_e\sigma}{d\Omega_\gamma}$ ist der differentielle, auf ein Elektron bezogene Stossquerschnitt für eine linear polarisierte einfallende elektromagnetische Welle der Frequenz ν. r_0 ist der klassische Elektronenradius, ν' die Frequenz des in den Raumwinkel $d\,\Omega_\gamma$ gestreuten Strahls und θ der Winkel zwischen den elektrischen Vektoren der einfallenden und gestreuten Welle $\vec{E}$ und $\vec{E}'$.

Bei der inelastischen Streuung ist es wichtig, die in der Definition des Wirkungsquerschnittes (2.11) verglichenen Grössen genau zu beachten. In dieser Hinsicht besteht zwischen Stoss- und Streuquerschnitt ein wesentlicher Unterschied. Der STOSSQUERSCHNITT σ_c (COLLISION CROSS SECTION) entspricht der Wahrscheinlichkeit eines Stosses, wobei aus dem kollimierten einfallenden Strahl ein Photon der Energie $h\nu$ verloren geht. σ_c bezieht sich also auf die Energie, um die der Primärstrahl geschwächt wird, und diese ist, wenn der Primärstrahl als monochromatisch angenommen wird, proportional der Zahl der Compton-Stösse. Der STREUQUERSCHNITT σ_s (SCATTERING CROSS SECTION) bezieht sich indessen auf die gestreute γ-Energie, die um den Faktor $\frac{h\nu'}{h\nu}$ kleiner ist. Also besteht zwischen σ_c und σ_s die Beziehung

$$\sigma_s = \frac{h\nu'}{h\nu} \cdot \sigma_c \quad . \qquad (3.28)$$

Zur Beschreibung der Zahl der gestreuten Photonen ist wiederum der Stossquerschnitt massgebend.

Die restliche, den Elektronen übertragene Energie ist

$$T = h\nu - h\nu' \qquad (3.29)$$

und der entsprechende Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_a = \sigma_c - \sigma_s \quad . \qquad (3.30)$$

σ_a kann insofern als ABSORPTIONSQUERSCHNITT bezeichnet werden, als die kinetische Energie der Elektronen durch weitere inelastische Stösse und Ionisierungen im Material aufgezehrt wird. Alle in dem streuenden Material selbst nachweisbaren physikalischen Effekte rühren von diesem Anteil her. Sie sind von Bedeutung für die Wilsonkammer, den Proportionalzähler, in Photoplatten, bei biologischen Effekten etc.

3.5.2 Winkelverteilungen

Die Winkelverteilung des gestreuten Strahls ist u.a. eine Funktion seiner Polarisation gegenüber der des einfallenden Strahles. Für den experimentellen Nachweis ist es zweckmässig, anstelle des Winkels θ neue Winkel einzuführen: Die Ebene, die durch die drei Impulsvektoren $\frac{h\nu}{c}$, $\frac{h\nu'}{c}$ und $\vec{p}$ aufgespannt wird, werde die STREU-EBENE genannt, und ϕ sei der Winkel der Streuebene gegen die Polarisationsebene des einfallenden Strahls (Fig. 3.13).

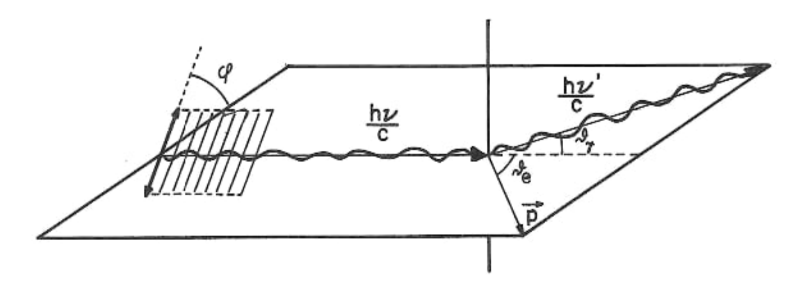


Fig. 3.13

Nach wie vor sei ϑ_γ der Winkel zwischen den Impulsrichtungen des einfallenden und des gestreuten Strahls. Nach Mittelung über alle Polarisationsrichtungen des gestreuten Strahls wird aus (3.27):

$$d_e\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \, d\Omega_\gamma \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - 2\sin^2\vartheta_\gamma \cos^2\phi\right). \qquad (3.31)$$

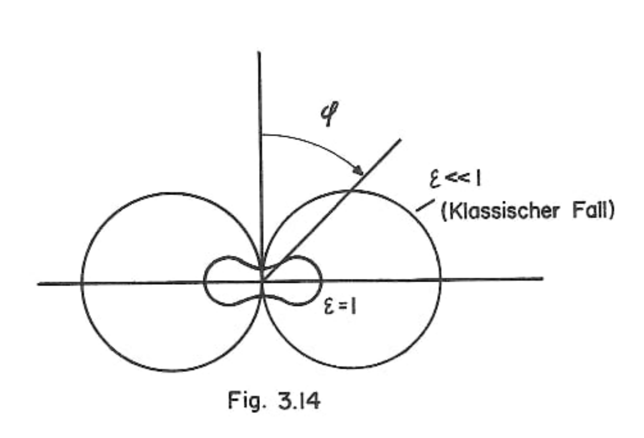


Fig. 3.14

Bei festem ϑ_γ ist die Zahl der gestreuten Photonen eine Funktion des Winkels ϕ. Für $\vartheta_\gamma = 90^\circ$ ist sie in Fig. 3.14 dargestellt.

Unter Ausnutzung dieser Charakteristik lässt sich die Polarisation von γ-Strahlen messen. Bei kleinen Energien ($\varepsilon \ll 1$) besteht die maximale ϕ-Asymmetrie bei $\vartheta_\gamma = 90^\circ$, während bei höheren Energien die Vorwärtsstreuung bevorzugt wird und sich dabei die maximale ϕ-Asymmetrie auch zu kleineren Winkeln ϑ_γ hin verschiebt.

Für einen unpolarisierten einfallenden Strahl gilt folgende, von ϕ unabhängige Winkelverteilung, die sich durch Integration von (3.31) über alle ϕ ergibt:

$$d_e\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \, d\Omega_\gamma \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - \sin^2\vartheta_\gamma\right). \qquad (3.32)$$

Dadurch, dass $\frac{\nu'}{\nu}$ nochmals die Winkelgrösse ϑ_γ enthält (3.21), ist $d_e\sigma$ eine komplizierte Funktion von ϑ_γ. Fig. 3.15 zeigt diese Funktion in Abhängigkeit des Parameters ε . -

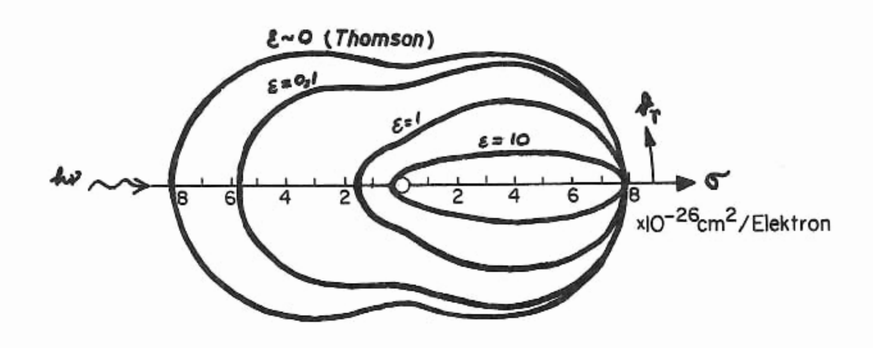


Fig. 3.15

Um die Winkelverteilung der Elektronen zu erhalten, muss man den Stossquerschnitt für die Photonen, die in das Raumwinkelelement $d\Omega_\gamma$ unter dem Winkel ϑ_γ gestreut werden, mit Hilfe von

$$\frac{d_e\sigma}{d\Omega_e} = \frac{d_e\sigma}{d\Omega_\gamma} \cdot \frac{d\Omega_\gamma}{d\Omega_e} \qquad (3.33)$$

umrechnen auf den Stossquerschnitt für die Elektronen, die in das Raumwinkelelement $d\Omega_e$ unter dem Winkel ϑ_e gestreut werden. Dabei ist

$$\frac{d\Omega_\gamma}{d\Omega_e} = \frac{(1+\varepsilon)^2(1-\cos\vartheta_\gamma)^2}{\cos^3\vartheta_e} \quad . \qquad (3.34)$$

Die Funktion $\frac{d_e\sigma}{d\Omega_e}$ ist in Fig. 3.16 dargestellt.

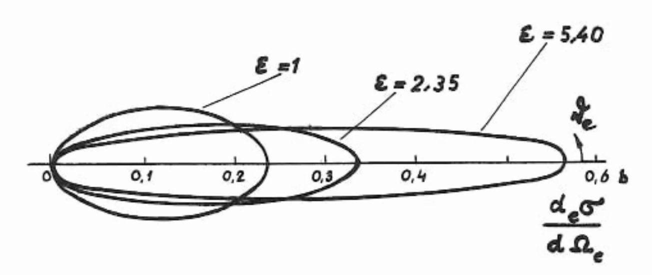


Fig. 3.16

3.5.3 Energieverteilungen

Die totalen Wirkungsquerschnitte ergeben sich durch Integration über den ganzen Raumwinkel:

$$ {}_e\sigma_c = 2\pi r_o^2 \left\{ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\frac{2(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1+2\varepsilon) \right] + \frac{1}{2\varepsilon} \ln(1+2\varepsilon) - \frac{1+3\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2} \right\} \quad (3.35) $$

$$ {}_e\sigma_s = \pi r_o^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon^3} \ln(1+2\varepsilon) + \frac{2(1+\varepsilon)(2\varepsilon^2-2\varepsilon-1)}{\varepsilon^2(1+2\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{3(1+2\varepsilon)^3} \right\} . \quad (3.36) $$

Der Absorptionsquerschnitt wird durch Differenzbildung

$$ {}_e\sigma_a = {}_e\sigma_c - {}_e\sigma_s \quad (3.37) $$

gewonnen. Diese drei Wirkungsquerschnitte für Stoss, Streuung und Absorption sind in Fig. 3.17 als Funktionen von ε dargestellt.

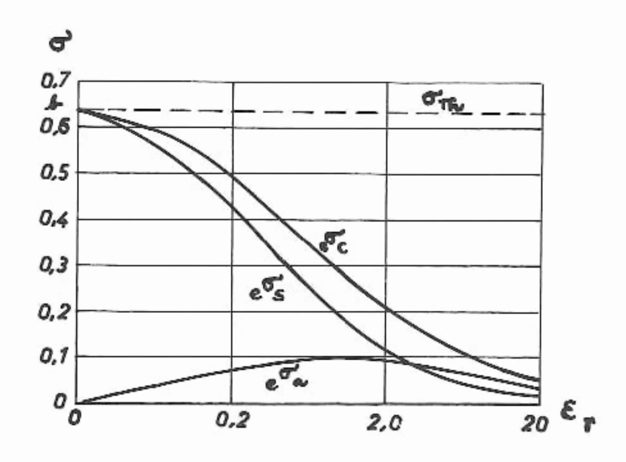


Fig. 3.17

Bei kleinen Energien herrscht die elastische Streuung vor. ${}_e\sigma_c$ und ${}_e\sigma_s$ werden für $\varepsilon \ll 1$ einander gleich und stimmen mit dem klassischen Wert des Thomson-Querschnittes überein. Das Maximum von ${}_e\sigma_a$ liegt bei $\varepsilon = 1$.

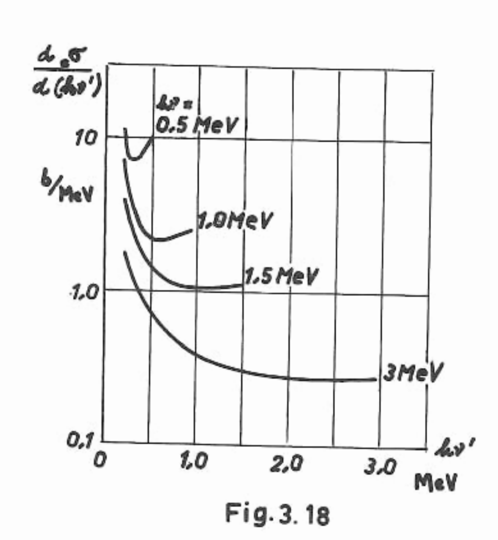


Fig. 3.18

Ferner sind die Energiespektren der gestreuten Photonen und der Rückstosselektronen von Interesse. Die Energieverteilung der gestreuten Photonen $\frac{d_e\sigma}{d(h\nu')}$, gewinnt man durch Einsetzen von (3.21) in (3.32) und anschliessende Differentiation. Die Funktion $\frac{d_e\sigma}{d(h\nu')}$ ist in Fig. 3.18 dargestellt.

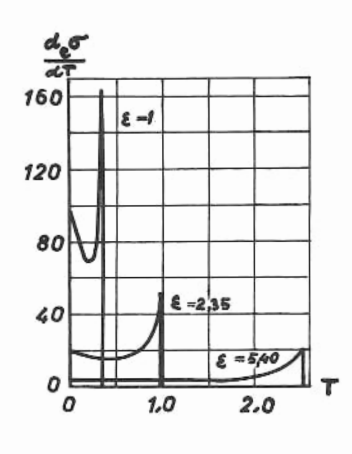


Fig. 3.19

Die Energieverteilung der Rückstosselektronen

$$\frac{d_e\sigma}{dT} = \frac{d_e\sigma}{d\vartheta_e} \cdot \frac{d\vartheta_e}{dT} \qquad (3.38)$$

ist durch getrennte Differentiation ebenfalls aus (3.24), (3.25) und (3.32) zu gewinnen. Die Funktion $\frac{d_e\sigma}{dT}$ ist in Fig. 3.19 gezeigt.

3.5.4 Wirkungsquerschnitt pro Atom

Die Umrechnung der Compton-Wirkungsquerschnitte pro Elektron auf diejenigen pro Atom gemäss

$$_a\sigma = Z \cdot {}_e\sigma \qquad (3.39)$$

ist nur für hohe Energien $h\nu$ möglich, wo die Bindungsenergien der Elektronen vernachlässigt werden können. Bei kleineren Photonenenergien müssen die Verteilungen und Impulse der Elektronen im Atom berücksichtigt werden. Es bestehen zwischen diesen bestimmte Phasenbeziehungen. Bei $h\nu = h\nu'$ ist die Streuung kohärent; es sind dann die Amplituden der Streuung - und nicht deren Intensitäten - für jedes einzelne Atomelektron zu addieren. Bei $h\nu' < h\nu$ ist die Streuung inkohärent; dann sind die Intensitäten zu addieren. Der Compton-Wirkungsquerschnitt kann dann als Summe eines kohärenten und eines inkohärenten Anteils

$$d\,{}_a\sigma = d\,{}_a\sigma_{koh.} + d\,{}_a\sigma_{inkoh.} \qquad (3.40)$$

dargestellt werden.

3.6 Paarerzeugung

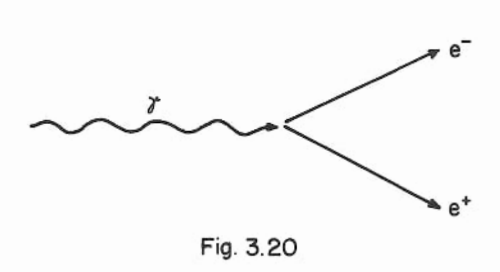


Fig. 3.20

Wenn die γ-Energie $h\nu$ grösser als die doppelte Ruheenergie des Elektrons $2m_ec^2 = 1,02$ MeV ist, so kann das γ-Quant unter gleichzeitiger Bildung eines Elektrons und eines Positrons vernichtet werden. Die überschüssige Energie übernehmen die erzeugten Teilchen als kinetische Energie.

Der Prozess der Paarerzeugung ist nur in Gegenwart eines Stosspartners möglich, da in dem System Photon-Teilchenpaar die Erhaltungssätze für Energie und Impuls nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Die relativistischen Ausdrücke für Impuls und Energie lauten für

das Photon

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad ; \quad E = h\nu \tag{3.41}$$

und für das Teilchenpaar (s. Anh. A)

$$p' = 2\gamma m_e v \; ; \quad E' = 2\gamma m_e c^2 \tag{3.42}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c} \; . \tag{3.43}$$

Aus der Energieerhaltung E = E' folgt

$$h\nu = 2\gamma m_e c^2 = p' \cdot \frac{c^2}{v} \tag{3.44}$$

und

$$p' = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{v}{c} = \beta p \; , \tag{3.45}$$

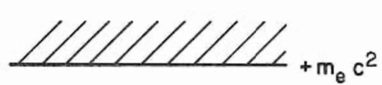
also

$$p' < p \tag{3.46}$$

d. h. das Photon besitzt einen Impulsüberschuss, der von einem Stosspartner als Rückstoss aufgenommen werden muss.

Als Stosspartner kann ein Kern oder ein Elektron dienen. Während die Energie, die der Stosspartner übernimmt, im Fall des Kernes infolge seiner grossen Masse verschwindend klein sein kann, ist der Rückstoss des Elektrons mit einer grossen Energieübernahme verknüpft; im Falle des Elektrons ist die Schwellenenergie für Paarerzeugung $4\, m_e c^2$.

Es fiel zuerst auf, dass die Wechselwirkung von Photonen hoher Energie bei hohem Z viel grösser ist, als nach den Photo- oder Compton-Effekt zu erwarten wäre. 1933 wurden von Anderson und Neddermeyer Elektron-Positronpaare identifiziert und 1933 gelang es Oppenheimer, die Paarerzeugung mit Hilfe der Dirac'schen Theorie des Elektrons zu deuten (s. Anh. C).



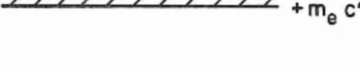


Fig. 3.21

Die Dirac-Gleichung ergibt als Eigenwerte für das freie Elektron sowohl positive als auch negative Energien:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + (m_e c^2)^2} \; . \tag{3.47}$$

Diese Werte erstrecken sich von $-\infty$ bis $-m_e c^2$ und von $+m_e c^2$ bis $+\infty$. Dazwischen liegt eine Barriere der Breite $2\, m_e c^2$ (Fig. 3.21).

Nach klassischen Gesichtspunkten könnte das Elektron diesen Bereich nicht durchqueren, quantenmechanisch besteht jedoch eine Übergangswahrscheinlichkeit.

Für das im negativen Bereich befindliche Elektron ergeben sich paradoxe Eigenschaften, zu deren Überwindung Dirac folgende Hypothese vorschlug: Im Grundzustand nehmen die Elektronen die tiefsten Zustände ein, wobei für die Besetzungsmöglichkeiten das Pauli-Prinzip massgebend ist. Der Bereich der negativen Eigenwerte wird als

lückenlos mit Elektronen ausgefüllt angenommen, die infolgedessen nicht wahrgenommen werden *). Wahrnehmbar dagegen sind die im positiven, nicht lückenlos besetzten Kontinuum befindlichen Elektronen. Übergänge vom positiven in den negativen Bereich finden deswegen nicht statt, weil ein Elektron dort keinen Platz finden kann. Übergänge von dem unteren in den oberen Bereich sind nicht in dieser Weise eingeschränkt.

Trifft nun ein γ-Quant hinreichender Energie ein Elektron im Zustand negativer Energie und hebt es auf einen positiven Energiewert, so werden dieses Elektron und seine "Lücke" im Untergrund wahrnehmbar. Diese "Lücke" - ein POSITRON - benimmt sich wie ein Elektron mit positiver Ladung (und positiver Masse).

Der Wirkungsquerschnitt für die Entstehung eines Paares, wobei T_+ die kinetische Energie des Positrons und $T_- = h\nu - 2m_ec^2 - T_+$ die kinetische Energie des Elektrons ist, errechnet sich zu

$$d\mathcal{K} = \sigma_0 \, Z^2 P \, . \, \frac{dT_+}{h\nu - 2m_ec^2} \, . \qquad (3.48)$$

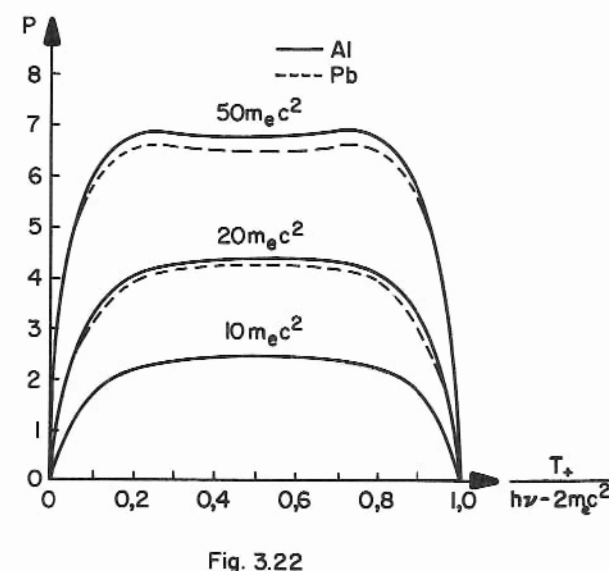


Fig. 3.22

Hierin ist $\sigma_0 \equiv \frac{1}{137} r_0^2$ (r_0 ist der klassischer Elektronenradius) und P eine dimensionslose, komplizierte Funktion von $h\nu$ und Z, die die Energieverteilung der erzeugten Teilchen angibt (Fig. 3.22).

Der <u>totale Wirkungsquerschnitt</u> für <u>Paarerzeugung</u> ist

$$\mathcal{K} = \int d\mathcal{K} = \sigma_0 Z^2 \int_0^1 P \, . \, d\left(\frac{T_+}{h\nu - 2m_ec^2}\right)$$

$$\equiv \sigma_0 Z^2 . \, \overline{P} \, . \qquad (3.49)$$

Die Berechnung ist nur im hohen relativistischen Energiebereich durchführbar, denn für kleine γ-Energien verlieren die angenäherten Wellenfunktionen ihre Gültigkeit.

Für die γ-Energien $h\nu \gg m_ec^2$ sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Für verhältnismässig kleine γ-Energien, $h\nu \ll m_ec^2 . \frac{137}{Z^{1/3}}$ findet die Paarerzeugung in der Nähe des Kernes statt und die Abschirmung des Coulomb-Feldes eZ durch die Hüllenelektronen ist vernachlässigbar. Dann gilt

$$\mathcal{K} = \sigma_0 Z^2 \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{m_ec^2} - \frac{218}{27} \right). \qquad (3.50)$$

Der Mittelwert $\overline{P}$ in (3.49) ist hier näherungsweise proportional $\ln h\nu$.

---

*) Für die Existenz dieses Elektronenuntergrundes spricht eine Reihe von Evidenzen, z.B. die Polarisation des Vakuums und das anomale magnetische Moment des Elektrons.

(ii) Mit zunehmender γ-Energie kann die Paarerzeugung auch ausserhalb der K-Schale stattfinden; die Abschirmung der Kernladung wird dann wesentlich. Im extrem relativistischen Fall, $h\nu \gg m_e c^2 \cdot \frac{137}{Z^{1/3}}$ gilt bei vollständiger Abschirmung

$$\mathcal{K} = \sigma_0 Z^2 \left[\frac{28}{9} \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) - \frac{2}{27} \right] \qquad (3.51)$$

$\mathcal{K}$ ist dann unabhängig von der γ-Energie und hängt nur von Z ab. Der Einfluss der Abschirmung, gegeben durch den logarithmischen Term in (3.51), ist aus Fig. 3.23 ersichtlich. -

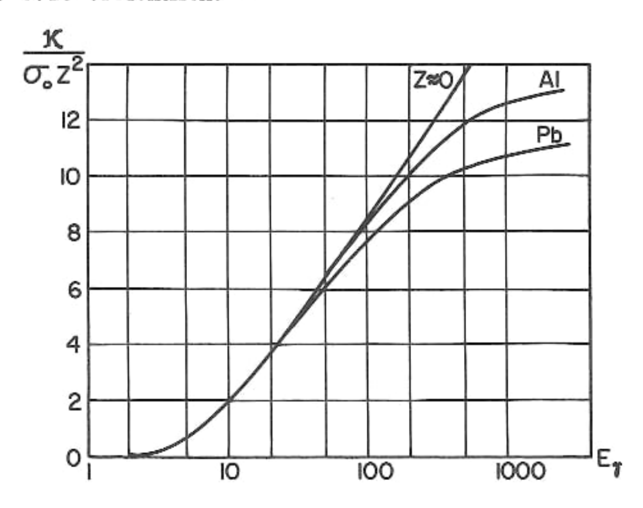


Fig. 3.23

Daneben findet Paarerzeugung auch an Atomelektronen statt. Der Wirkungsquerschnitt für ein einzelnes Elektron

$$\mathcal{K}^{(el)} = \sigma_0 \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} - 11,3 \right) \qquad (3.52)$$

ist dem in (3.50) sehr ähnlich. Anstelle des additiven Termes 11,3 (der allerdings etwas unsicher ist) stand dort $\frac{218}{27} = 8,1$. Erhebliche Schwierigkeiten für die Berechnung bereitete jedoch die Berücksichtigung der Coulomb-Abschirmung der Elektronen untereinander.

Bei kleinen γ-Energien ist der Anteil der Paarerzeugung an Atomelektronen gering.

3.7 Annihilation

Das Positron wird in der Dirac'schen Theorie als Lücke im Elektronenuntergrund beschrieben. Diese Lücke kann dadurch wieder aufgefüllt werden, dass ein Elektron aus dem positiven Energiebereich dort hineinspringt. Dabei wird ein Energiebetrag $T_+ + T_- + 2\,m_e c^2$ als γ-Energie emittiert, und die beiden Teilchen verschwinden. Dieser Prozess wird als ZERSTRAHLUNG bzw. ANNIHILATION bezeichnet.

Für die Erhaltung des Impulses ist ohne Gegenwart eines Stosspartners die Emission von mindestens zwei γ-Quanten erforderlich. Die grösste Wahrscheinlichkeit besitzen Übergänge vom unteren Rand des positiven Kontinuums zum oberen Rand

des negativen Kontinuums. In diesem Fall ist T_+, $T_- \ll m_e c^2$; es werden zwei γ -Quanten von je 0,51 MeV unter 180° zueinander ausgesandt.

Die Annihilation unter Emission eines γ-Quants allein findet wegen Impulserhaltung nur in der Nähe eines Kerns statt.

Ferner existiert die Annihilation unter Emission von drei γ -Quanten. Das Spektrum dieser γ -Quanten ist kontinuierlich. -

Abgebremste Positronen könen mit Elektronen einen metastabilen Zustand bilden. Dieses "Quasi-Wasserstoffatom" mit einem Positron anstelle eines Protons heisst POSITRONIUM. Das Termschema der angeregten Zustände dieses Systems ist dem des normalen Wasserstoffatoms ganz analog, nur mit einer entsprechend reduzierten Rydberg-Konstanten. Es gibt zwei Grundzustände, die sich durch Parallel- bzw. Antiparallelstellung der beiden Spins unterscheiden. Der Zustand mit parallelen Spins heisst ORTHOPOSITRONIUM, der mit antiparallelen Spins PARAPOSITRONIUM. Aus einfachen Überlegungen über die Erhaltung des Drehimpulses geht hervor, dass Orthopositronium unter Emission von drei Quanten und Parapositronium unter Emission von zwei Quanten zerfällt. Im ersten Fall ist die mittlere Lebensdauer ($\tau \cong 1,4 \cdot 10^{-7}$ sec) wesentlich grösser als im zweiten ($\tau \cong 1,25 \cdot 10^{-10}$ sec).

3.8 Totaler Absorptionsquerschnitt μ

Beim Durchgang eines γ-Strahles durch eine Materieschicht überlagern sich die drei beschriebenen Effekte. Die Abhängigkeit von der γ -Energie und von Z ist bei allen drei Effekten verschieden.

Die Energieabhängigkeit der Absorptions-Wirkungsquerschnitte für Photoeffekt (τ), Compton-Effekt (σ), sowie Paarerzeugung (κ) und ihre Zusammensetzung zum TOTALEN ABSORPTIONS-WIRKUNGS-QUERSCHNITT

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa \qquad (3.53)$$

ist in Fig. 3.24 skizziert. Der Photoeffekt geht etwa mit ν^{-3} und nimmt für kleine Energien sehr grosse Werte an, der Compton-Effekt fällt ebenfalls zu mittleren Energien hin monoton ab, während die Paarerzeugung bei $m_e c^2$ beginnend, als einzige mit log hν ansteigt.

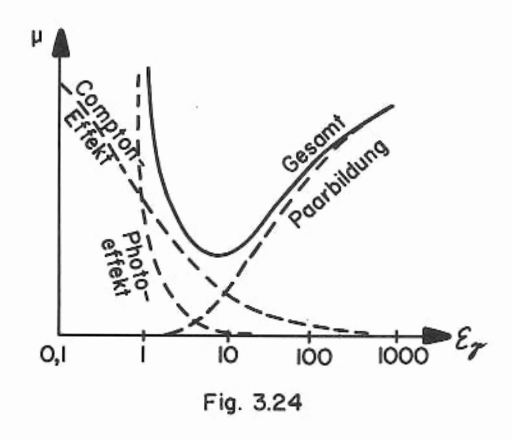


Fig. 3.24

Die Z-Abhängigkeit ist wie folgt: Der Photoeffekt geht mit Z^4 bis Z^5, der Compton-Effekt bei nicht zu kleinen Energien mit Z und die Paarerzeugung etwa mit Z^2.

Demzufolge überwiegt die Paarerzeugung bei hohen Energien und hohen Z, der Compton-Effekt bei mittleren Energien und leichten Kernen und der Photoeffekt bei kleinen Energien und hohem Z (Fig. 3.25).

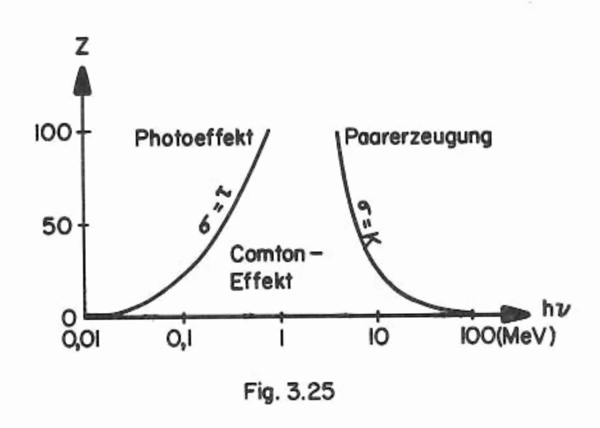


Fig. 3.25

Bei schweren Elementen durchläuft μ ein Minimum (Fig. 3.24), bei leichten fällt es monoton mit zunehmender Energie ab, weil der Gang des Compton-Effektes den der Paarerzeugung dann überwiegt. Etwa bei Kupfer (Z = 29) heben sich diese beiden Einflüsse auf und μ ist über einen grossen Energiebereich oberhalb 6 MeV ziemlich gut konstant.

In Fig. 3.26 - 3.28 ist der Verlauf der MASSEN-SCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN $\frac{\mu}{\rho}$ für einige experimentell wichtige Stoffe wiedergegeben.

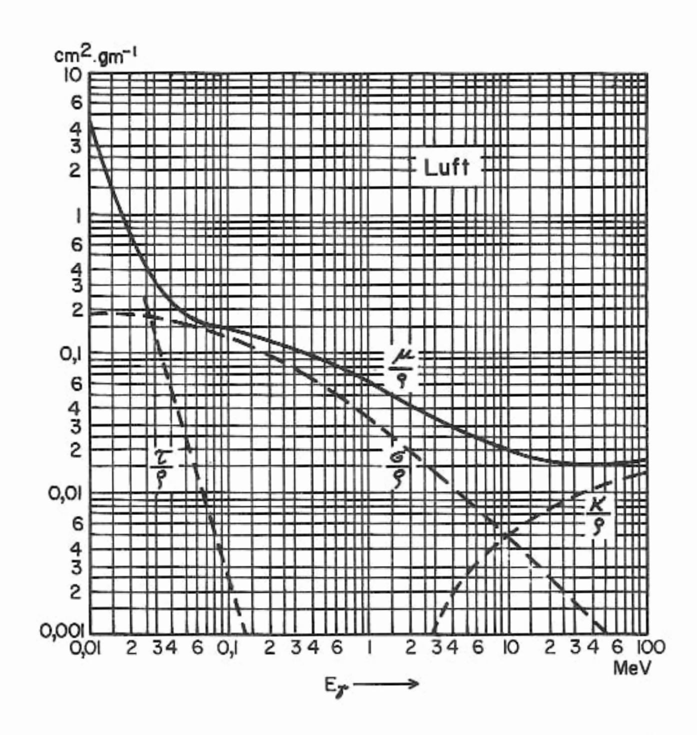


Fig. 3.26

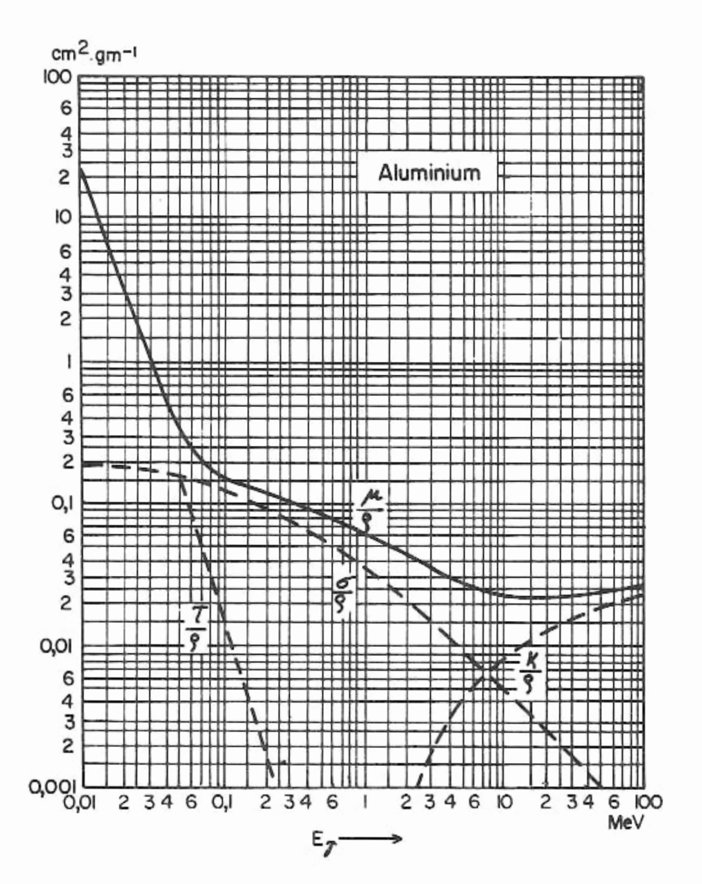


Fig. 3.27

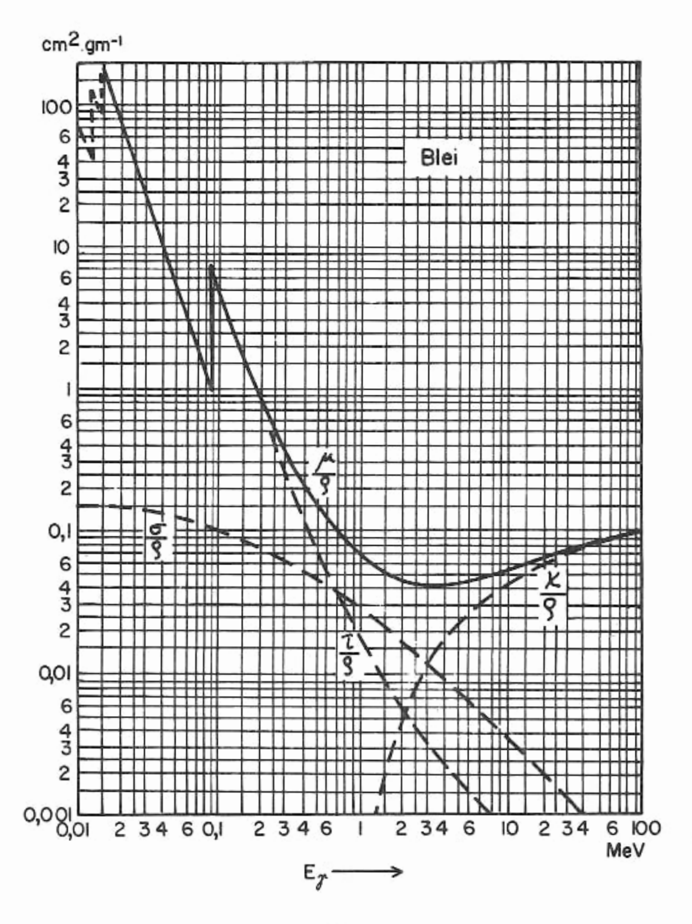


Fig. 3.28

4. WECHSELWIRKUNG GELADENER TEILCHEN MIT MATERIE

4.1 Wechselwirkungsprozesse

Die Wechselwirkungen von schnellen geladenen Teilchen beim Durchgang durch materieerfüllten Raum lassen sich, wenn man von Kernreaktionen und Wechselwirkungen mit Kernkräften generell absieht, in folgende vier Klassen einteilen:

(a) Elastische Zusammenstösse mit Atomelektronen

(b) Inelastische Zusammenstösse mit Atomelektronen

(c) Elastische Zusammenstösse mit Kernen

(d) Inelastische Zusammenstösse mit Kernen .

Im Prinzip können alle diese Wechselwirkungen beteiligt sein; durch sie werden die einfallenden Teilchen abgelenkt und abgebremst; die Zahl der Stösse für Teilchen mit Energien von der Grössenordnung MeV beträgt über 10 000; es handelt sich also um Vielfachstreuung, die sich statistisch in verschiedener Weise aus den Einzelprozessen (a) bis (d) zusammensetzt.

Der Prozess (a) findet praktisch nur bei sehr kleinen Teilchenenergien $\lesssim$ 100 eV statt (Ramsauer-Effekt) und ist für die folgenden Betrachtungen gänzlich vernachlässigbar. Hingegen stellt (b) den hauptsächlichen Prozess dar, durch den die einfallenden Teilchen ihre kinetische Energie im Absorber verlieren. Dabei werden Atomelektronen auf angeregte Energiezustände gehoben, und in der überwiegenden Zahl der Fälle wird ihnen hinreichend Energie übertragen, um die Atome in dem Absorber zu ionisieren.

Elastische Zusammenstösse mit Kernen (c) sind für schwere einfallende Teilchen (Mesonen, Protonen, Deuteronen, α-Teilchen, ...) im Vergleich zu (b) selten, für einfallende leichte Teilchen (Elektronen, Positronen) jedoch viel häufiger. Inelastische Streuung an Kernen (d) ist im Vergleich zur elastischen selten, sie ist also für die Bremsung schwerer Teilchen vernachlässigbar; bei der Bremsung von leichten Teilchen ist sie jedoch bei hohen Energien von Bedeutung. Bei solchen Prozessen wird in einer gewissen Zahl von Fällen die Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung als BREMSSTRAHLUNG emittiert (s. Abschn. 4.4). In seltenen Fällen kann durch schwere Teilchen auch eine Anregung des Kernes stattfinden (COULOMB-ANREGUNG).

Es ergeben sich also charakteristische Unterschiede für die Bremsung schwerer oder leichter Teilchen. Anstelle einer ausführlichen Diskussion der Theorien (s. Flügge, Handbuch der Physik 1958, Bd. 34 oder Bethe und Ashkin in Segrè, "Experimental Nuclear Physics" 1953, Vol. I, 166), wird im Folgenden nur eine qualitative Darstellung und eine Reihe von empirischen Beziehungen angegeben.

Der Nachweis von Teilchen in Detektoren geschieht letztlich nur über die Ionisationswirkungen, die sie hervorrufen. Es ist noch zu bemerken, dass die biologische Strahlenschädigung allein auf der ionisierenden Wirkung von schnellen Teilchen oder elektromagnetischer Strahlung beruht, wobei die absorbierte Energie ein Mass für die Schädigung ist.

4.2 Bremsung schwerer Teilchen

4.2.1 Bremsvermögen

Bei der inelastischen Streuung an Hüllenelektronen werden die Atome angeregt oder ionisiert, wobei der letztere Prozess überwiegt. Dabei verlieren die einfallenden Teilchen kinetische Energie; der Energieverlust pro Weglänge ergibt sich zu

$$-\frac{dE}{ds} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \cdot N^{\square} . B \qquad (4.1)$$

Dieses wird als BREMSVERMÖGEN (STOPPING POWER) bezeichnet. Hierin bedeuten:

z = Ladungszahl des schnellen Teilchens

v = Teilchengeschwindigkeit

$N^{\square}$ = Anzahl der Kerne pro cm^3 im Absorber .

Die BREMSZAHL (ATOMIC STOPPING NUMBER) B ist eine Funktion, die von der Energie des einfallenden Teilchens abhängt, und je nach Modell verschiedene Ausdrücke ergibt.

Im klassischen Fall ergibt sich bei Streuung schwerer Teilchen an freien Elektronen

$$B = \int \frac{db}{b} . \qquad (4.2)$$

Dieses Integral über den STOSSPARAMETER b, der als kleinster Abstand entlang einer Bahn vom Streupartner definiert ist, divergiert wenn man die Grenzen von $b = b_{min}$ bis $b = \infty$ erstreckt.

Diese Divergenz rührt von der grossen Zahl der Stösse bei grossem b her. Bei diesen kann nur sehr wenig Energie übertragen werden. Da die Atomelektronen aber tatsächlich nicht frei sind, sondern nur gewisse Mindestenergiebeträge aufnehmen können, sind diese Stösse quantenmechanisch wirkungslos. Es geht also darum, den Stossparameter in geeigneter Weise abzuschneiden. Einfaches Abschneiden an der Stelle, wo mindestens die Ionisationsenergie übertragen wird, indem das Elektron bei kleinem b als total frei und von dieser Grenze an als total gebunden angesehen wird, führt noch zu keinen nennenswert guten Resultaten. Geeignete Begrenzung des Stossparameters bedeutet also Berücksichtigung des Elektronenzustandes im Atom. Daraus geht die Notwendigkeit quantenmechanischer Behandlung hervor.

Für hohe Geschossenergien sind ferner relativistische Effekte zu berücksichtigen. Unter diesen Voraussetzungen berechnete Bethe die Bremszahl für ein schweres Teilchen zu

$$B = Z \left[\ln \frac{2 m_e v^2}{I} - \ln (1-\beta^2) - \beta^2 - \frac{C_K}{Z} \right] \qquad (4.3)$$

wobei Z die Kernladung des Absorbers, $\beta = v/c$ und

$$I = 11,5 \cdot Z \quad (eV) \qquad (4.4)$$

das MITTLERE IONISATIONSPOTENTIAL ist. C_K ist ein von E und Z abhängiger Korrektur-

faktor, der nur bei relativ kleinen Energien, beispielsweise unterhalb 4 MeV für Protonen in Al, zu berücksichtigen ist. Seine Werte liegen zwischen 0 und etwa 1.

Also folgt aus (4.1) für das Bremsvermögen

$$- \frac{dE}{ds} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \cdot N^0 Z \left[\ln \frac{2 m_e v^2}{I} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2 - \frac{C_K}{Z} \right]. \qquad (4.5)$$

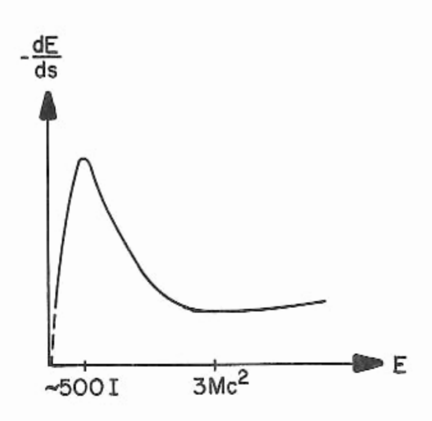


Fig. 4.1

Der in Fig. 4.1 skizzierte Verlauf von (4.5) lässt sich qualitativ folgendermassen verstehen: In dem mittleren Bereich $I \ll E \ll Mc^2$ variiert der logarithmische Term nur wenig und die relativistischen Terme sind vernachlässigbar, so dass dort näherungsweise

$$- \frac{dE}{ds} \sim \frac{1}{E} \qquad (4.6)$$

gilt. Bei hohen Geschwindigkeiten indessen bewirken die relativistischen Terme zusammen mit dem logarithmischen einen leichten Anstieg. So ergibt sich bei $E \approx 3Mc^2$ ein flaches Minimum. Für kleine Energien hingegen gewinnt der logarithmische Term an Bedeutung und die Kurve fällt unterhalb $E \sim 500\, I$ steil ab. -

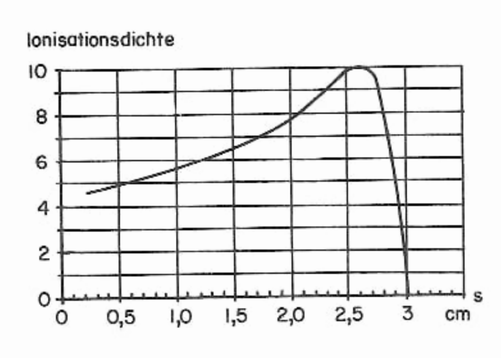


Fig. 4.2

Daraus ergibt sich für die Ionisationsdichte, die von dem abgebremsten Teilchen in dem Absorber hinterlassen wird, folgender Verlauf über dem zurückgelegten Weg s (Fig. 4.2). Sie steigt kurz vor dem Ende der Bahn merklich an und fällt danach steil ab.

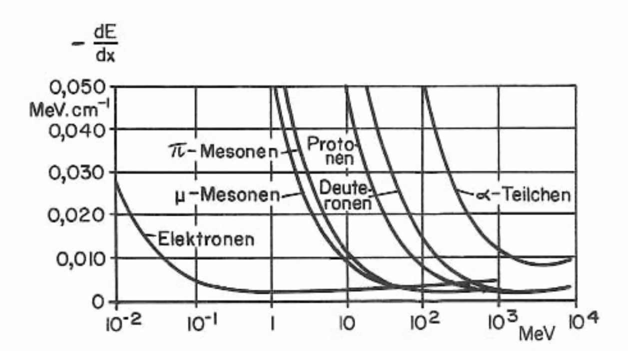


Fig. 4.3

Bezieht man das Bremsvermögen (4.5) auf verschiedene einfallende Teilchen, dann ergibt sich durch $\frac{1}{v^2}$ im ersten Term eine Streckung in der Energieskala; der Verlauf des Bremsvermögens für verschiedene Teilchen in Luft ist in Fig. 4.3 wiedergegeben.

4.2.2 Relatives Bremsvermögen

Die Ionisationsverluste $-\frac{dE}{ds}$ sind der Anzahl n der Hüllenelektronen pro cm^3 proportional, die gleich dem Produkt der Ordnungszahl Z des Absorbers und der Anzahl N^a der Kerne pro cm^3 ist:

$$\boxed{n = Z \cdot N^a = Z \cdot \frac{L}{A} \rho} \qquad (4.7)$$

wobei: L = $6,023 \cdot 10^{23}$ Loschmidt'sche Zahl

ρ = Dichte des Absorbers in g/cm^3

A = Atomgewicht des Absorbers.

Da das Verhätnis $\frac{Z}{A}$ für alle Elemente etwa gleich ist, gilt mit Ausnahme des Wasserstoffs für alle Elemente folgende Beziehung:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{Z \cdot N^a}{\rho} \approx const. \qquad (4.8)$$

Da die Bahn eines schweren Teilchens bei Zusammenstössen mit Hüllenelektronen praktisch geradlinig verläuft, kann das Bahnelement ds gleich der Schichtdicke dx gesetzt werden; aus (4.8) folgt ausserdem, dass es zweckmässig ist, die Schichtdicke nicht als dx in cm, sondern als $d\xi$ in $g \cdot cm^{-2}$ anzugeben, wobei

$$d\xi = \rho \, dx . \qquad (4.9)$$

Aus diesem Grunde wird zumeist das MASSEN-BREMSVERMÖGEN

$$\frac{dE}{d\xi} \equiv \frac{dE}{d(\rho x)} = \frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} \qquad (4.10)$$

verwendet, das praktisch unabhängig vom Absorbermaterial ist.

Das Bremsvermögen eines beliebigen Absorbers A kann aus dem bekannten Bremsvermögen eines Standardabsorbers 0 ermittelt werden, wobei das Verhältnis der Absorberdicken für gleiche Energieverluste gebildet wird

$$Q \equiv \frac{\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_A}{\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_0} = \frac{\frac{1}{\rho_A}\left(\frac{dE}{dx}\right)_A}{\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{dE}{dx}\right)_0} = \frac{A_0}{A_A} \cdot \frac{B_A}{B_0} . \qquad (4.11)$$

Unter Benutzung von (4.3) ist bei Vernachlässigung der relativistischen Terme und C_K

$$Q = \frac{A_0 \cdot Z_A}{A_A \cdot Z_0} \cdot \frac{\ln \frac{2m_e v^2}{I_A}}{\ln \frac{2m_e v^2}{I_0}} . \qquad (4.12)$$

Als Standardelement wäre aus theoretischen Gründen Wasserstoff am geeignetsten; für praktische Zwecke benutzt man indessen Aluminium.

In Fig. 4.4 sind einige experimentelle Werte für das relative Bremsvermögen Q bezogen auf Aluminium wiedergegeben.

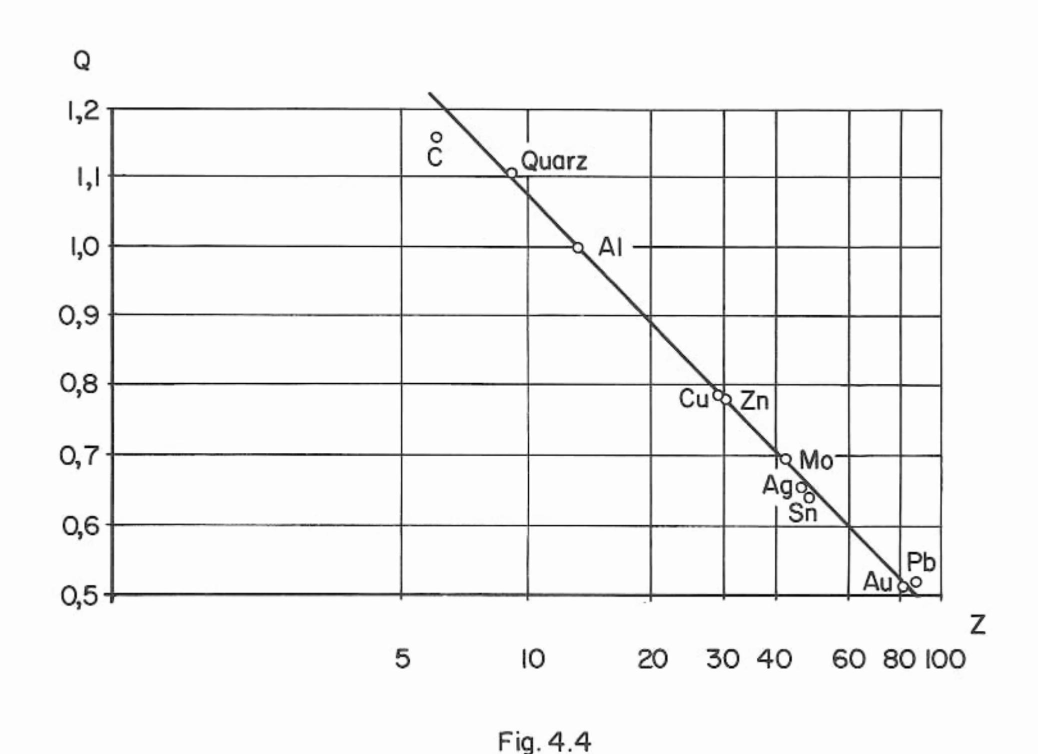


Fig. 4.4

Das Bremsvermögen von Protonen in Aluminium ist in Fig. 4.5 wiedergegeben.

$-\frac{dE}{d\xi}$

10^{-1} MeV/mg.cm^{-2}

10^{-2}

10^{-3}

1   10 10^2 10^3 MeV

Ep ⟶

Bremsvermögen von Protonen in Al

Fig. 4.5

Für das Verhältnis der Reichweiten besteht eine einfache empirische Beziehung, die eine Genauigkeit von etwa ± 15% aufweist:

$$\frac{R_A^{(cm)}}{R_o^{(cm)}} = \frac{\rho_o}{\rho_A} \sqrt{\frac{A_A}{A_o}} \quad \text{. BRAGG-KLEEMANN-REGEL} \tag{4.13}$$

Im Falle einer Mischung verschiedener Kerne mit Atomgewichten A_1, A_2, A_3 ... und den relativen atomaren Häufigkeiten (Massenanteil) γ_1, γ_2, γ_3 ... hat man folgenden Ausdruck zu bilden:

$$\sqrt{A_A} = \gamma_1 \sqrt{A_1} + \gamma_2 \sqrt{A_2} + \gamma_3 \sqrt{A_3} + \dots \tag{4.14}$$

Bezogen auf Luft ergibt sich mit

$$\sqrt{A_{Luft}} = 3{,}81 \quad \text{und} \quad \rho_{Luft} = 1{,}226 \text{ mg.cm}^{-3} \tag{4.15}$$

die Reichweite eines Absorbers zu

$$R_A^{(cm)} = 3{,}2 \cdot 10^{-4} \, \frac{\sqrt{A_A}}{\rho_A} \cdot R_{Luft}^{(cm)} \; . \tag{4.16}$$

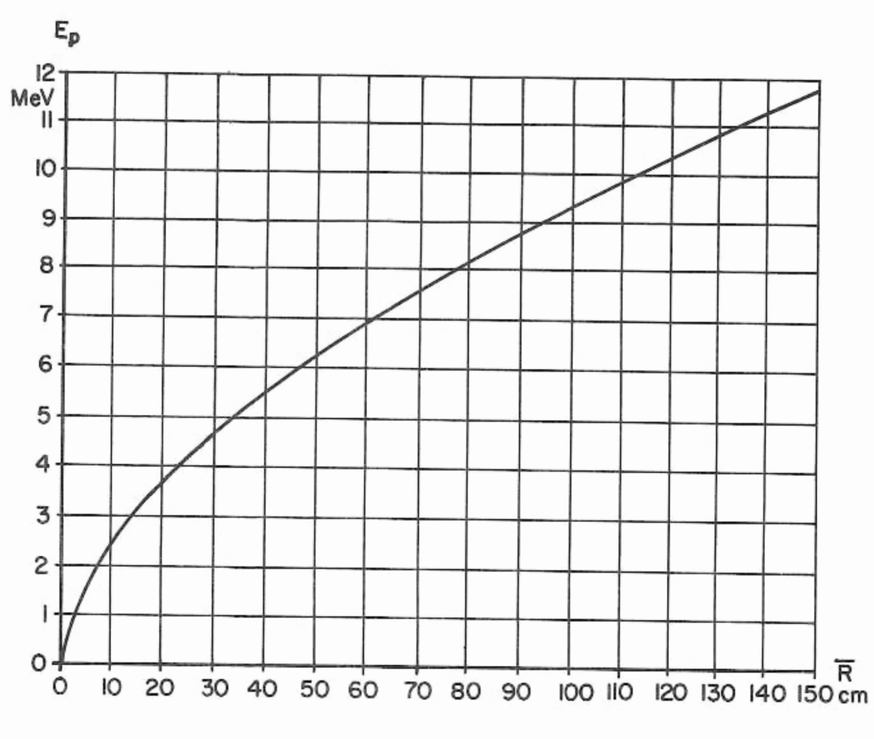
4.2.3 Reichweite

Da die Bahn eines schweren Teilchens praktisch geradlinig verläuft, kann die REICHWEITE R gleich der gesamten Bahnlänge gesetzt werden. Durch Integration über die gesamte Energieabgabe erhält man die Reichweite gemäss

$$R = \int_{E_o}^{0} \frac{dE}{(dE/dx)} \; . \tag{4.17}$$

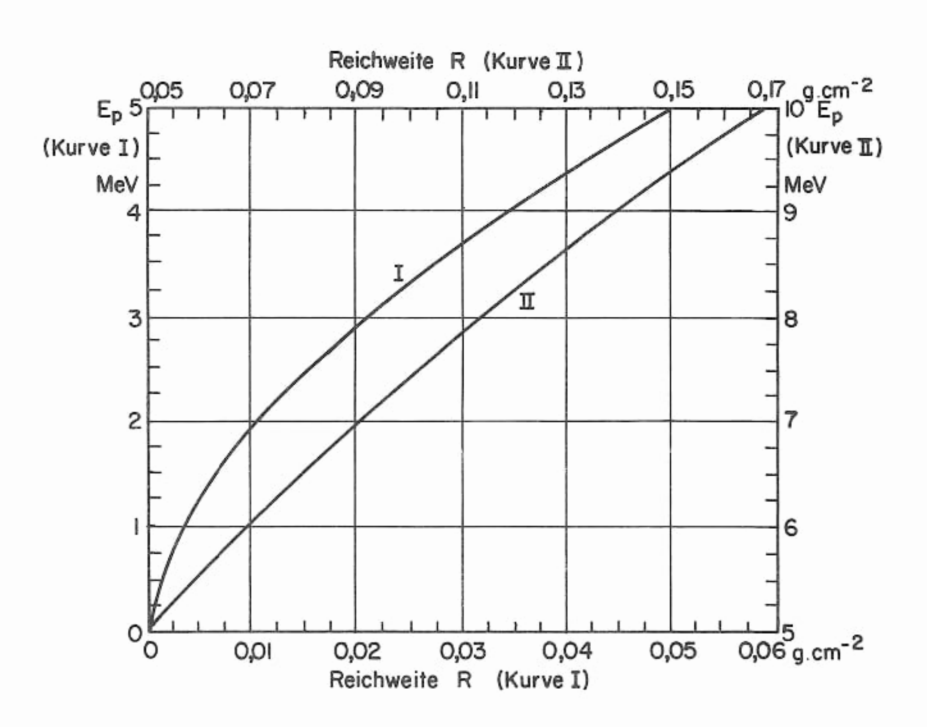
Auf diese Weise ergeben sich REICHWEITE-ENERGIE-BEZIEHUNGEN. In Fig. 4.6 bis 4.11 sind einige solcher Beziehungen graphisch wiedergegeben.

Eine solche Berechnung liefert natürlich nur eine MITTLERE REICHWEITE. Da die Abbremsung der Teilchen durch eine grosse Zahl statistisch verteilter Stösse zustandekommt, sind die individuellen Reichweiten etwas verschieden voneinander. Die einzelnen Reichweiten streuen also um diesen Mittelwert herum, und die verwendeten Reichweite-Energie-Beziehungen nehmen stets auf diese mittlere Reichweite Bezug.



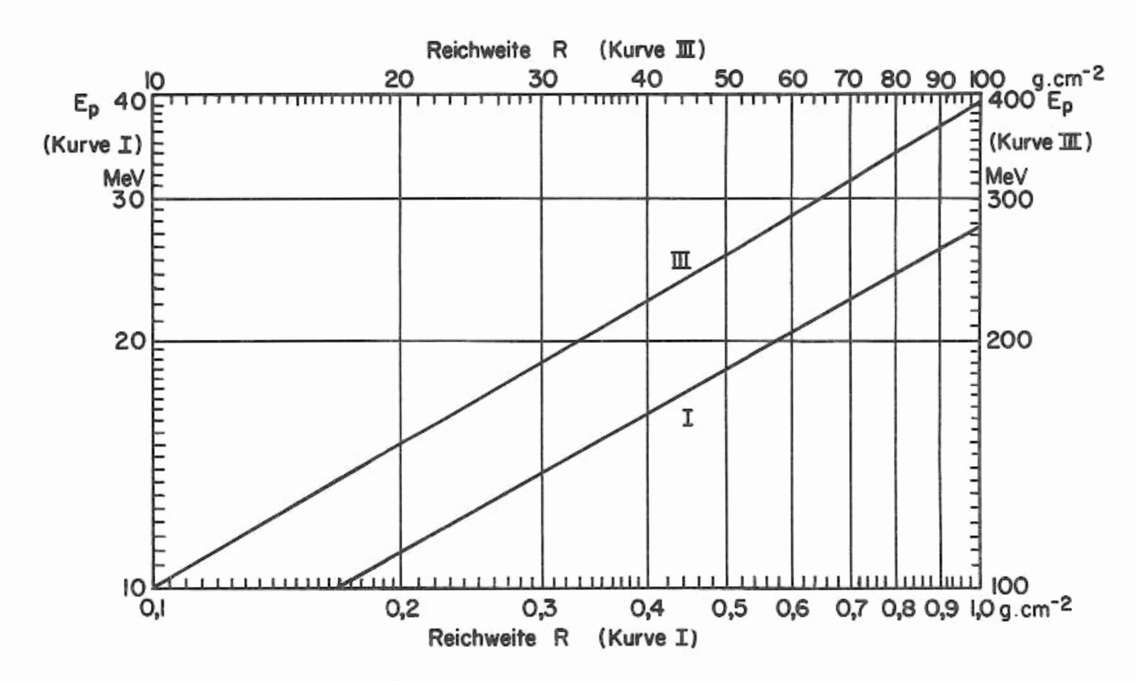
Reichweite von Protonen in Luft

Fig. 4.6



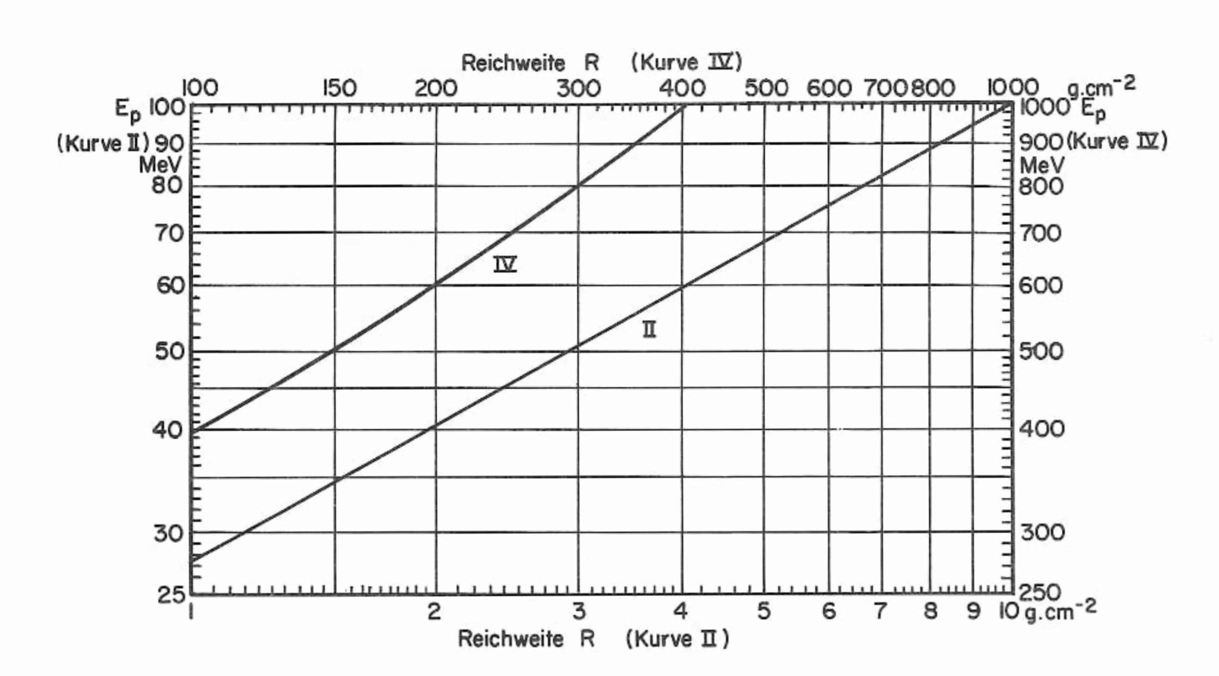
Reichweite von Protonen in Al

Fig. 4.7



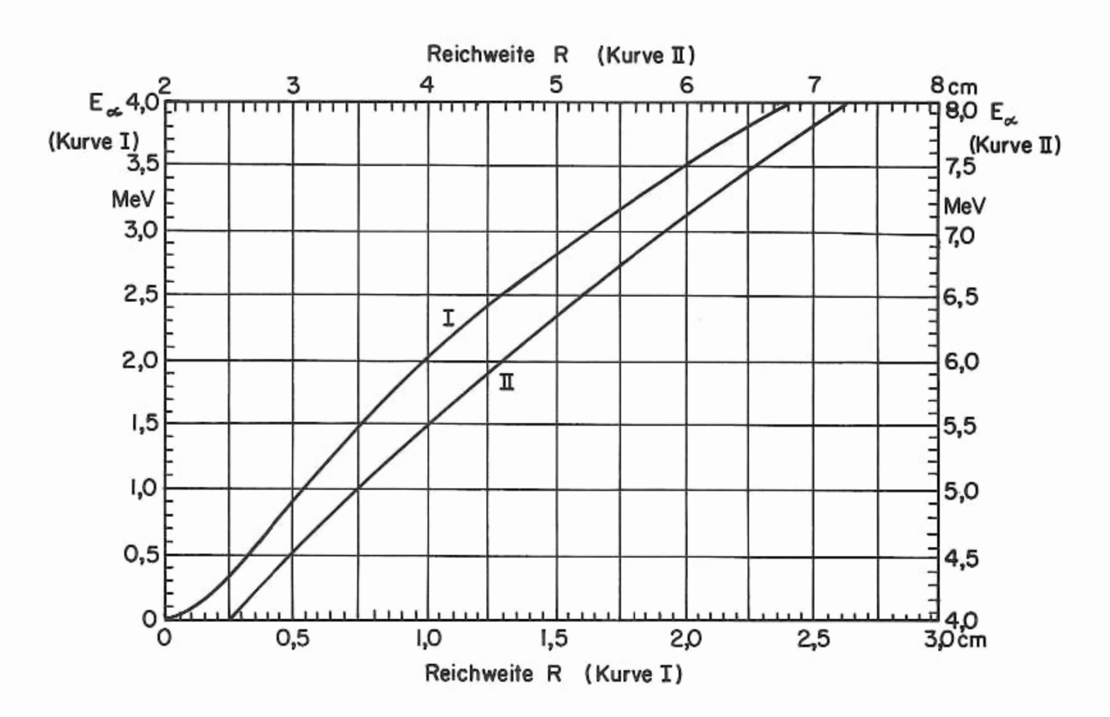
Reichweite von Protonen in Al

Fig. 4.8



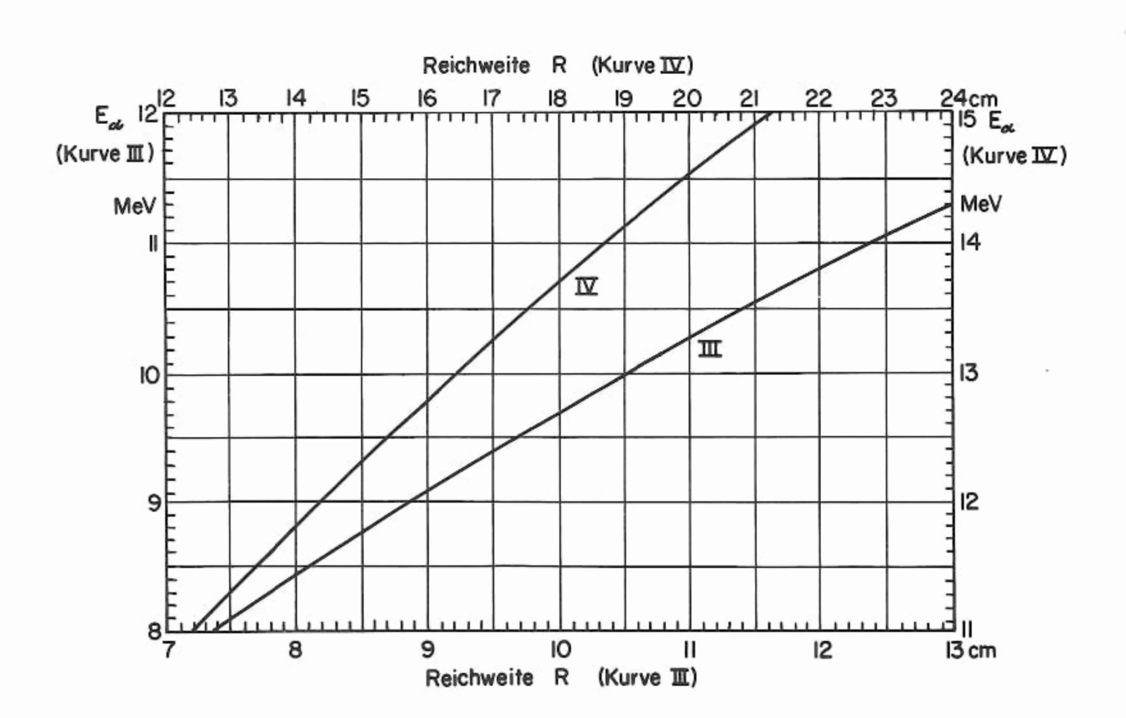
Reichweite von Protonen in Al

Fig. 4.9



Reichweite von α-Teilchen in Luft

Fig. 4.10



Reichweite von α-Teilchen in Luft

Fig. 4.11

Aus dem Nomogramm (Fig. 4.12) lässt sich die Energie eines Teilchens aus seiner Reichweite ξ ermitteln, indem man den Wert der Reichweite auf der linken Ordinate mit dem Z des Absorbers durch eine Gerade verbindet. Die Z-Werte sind je nach Art des abgebremsten Teilchens rechts in dem Nomogramm aufgetragen.

Z.B. besitzen Protonen mit einer Reichweite von ξ = 50 mg/cm^2 in Al eine Energie von 5 MeV (vgl. Fig. 4.6).

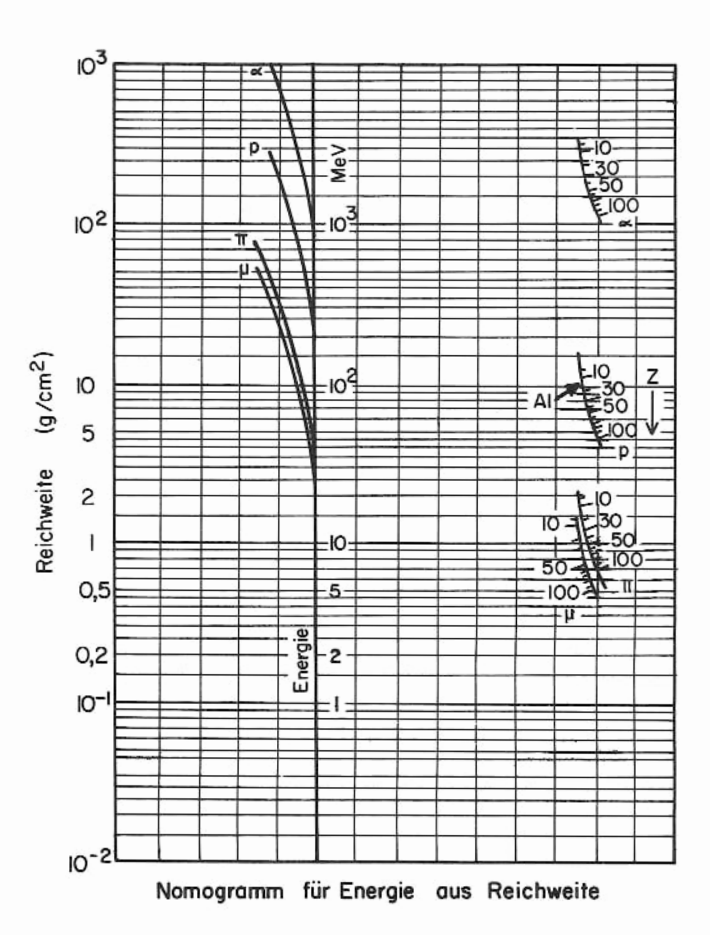


Fig. 4.12

4.2.4 Energie- und Winkelstraggling

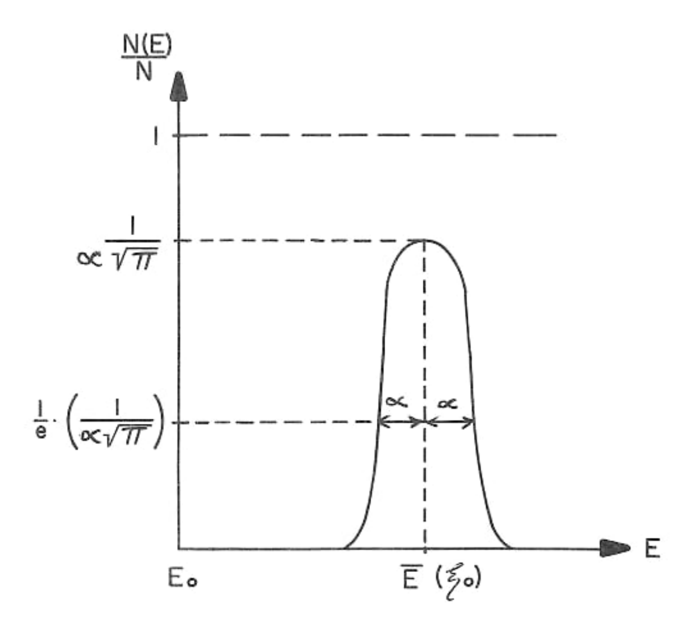


Fig. 4.13

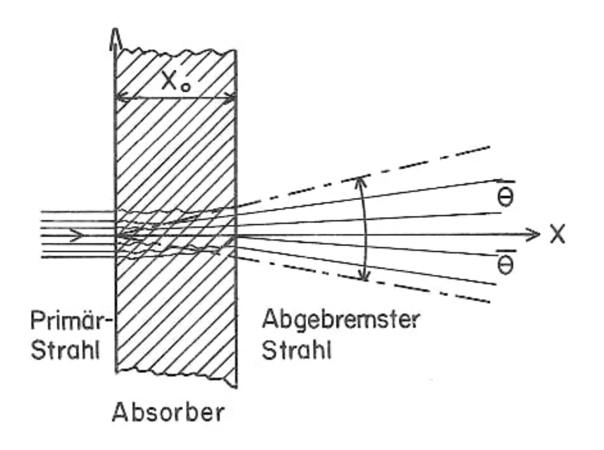


Fig. 4.14

Beim Durchdringen durch einen Absorber der Dicke $\xi_0 = \rho\, x_0$ (Fig. 4.14) erleidet ein paralleler, monoenergetischer Primärstrahl geladener Teilchen der Energie E_0 infolge Vielfachstreuung ein ENERGIE- und WINKEL-STRAGGLING.

Da ein schweres Teilchen seine Energie in kleinen Beträgen bei einer sehr grossen Zahl von Stössen praktisch ohne Ablenkungen abgibt, ist das Straggling sehr klein.

Die Energie der Teilchen folgt bei kleinem Straggling einer Gauss'schen Verteilung (Fig. 4.13):

$$\frac{N(E)\,dE}{N} = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(E-\bar{E})^2}{\alpha^2}} \qquad (4.18)$$

wobei man für den STRAGGLING-PARAMETER α folgende Beziehung findet:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 = {} & 4\pi z^2 e^4 N^a Z x_0 \cdot \\ & \cdot \left[1 + \frac{2kI}{2m_e v^2} \ln \frac{2m_e v^2}{I} \right] \end{aligned}\right\} \quad (4.19)$$

wobei $k \approx 4/3$ ist.

Für das Winkel-Straggling (Fig. 4.14) lässt sich ein mittlerer Streuwinkel $\bar{\Theta}$ wie folgt abschätzen:

$$\boxed{\bar{\Theta}^2 = 2\pi \frac{z^2 e^4}{\bar{E}^2} \cdot N^a Z^2 x_0 \ln \frac{\bar{E}\, a_0}{z Z^{4/3} e^2}} \qquad (4.20)$$

wobei $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ der Bohrsche Radius ist.

Beispielsweise werden Protonen von 7 MeV Energie durch 55 mg cm^{-2} entsprechend 205 μ Aluminium auf 4 MeV abgebremst, wobei das Energiestraggling etwa α = 70 keV und das Winkelstraggling etwa $\bar{\Theta}$ = 5° betragen.

4.3 Bremsung von Elektronen

4.3.1 Bremsvermögen

Bei der Bremsung von schnellen Elektronen sind im Wesentlichen drei Effekte beteiligt: inelastische Streuung an Atomelektronen, elastische Streuung am Kern und inelastische Streuung am Kern unter Emission von Bremsstrahlung.

Die inelastische Streuung an Hüllenelektronen führt auf einen ähnlichen Ausdruck wie die Formel (4.5) von Bethe für die Bremsung schwerer Teilchen, nur erscheinen einige Zusatzterme, die die Wechselwirkung zwischen identischen Teilchen berücksichtigen. Relativistisch kommen spinabhängige Terme hinzu. Diese Elektron-Elektronstreuung wird als MØLLER-STREUUNG bezeichnet.

Die elastische Streuung am Kern wird klassisch durch die RUTHERFORD- Formel beschrieben; bei quantenmechanischer Rechnung ergibt sich ein winkel- und Z-abhängiger Korrekturfaktor. Diese Streuung von Elektronen am Kern wird als MOTT-STREUUNG bezeichnet.

Die Streuung am Kern unter Emission von Bremsstrahlung ist grössenordnungsmässig um einen Faktor $\frac{1}{137}$ kleiner als die elastische.

Die Wirkungsquerschnitte für Mott- und Møller-Streuung sind grössenordnungsmässig durch den gleichen Faktor $\left(\frac{e^2}{m_e v^2}\right)^2$ bestimmt. Während jedoch die Streuung an den Atomelektronen proportional Z ist, steigt die Streuung am Kern mit Z^2. Bei nicht sehr leichten Kernen überwiegt also die Streuung am Kern völlig, und die spezielle Charakteristik der Elektron-Elektronstreuung geht in dieser unter.

Am häufigsten sind also elastische Zusammenstösse mit Kernen; diese verursachen jedoch kaum eine Bremsung der Elektronen, sondern nur Umlenkungen ihrer Bahnen, und zwar führen die Zusammenstösse der leichten Elektronen mit den schweren Kernmassen zum Teil zu beträchtlichen Ablenkungen ("Drunken man's walk"). Da sich die Bahnen der Elektronen beispielsweise in der Wilsonkammer nur durch inelastische Stösse an den Elektronen markieren, empfiehlt sich dort für die Bestimmung der Bahnlängen die Verwendung eines Kondensationsmaterials mit kleinem Z.

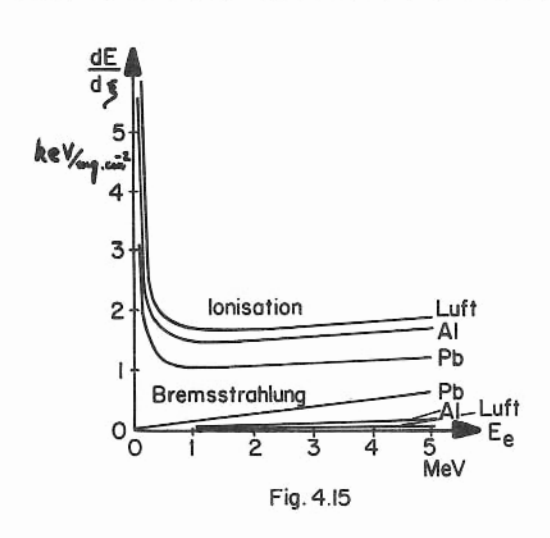


Fig. 4.15

Die Energieverluste beruhen im Wesentlichen auf inelastischen Zusammenstössen mit Elektronen und, wie aus Fig. 4.15 ersichtlich, zu einem geringeren Teil auf Bremsstrahlung.

4.3.2 Straggling und Reichweite

Während schwere Teilchen bei einem Stoss maximal nur einen Bruchteil $\sim \frac{m_e}{M}$ ihrer kinetischen Energie übertragen können, kann der Energieverlust von Elektronen an Elektronen bei einem Stoss bis zur Hälfte ihrer Energie betragen; bei Emission von Bremsstrahlung kann ein Elektron sogar seine ganze Energie in einem Akt abgeben. Die Berechnung der mittleren Bahnlänge

$$\bar{S} = \int ds = \int \frac{dE}{(dE/ds)} \qquad (4.21)$$

ist für Elektronen also nur bedingt von Wert; das Energiestraggling ist sehr gross.

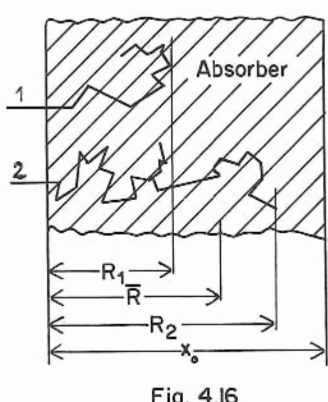


Fig. 4.16

Im Gegensatz zur Bremsung schwerer Teilchen ist ausserdem infolge der starken Umlenkungen die Reichweite R der Elektronen keineswegs gleich ihrer Bahnlänge S, wenn man unter der Reichweite den geradlinigen Abstand vom Anfang bis zum weitesten Punkt der Bahn versteht. Die MITTLERE REICHWEITE $\bar{R}$, die sich daraus bestimmt, bei welcher Schichtdicke die Hälfte aller Elektronen den Absorber durchdringt, ist etwa die Hälfte der mittleren Bahnlänge $\bar{S}$, wenn die Elektronen anfangs monochromatisch sind (Fig. 4.16).

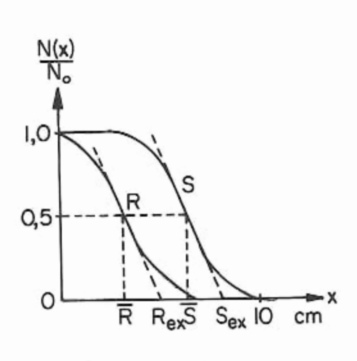


Fig. 4.17

In Fig. 4.17 ist die statistische Verteilung der Bahnlängen und Reichweiten $N(x)/N_o$ über der Schichtdicke x skizziert. EXTRAPOLIERTE BAHNLÄNGE S_{ex} und EXTRAPOLIERTE REICHWEITE R_{ex} lassen sich, wie aus Fig. 4.17 ersichtlich, mit Hilfe der Wendetangenten an diesen Kurven definieren. Am Ende der Bahnen ist die Winkelverteilung nahezu isotrop. Mittlere Reichweiten für Elektronen lassen sich nicht berechnen, es bestehen nur empirische Reichweite-Energie-Beziehungen.

4.3.3 Empirische Beziehungen für Reichweite und Bremsvermögen

Für die Reichweite und das Bremsvermögen von Elektronen in beliebigen Absorbern verwendet man folgende empirische Beziehungen:

$$R = 0{,}52\, E^{(MeV)} - 0{,}09 \quad (g\,cm^{-2}) \qquad 0{,}5 < E_e < 3\ MeV \qquad (4.22)$$

$$R = 0{,}412\, E^{n} \quad (g\,cm^{-2}) \qquad 0{,}01 < E_e < 3\ MeV \qquad (4.23)$$

mit $n = 1{,}265 - 0{,}0954\ \ln E_e$ (4.24)

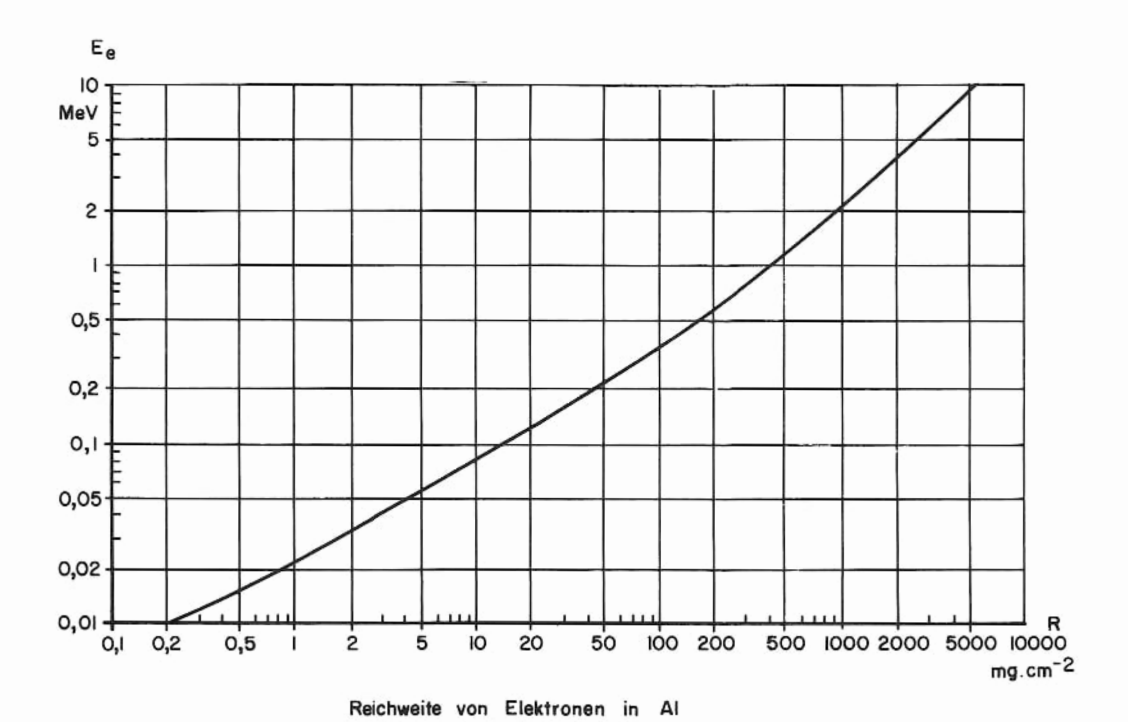
$$R = 0{,}53\, E^{(MeV)} - 0{,}106 \quad (g\,cm^{-2}) \qquad 1 < E_e < 20\ MeV \qquad (4.25)$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4}{E_e} N^{o} Z \left(\ln \frac{E_e}{I} + 0{,}15 \right) \qquad E_e \ll m_e c^2 \qquad (4.26)$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4}{m_e c^2} N^{o} Z \left(\ln \frac{E_e^3}{2 m_e c^2 I^2} + \frac{1}{8} \right) \qquad E_e \gg m_e c^2 \qquad (4.27)$$

Literatur: Nelms, Energy Loss and Range of Electrons and Positrons, National Bureau of Standards NBS Circular 577 (1956), supplemented 1958.

Katz & Penfold, RMP 1952, 24, 28.



Reichweite von Elektronen in Al

Fig. 4.18

Für das Energiestraggling von Elektronen liefert eine Theorie von Landau folgenden Ausdruck für die halbe Halbwertsbreite:

$$\Gamma \approx 610\, \rho \left(\frac{Z}{A}\right)\left(\frac{c}{v}\right)^2 x_o \quad keV . \qquad (4.28)$$

Das Winkelstraggling von Elektronen nach dem Durchdringen eines Absorbers der Dicke x_o in cm ist näherungsweise:

Elektronen durch Blei: $$\bar{\theta}^2 \approx \frac{6 . 10^8\, x_o}{\left(\bar{E}^{(keV)}\right)^2} \qquad (4.29)$$

Elektronen durch Luft $$\bar{\theta}^2 \approx \frac{7 . 10^3\, x_o}{\left(\bar{E}^{(keV)}\right)^2} . \qquad (4.30)$$

Diese empirischen Beziehungen gelten für monoenergetische Primärelektronen. Bemerkenswerterweise ergibt sich jedoch für Elektronen mit einer kontinuierlichen primären Energieverteilung, die dem β-Zerfall entspricht, im Gegensatz zu Fig. 4.17 eine expontentielle Charakteristik für die Transmission als Funktion der Absorberdicke x_o (Fig. 4.19). Die Absorption lässt sich also in diesem Fall durch ein Exponentialgesetz

$$\frac{I}{I_o} = e^{-\mu x} \qquad (4.31)$$

darstellen. Dieses Zusammentreffen ist rein zufällig. Der MASSEN-ABSORPTIONS-KOEFFIZIENT μ/ρ ist nahezu unabhängig von Z und seine Energieabhängigkeit lässt sich durch die empirische Beziehung

$$\boxed{\frac{\mu}{\rho} = \frac{17}{E_{max}^{1,14}}} \qquad (4.32)$$

wiedergeben (Fig. 4.20).

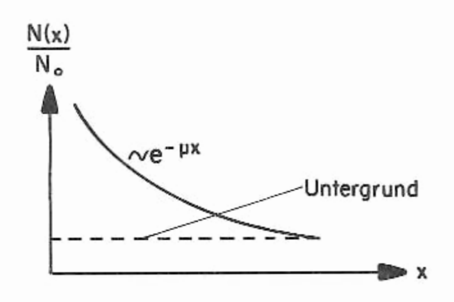


Fig. 4.19

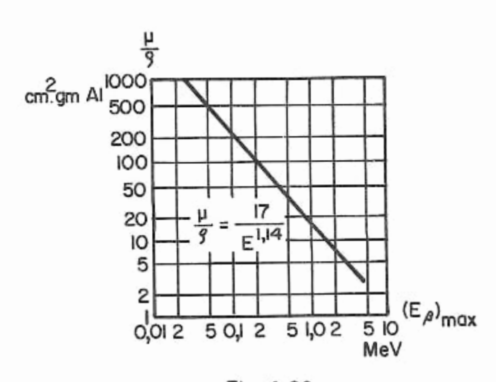


Fig. 4.20

4.4 Bremsstrahlung

4.4.1 Einleitung

Wie in Abschnitt 3.4 gezeigt wurde, emittiert ein beschleunigtes geladenes Teilchen elektromagnetische Strahlung, dessen Energie pro Zeiteinheit (3.12)

$$\boxed{\frac{dE'}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,|\ddot{x}|^2} \tag{4.33}$$

sich über einen kontinuierlichen Frequenzbereich erstreckt. Die auf diese Weise emittierte Röntgen-Strahlung wird als "BREMSSTRAHLUNG" bezeichnet· sie tritt stets auf, wenn ein geladenes Teilchen eine Geschwindigkeitsänderung erfährt oder aus seiner Bewegungsrichtung abgelenkt wird.

Als eine Veranschaulichung zu dem obigen Fall werde der Energieverlust pro sec infolge Bremsstrahlung für ein Elektron berechnet, das sich auf einer geraden Bahn vom Unendlichen auf die K-Schale (Radius a_o) eines Atoms mit der Kernladung + Ze zubewegt. (Fig. 4.21).

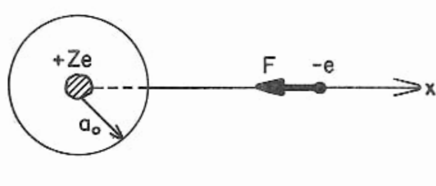


Fig. 4.21

Die in diesem idealisierten Fall insgesamt emittierte Strahlung $E' \equiv E_B$ ist

$$E_B = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\int_{x=\infty}^{a_o} |\ddot{x}|^2\,dt\,. \tag{4.34}$$

Für die Berechnung des Integrals erhält man $\ddot{x}$ aus der Bewegungsgleichung

$$-m_e\ddot{x} = \frac{Ze^2}{x^2} \tag{4.35}$$

wobei das Minuszeichen berücksichtigt, dass die Beschleunigung $\ddot{x}$ in negativer x-Richtung erfolgt. - Ferner ist die Ersetzung der Integrationsvariablen dt zu dx über die Geschwindigkeit v mit Hilfe der Energiegleichung

$$\frac{1}{2}\,m_e v^2 = \frac{Ze^2}{x} \tag{4.36}$$

möglich, so dass

$$dt = \frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{m_e x}{2Ze^2}}\;.\;dx \tag{4.37}$$

und

$$E_B = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\int_{\infty}^{a_o}\left(-\frac{Ze^2}{m_e x^2}\right)^2\left(\frac{m_e x}{2Ze^2}\right)^{1/2} dx \tag{4.38}$$

$$E_B = \frac{2\sqrt{2}}{15}\;\frac{Z^{3/2}\,.\,e^5}{m_e^{3/2}\,c^3\,a_o^{5/2}}\quad erg \tag{4.39}$$

Der Bohrsche Radius ist

$$a_o = \frac{\hbar^2}{Z \cdot m_e e^2} \qquad (4.40)$$

woraus

$$\boxed{E_B = \frac{2\sqrt{2}}{15} \cdot \frac{Z^4 e^{10} m_e}{\hbar^5 c^3} \quad erg.} \qquad (4.41)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass dieses einfache Modell ein Ergebnis liefert, das in guter Übereinstimmung mit dem genaueren Wert ist, den man erhält, wenn man die Bahn des Elektrons vom Unendlichen in die K-Schale als hyperbolisch annimmt:

$$\boxed{E_B = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{Z^4 e^{10} m_e}{\hbar^5 c^3} \cdot erg.} \qquad (4.42)$$

Die kinetische Energie eines K-Elektrons beträgt

$$E_{kin} = \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} = -\frac{1}{2} E_{pot} \qquad (4.43)$$

wenn Abschirmungseffekte vernachlässigt werden (nackter Kern).

Die Gesamtenergie eines K-Elektrons ist also

$$E_{tot} = E_{pot} + E_{kin} = -E_{kin} \qquad (4.44)$$

woraus sich für das Energieverhältnis der Bremsstrahlung (4.42) und der K-Schale (4.43)

$$\frac{E_B}{E_{tot}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{Z^2 e^6}{\hbar^3 c^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (\alpha Z)^2 \qquad (4.45)$$

ergibt. Beispielsweise ist dieses Verhältnis für den nackten Aluminiumkern (Z = 13) ~ 14000, wobei sich die Bremsstrahlung von E_B = 0,17 eV in Form von Röntgenstrahlung über einen kontinuierlichen Energiebereich erstreckt. -

Ein Beispiel für die ÄUSSERE BREMSSTRAHLUNG, die sich aus der Richtungsänderung der Bahn eines geladenen Teilchens ergibt, ist diejenige, die bei der Umlenkung eines geladenen Strahls in Beschleunigern entsteht. Es müssen Abschirmungen vorgesehen werden, um die Bremsstrahlung auf die biologische Toleranzdosis herabzusetzen: Beispielsweise beträgt die Dicke einer Betonabschirmung, die erforderlich ist, um die Bremsstrahlung des Elektronenstrahls in einem Betatron von 20 MeV und 1 mW/cm^3 auf die Toleranzdosis von 0,3 rem/Woche zu reduzieren, 3 Meter.

Strahlungsverlust tritt ebenfalls auf, wenn geladene Teilchen nahe an einem Kern vorbeifliegen und in dem Coulomb-Feld des Kernes und der Elektronen abgelenkt werdenbeispielsweise wenn β -Teilchen in Absorbern gebremst und zur Ruhe gebracht werden. Jedes einfallende Teilchen kann einen beliebigen Energiebetrag von null bis zu seiner gesamten kinetischen Energie emittieren; die maximale Photonenenergie ist also

$$\boxed{(h\nu)_{max} = E_{kin}} \qquad (4.46)$$

entsprechend dem bekannten DUANE-HUNTschen GESETZ. Auf solchen Bremsstrahlungsprozessen beruht das kontinuierliche Energiespektrum von Röntgenröhren.

Entsprechend gibt es auch einen Effekt durch INNERE BREMSSTRAHLUNG, die auftritt, wenn ein β-Teilchen von einem Kern emittiert oder ein Hüllenelektron eingefangen wird. Es hat sich gezeigt, dass etwa ein Photon pro 137 β-Teilchen durch innere Bremsstrahlung emittiert wird. Für jedes emittierte oder eingefangene Elektron besteht, wie sich gezeigt hat, eine Wahrscheinlichkeit von etwa 0,01% für "innere Konversion" in der K, L, ... Schale des Tochteratoms, die schliesslich zur Emission von charakteristischen Röntgen-Strahlen oder Auger-Elektronen diskreter Energie führt.

4.4.2 Theorie der Bremsstrahlung

Die klassische Theorie sagt voraus, dass bei jeder Gelegenheit, wenn ein geladenes Teilchen eine Änderung in seiner Bewegung erfährt, Strahlung emittiert wird; es hat sich erwiesen, dass dies mikroskopisch nicht richtig ist, sondern nur für das statistische Mittel über ein System von bewegten geladenen Teilchen zutrifft. Die Quantentheorie der Bremsstrahlung sagt andererseits eine endliche, aber sehr kleine Wahrscheinlichkeit dafür voraus, dass jedesmal, wenn ein Teilchen eine Bewegungsänderung erfährt, ein Photon emittiert wird. Der Unterschied zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Theorie besteht darin, dass die erste eine Vielzahl kleiner Energieverluste voraussagt, während die andere die Emission von wesentlich weniger Photonen enthält, aber jedes mit höherer Energie in der Weise, dass das statistische Mittel ungefähr dasselbe ist (obwohl die Spektralverteilungen wesentlich voneinander abweichen). Der Wirkungsquerschnitt für Emission von Strahlung ergibt sich aus beiden Theorien zu

$$\sigma_B \sim \frac{Z^2}{137} \cdot \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \equiv \sigma_0 \, Z^2 \quad \mathrm{cm}^2/\mathrm{Kern} . \qquad (4.47)$$

Gemäss der klassischen Formel (4.33) besteht für die pro Sekunde emittierte Energie die Proportionalität

$$\frac{dE_B}{dt} \sim |\ddot{x}|^2 \qquad (4.48)$$

und gemäss (4.35) für die Beschleunigung im Coulomb-Feld des Kernes

$$|\ddot{x}|^2 \sim \left(\frac{Ze^2}{M}\right)^2 \qquad (4.49)$$

worin M die Masse des strahlenden Teilchens ist. Also ist der Strahlungsverlust pro Zeiteinheit

$$\frac{dE_B}{dt} \sim \frac{Z^2}{M^2} \qquad (4.50)$$

gross für Absorber mit hoher Ordnungszahl und niedrig für emittierende Teilchen grosser Masse, so dass hauptsächlich die Bremsstrahlung von beschleunigten Elektronen von Bedeutung ist. Beispielsweise ist diejenige von 2-MeV-Protonen gegenüber den charakteristischen K- und L-Röntgenstrahlen vernachlässigbar, die in dem Target durch Ionisation erzeugt werden.

Theoretische Berechnungen des Wirkungsquerschnittes und der Energieverluste sind einfacher und zuverlässiger für den speziellen Fall der BREMSSTRAHLUNG in einem DÜNNEN TARGET (THIN-TARGET BREMSSTRAHLUNG), wobei angenommen wird, dass die Strahlung durch Bremsung eines gebündelten Strahls monoenergetischer Elektronen entsteht, die durch ein Target treten, das so dünn ist, dass die Elektronen keine merklichen Energieverluste durch Ionisation, keine deutlichen Ablenkungen durch elastische Zusammenstösse und keine mehrfachen Stösse mit Strahlungsverlust erleiden, d.h. dass sie überwiegend nur je ein Photon emittieren.

4.4.3 Bremsstrahlung in dünnem Target

Die Ergebnisse der Berechnungen für die Bremsstrahlungs-Wirkungsquerschnitte in dünnen Targets führen auf lange und komplizierte Ausdrücke, von denen die meisten bei Koch und Motz RMP, 1959, 31, 920 angegeben sind. In näherungsweiser Form lassen sich die wichtigsten Resultate wie folgt zusammenfassen, wobei die Bezeichnung

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{137} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \mathrm{cm}^2/\mathrm{Kern} = 0{,}58 \ \mathrm{mb}/\mathrm{Kern} \qquad (4.51)$$

benützt werde.

(a) Nicht-relativistische Elektronen ($E_{kin} \ll m_e c^2$):

$$\sigma_B = \frac{16}{3} \sigma_0 Z^2 \ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Kern} \qquad (4.52)$$

(b) Langsame relativistische Elektronen ($E_{kin} \approx m_e c^2$):

Keine analytische Form.

(c) Hoch-relativistische Elektronen ($m_e c^2 \ll E_{kin} \ll 137\, m_e c^2 . Z^{-1/3}$):

$$\sigma_B = 4 \sigma_0 Z^2 \left[\ln \left(\frac{E_{kin} + m_e c^2}{m_e c^2} \right) - \frac{1}{3} \right] \mathrm{cm}^2/\mathrm{Kern} \qquad (4.53)$$

wobei die Korrekturen, die die Abschirmung der Kernladung Ze durch die Atomelektronen mit sich bringt, vernachlässigt sind.

(d) Extrem relativistische Elektronen ($E_{kin} \gg 137\, m_e c^2 . Z^{-1/3}$):

$$\sigma_B = 4 \sigma_0 Z^2 \left[\ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) + \frac{1}{18} \right] \mathrm{cm}^2/\mathrm{Kern} \qquad (4.54)$$

unter Berücksichtigung der Abschirmung.

Man beachte, dass die obigen Wirkungsquerschnitte pro <u>Kern</u> in die pro <u>Atom</u> mit Hilfe der Beziehung

$$4\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 1 \; b \qquad (4.55)$$

umgewandelt werden können, z.B. würde damit der nicht-relativistische Fall (4. 52)

$$\sigma_B = \frac{4}{3\pi} \frac{Z^2}{137} \; b/\text{Atom} \qquad (4.56)$$

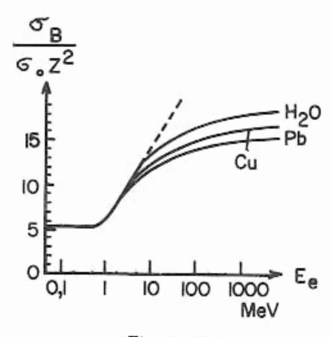


Fig. 4.22

In Fig. 4.22 sind die theoretischen Werte von σ_B, auf $\sigma_o Z^2$ normiert, als eine Funktion der kinetischen Energie E_{kin} des Elektrons dargestellt. Die Werte von σ_B werden speziell für kleine Werte von E_{kin} etwas zu niedrig infolge der Näherungen, die in ihrer Berechnung enthalten sind.

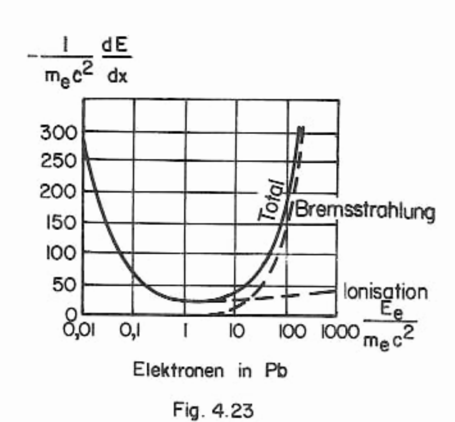


Fig. 4.23

Von weiterem Interesse ist die Energie, die pro Längeneinheit des Elektronweges ausgestrahlt wird; detaillierte Rechnungen darüber sind von Heitler ausgeführt worden ("Quantum Theory of Radiation", 1954, pp. 242). Dieser Verlust an kinetischer Energie $\left(-\frac{dE_{kin}}{dx}\right)$ durch Strahlung übertrifft die Verluste durch Ionisation bei Zusammenstössen nur bei extrem relativistischen Energien, wie sich aus Fig. 4.23 ersehen lässt, wo diese Verluste für Pb, auf die Ruheenergie des Elektrons $E_o = m_e c^2$ normiert, als Funktion der kinetischen Energie in ähnlicher Normierung aufgetragen sind.

Die Formel für Energieverluste bei extrem relativistischen Energien ergibt sich in ähnlicher Form durch Multiplikation von (4. 54) mit NE_{kin}, wobei N die Zahl der Elektronen pro cm^3 des Absorbers ist:

$$\frac{dE_B}{dx} = -\frac{dE_{kin}}{dx} \cong 4\,\sigma_o Z^2 N E_{kin} \left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) + \frac{1}{18} \right]. \qquad (4.57)$$

Dabei wurde angenommen, dass die Bremsstrahlung bei Elektronabständen vom Kern emittiert wird, die gross gegenüber dem Atomradius sind.

Diese Gleichung lässt sich in der Form

$$\frac{dE_{kin}}{dx} = -k\,E_{kin} \qquad (4.58)$$

schreiben, worin k eine energieunabhängige Konstante ist. Durch Integration ergibt (4.58)

$$E_{kin} = E_{kin_0} \cdot e^{-\frac{x}{L}} \qquad (4.59)$$

worin die L der STRAHLUNGSWEG (RADIATION LENGTH) des Absorbers ist, der durch

$$\frac{1}{L} = 4\,\sigma_0\,Z^2 N \left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) + \frac{1}{18} \right] \qquad (4.60)$$

gegeben ist. Der Strahlungsweg L stellt die Absorberdicke dar, für die der(1-e)-te Teil der kinetischen Anfangsenergie des Elektrons in Form von Bremsstrahlung abgegeben ist.

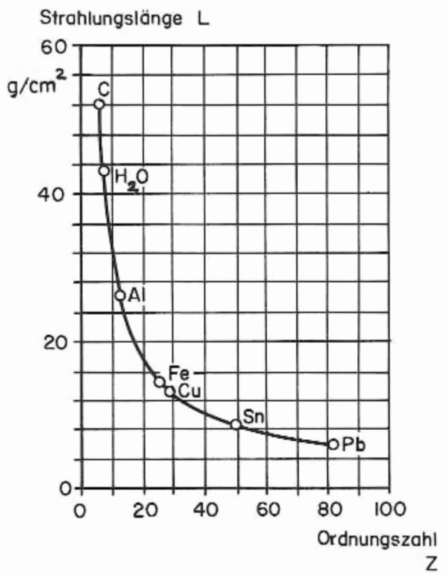


Fig. 4.24

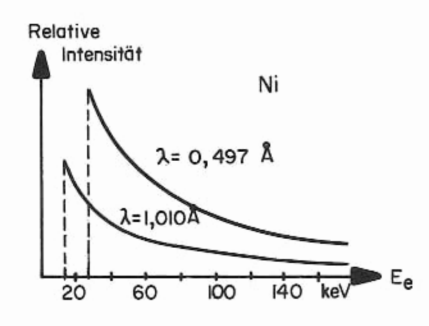


Fig. 4.25

In Fig. 4.24 sind Werte von L als Funktion von Z aufgetragen.

Die Intensität der Bremsstrahlung in einem dünnen Target (Energie pro Photon × Zahl der Photonen) ist für alle Photonenenergien konstant mit einer scharfen Grenze bei $h\nu_{max}$; innerhalb eines gegebenen Intervalls der Photonenenergie nimmt sie mit steigender Elektronenergie für alle Werte von Z in ungefähr gleicher Weise zu (Fig. 4.25), und zwar weil die relative Zahl der Quanten pro Energieintervall mit E_{kin} abnimmt.

Die Intensität für niedrige Werte von E_{kin} ist am grössten senkrecht zum Strahl; bei relativistischen Energien jedoch zeigt die WINKELVERTEILUNG der INTENSITÄT eine Bevorzugung der Vorwärtsrichtung, d.h. ihr Maximum verlagert sich mehr in Vorwärtsrichtung der Elektronenbewegung.

4.4.4 Bremsstrahlung in dickem Target

Dünne Targets entsprechen einer Idealisierung; die praktisch vorkommenden Absorberschichten erfüllen jedoch die dazu geforderten Bedingungen in der Regel nicht.

Die theoretische Behandlung dicker Targets ist sehr kompliziert und verlangt in vielen Fällen die Einführung empirischer numerischer Konstanten, um der Vielfachstreuung Rechnung zu tragen. Es gibt keinen analytischen Ausdruck für die Winkelverteilung der Bremsstrahlung von nicht-relativistischen Elektronen: Die Verteilung hängt weitgehend von der Geometrie des Targets ab. Einige Resultate sind in Fig. 4.26 für Au angegeben.

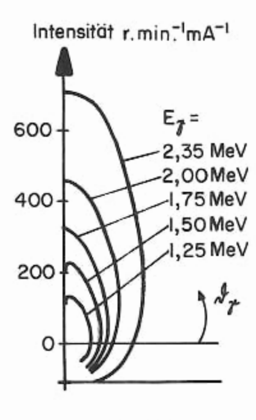


Fig. 4.26

Bei relativistischen Elektronenenergien sind Berechnungen der Winkelverteilung durchgeführt worden, die sich in ziemlich guter Übereinstimmung mit dem Experiment ergeben; diese sind graphisch in Fig. 4.27 gezeigt.

Fig. 4.27

Für die Spektralverteilungen gibt es im nichtrelativistischen Bereich keine allgemeinen Ausdrücke, die das Spektrum als Funktion des Winkels genau angeben. Man hat jedoch gefunden, dass im Gegensatz zu den Spektren an dünnen Targets die relative Zahl der Photonen in dem Bereich hoher Frequenzen für Spektren an dicken Targets zunimmt, wenn der Emissionswinkel kleiner wird: Die energiereichste Strahlung wird nach vorn emittiert.

Kramers erhielt einen semiempirischen Ausdruck für das integrierte Energiespektrum, das in alle Richtungen innerhalb eines Intervalls $h\nu \rightarrow h\nu + d(h\nu)$ emittiert wird:

$$E_B = A\,Z\,(h\nu_{max} - h\nu) \qquad (4.61)$$

worin $h\nu_{max}$ die Photonenenergie an der Grenze bei hohen Frequenzen und A eine Proportionalitätskonstante ist. Der experimentelle Befund stimmt mindestens grössenordnungsmässig mit der Formel von Kramers überein.

Eine andere Formulierung in Termen der kinetischen Anfangsenergie des Elektrons E_{kin} ergibt für die totale Energie der Bremsstrahlung an einem dicken Target über alle Winkel pro einfallendes Elektron:

$$E_B = k \cdot Z \cdot E_{kin}^2 \qquad (4.62)$$

worin der Wert der numerischen Konstanten k ungefähr $7 \cdot 10^{-4}$ MeV^{-1} beträgt, wenn E_B und E_{kin} in MeV angegeben werden und $E_{kin} \leq 2,5$ MeV ist.

Es folgt, dass der Anteil des Verlustes an der Elektronenenergie

$$\frac{E_B}{E_{kin}} \approx 7 \cdot 10^{-4} \, Z \, E_{kin} \qquad (4.63)$$

ist.

Für 1-MeV-Elektronen in Pb (Z = 82) macht das ungefähr 6% aus.

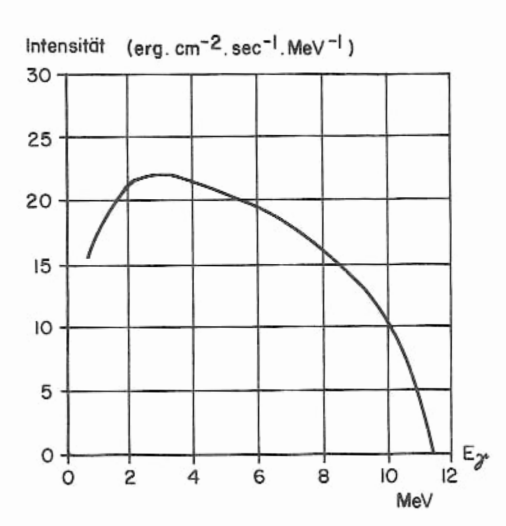


Fig. 4.28

Theoretische Ausdrücke für das Spektrum bei relativistischen Energien wurden von Penfold abgeleitet; das Intensitätsspektrum ist in Fig. 4.28 gezeigt.

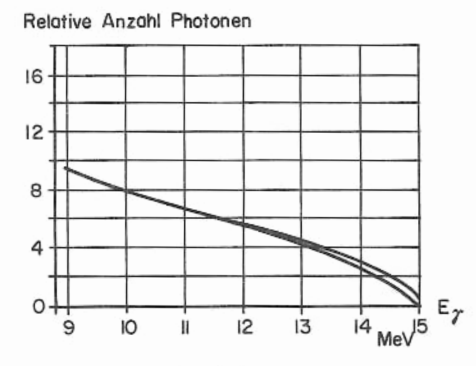


Fig. 4.29

Die Form des Spektrums für Bremsstrahlung an einem dicken Target wie es von Penfold berechnet wurde (untere Kurve in Fig. 4.29), unterscheidet sich kaum von der an dünnen Targets, wie sie von Schiff berechnet wurde (obere Kurve in Fig. 4.29).

4.5 Čerenkov-Strahlung

Bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Medium oder in der Nähe eines Mediums mit einer Geschwindigkeit, die die Phasengeschwindigkeit des Lichts in diesem Medium überschreitet ("Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit"), entstehen Phänomene charakteristischer Eigenart. So tritt die Čerenkov-Strahlung auf, der Charakter des Doppler-Effekts ändert sich wesentlich, in gewissen Fällen werden Schwingungen des strahlenden Teilchens aufgeschaukelt, und ein Teilchenbündel kann sogar instabil werden.

4.5.1 Čerenkov-Effekt

Der Čerenkov-Effekt kommt durch Übertragung kleiner Energiebeträge von schnellen geladenen Teilchen an die Atome des Mediums zustande, in dem sie sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die grösser als die Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{n}$ des Lichtes in diesem Medium sind; c sei dabei die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n der Brechungsindex des Mediums.

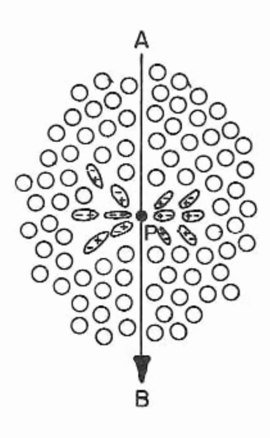


Fig. 4.30

Qualitativ lässt sich dieser Effekt folgendermassen vorstellen. Zunächst sei ein langsames Elektron betrachtet, das sich in einem durchsichtigen Dielektrikum bewegt. Die Spur dieses langsamen Elektrons ist in Fig. 4.30 angedeutet, worin die Kreise die Atome des Dielektrikums darstellen, die normalerweise von annähernd kugelförmiger Gestalt, aber in der Nähe des Elektrons durch das elektromagnetische Feld des Teilchens deformiert sind. Dadurch wird die Ladungsverteilung innerhalb der einzelnen Atome inhomogen: Das Medium wird in der Umgebung des Elektrons polarisiert und die deformierten Atome verhalten sich wie Dipole. Bei dem Durchgang des Elektrons wird jeder Abschnitt des Mediums in der Nähe der Spur einen kleinen und sehr kurzen elektromagnetischen Impuls erhalten. Aber da das Polarisationsfeld um das Elektron herum völlig symmetrisch ist, sowohl azimutal als auch achsial, gibt es in grösserer Entfernung kein resultierendes Feld, also auch keine Emission elektromagnetischer Strahlung.

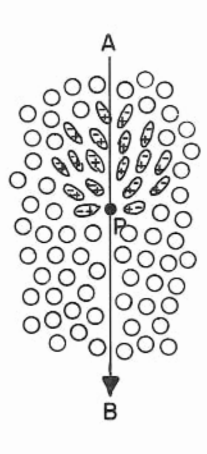


Fig. 4.31

Die obige Symmetrie gilt nicht für den Fall eines schnellen Elektrons (Fig. 4.31). Die azimutale Symmetrie existiert weiter, aber entlang der Achse bildet sich ein resultierendes Dipolfeld aus, das sogar in grossen Abständen von der Spur des Elektrons wirksam wird. Die Atome vor dem Elektron in der Nähe der Spur sind nur sehr geringfügig polarisiert, da die

Bewegung des Elektrons sozusagen sein ausgestrahltes elektromagnetisches Feld überholt. Das resultierende Dipolfeld in Richtung der Elektronspur erzeugt die Emission kurzer elektromagnetischer Impulse, deren Frequenzen das Frequenzspektrum der resultierenden emittierten ČERENKOV-STRAHLUNG bestimmen.

Im allgemeinen heben sich die ausgestrahlten Wellenzüge von den verschiedenen Abschnitten an der Spur durch Interferenz auf, so dass das resultierende Feld an einem entfernten Punkt null ist. Wenn jedoch die Teilchengeschwindigkeit die Phasengeschwindigkeit des Lichtes übersteigt, so kann sich unter den gegebenen Umständen in einer bestimmten Richtung eine positive Überlagerung ausbilden: Die Wellenzüge von allen Teilchen längs der Spur sind miteinander in Phase, d.h. kohärent, wenn man sie unter einem bestimmten Winkel ϑ gegenüber der Teilchenspur betrachtet.

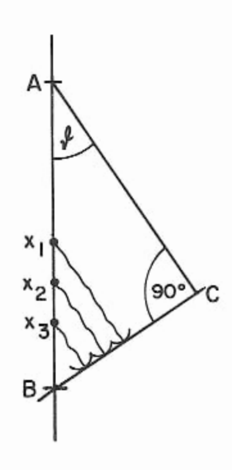


Fig.4.32

Die Wellenfront $\overline{BC}$ in Fig. 4.32 ist kohärent, wenn die Zeit t, die das Teilchen braucht, um die Strecke $\overline{AB}$ zurückzulegen gleich der Zeit ist, die das Licht für die Strecke $\overline{AC}$ braucht. Dann ist

$$t = \frac{\overline{AB}}{\beta c} = \frac{\overline{AC}}{c/n} \tag{4.64}$$

wenn v die Geschwindigkeit des Teilchens in dem Medium und

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{4.65}$$

ist; man beachte, dass c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Aus dem Dreieck A B C lässt sich

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\vartheta \tag{4.66}$$

ablesen, so dass aus (4.64)

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{1}{\beta n}} \tag{4.67}$$

Dieses wird als ČERENKOV-BEZIEHUNG und ϑ als der ČERENKOV-WINKEL bezeichnet.

Aus (4.67) folgt:

(a) Für ein Medium mit gegebenem Brechungsindex n gibt es eine SCHWELLEN-GESCHWINDIGKEIT (THRESHOLD VELOCITY)

$$\beta_{min} = \frac{1}{n} \tag{4.68}$$

unterhalb der keine Čerenkov-Strahlung emittiert werden kann. Das tritt ein, wenn

$$\cos\vartheta = 1 \quad , \quad \vartheta = 0$$

d.h. wenn die Emissionsrichtung mit der Teilchenbahn zusammenfällt.

(b) Ein maximaler Emissionswinkel

$$\vartheta_{max} = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.69)$$

tritt für extrem relativistische Teilchen auf, der durch $\beta = 1$ gegeben ist.

(c) Čerenkov-Strahlung tritt hauptsächlich in den sichtbaren und in den fast sichtbaren blauen Bereichen des Spektrums auf, für die $n > 1$. Sie kann nicht im Röntgengebiet auftreten, weil dort $n < 1$. Sie ist tatsächlich von blau-weisser Farbe, z.B. das blaue Glimmen, das den Kern eines Swimmingpool-Reaktors umgibt.

Für Kohärenz sind zwei weitere Bedingungen erforderlich. Erstens muss die Länge ℓ der Teilchenspur gross gegenüber der Wellenlänge λ der Čerenkov-Strahlung in dem Medium sein; sonst treten Beugungserscheinungen auf. Zweitens muss die Teilchengeschwindigkeit in dem Medium konstant sein (βc = const.).

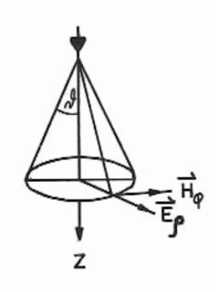


Fig. 4.33

Entsprechend der azimutalen Symmetrie tritt die Emission der Čerenkov-Strahlung in einem Konus vom halben Öffnungswinkel ϑ auf (Fig. 4.33). Der elektrische Vektor $\vec{E}$ steht überall senkrecht auf der Oberfläche des Konus und $\vec{H}$ liegt stets tangential zu ihr.

Die klassische Theorie von Frank und Tamm (Dokl. Akad. Nauk 1937, 14, 109) wurde 1940 von Ginzburg quantisiert, der kleine Änderungen einführte, die sich beispielsweise aus der Betrachtung von Effekten ergeben, die von der Rückwirkung der emittierten Strahlung auf die Bewegung des Teilchens herrühren. Dies lässt sich an Hand der Bedingungen für die Erhaltung von Impuls und Energie aufzeigen.

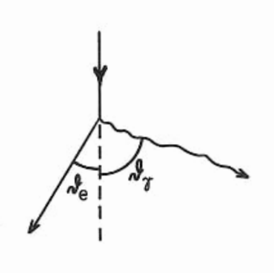


Fig. 4.34

Es sei angenommen, ein geladenes Teilchen der Ruhemasse m bewege sich in einem homogenen Medium mit der konstanten Geschwindigkeit u und emittiere ein Photon der Energie $h\nu$ unter dem Winkel ϑ_γ. Das Teilchen verliert dadurch Energie; es werde angenommen, es bewege sich dann mit der Geschwindigkeit v unter dem Winkel ϑ_e gegenüber der ursprünglichen Richtung (Fig. 4.34). Die Impulserhaltung ergibt

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \cos\vartheta_e + \frac{h\nu}{c}\cos\vartheta_\gamma = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (4.70)$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \sin\vartheta_e - \frac{h\nu}{c}\sin\vartheta_\gamma = 0 \qquad (4.71)$$

und die Energieerhaltung:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + h\nu = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \,. \qquad (4.72)$$

Eliminiert man ϑ_e und schreibt $\nu = \frac{c}{n\lambda}$, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in dem Medium ist, so erhält man

$$\cos \vartheta_\gamma = \frac{c}{nu} + \frac{h(n^2-1)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{2\,m\,u\,n^2\lambda} \,. \qquad (4.73)$$

Dies kann mit Hilfe der de-Broglie-Wellenlänge

$$\Lambda = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{mu} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\cdot\lambda_o \qquad (4.74)$$

wo λ_o = 0,024 Å die Compton-Wellenlänge ist, geschrieben werden als

$$\cos \vartheta_\gamma = \frac{1}{\beta n} + \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right) . \qquad (4.75)$$

Der zweite Term in (4.75) stellt die kleine Rückwirkungskorrektur dar, die beispielsweise für Elektronen an der Čerenkov-Schwelle in Wasser (260 keV, β = 0,75) für $\frac{\Lambda}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ ergibt.

Das Phänomen ist in mancher Hinsicht analog zu der V-förmigen Schockwelle in der Aerodynamik, wenn ein Körper die Schallmauer durchbricht; die Grösse βn steht hier anstelle der Machschen Zahl.

Es ist theoretisch gezeigt worden, dass die gesamte Energie dE, die in einem Bahnelement ds emittiert wird

$$\left(\frac{dE}{ds}\right)_{\check{C}er} = \frac{4\pi^2 z^2 e^2}{c^2}\int\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\nu\, d\nu \qquad (4.76)$$

ist, worin ze die Ladung des bewegten Teilchens und ν die Frequenz der emittierten Strahlung ist. Das Integral erstreckt sich über alle Frequenzen für die $\beta n > 1$. Es stellt sich heraus, dass die Energieabgabe zwar klein ($\sim 10^3$ eV/cm für Glas oder Plexiglas) aber nachweisbar ist, weil eine verhältnismässig grosse Zahl von Lichtquanten emittiert wird.

Die mittlere Zahl der Lichtquanten, die pro cm Weg mit der mittleren Energie

$$h\bar{\nu} = \frac{h}{2}\left(\nu_1 + \nu_2\right) \qquad (4.77)$$

emittiert werden, wobei ν_1 und ν_2 die Grenzfrequenzen der Čerenkov-Strahlung sind, ist nach Integration von (4.76) gegeben als

$$\frac{1}{h\bar{\nu}}\left(\frac{dE}{ds}\right)_{\check{C}er} = \frac{4\pi^2 z^2 e^2}{hc^2}\left(\nu_2-\nu_1\right)\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \qquad (4.78)$$

$$= \frac{2\pi z^2}{137}\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \qquad (4.79)$$

worin $\lambda = \frac{c}{\nu}$ die Wellenlänge im Vakuum und n der mittlere Brechungsindex des Mediums in dem Wellenlängenintervall $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$ ist.

Setzt man $z = -1$, $\beta \approx 1$ für Elektronen in Glas ($n \approx 1,5$), so folgt, dass in dem sichtbaren Bereich (4000 - 8000 Å) etwa 200 Quanten pro cm unter dem Čerenkov-Winkel $\vartheta_\gamma \approx 48^\circ$ emittiert werden. Aus (4.79) folgt, dass die Zahl der Quanten pro Wellenlängeninvervall proportional λ^{-2} ist, dass also die kurzen Wellenlängen, d.h. die blaue Komponente in der Čerenkov-Strahlung überwiegt.

Man beachte an (4.79), dass die Energieabgabe unabhängig von der Ruhemasse m des Teilchens ist und nur von seiner Ladung und seiner Geschwindigkeit abhängt. Diese Tatsache wird in den ČERENKOV-ZÄHLERN benützt, die nicht nur dazu verwendet werden, Teilchen zu registrieren, sondern auch ihre Geschwindigkeit aus dem Čerenkov-Winkel ϑ_γ zu messen.

Wie aus (4.67) ersichtlich ist, können nur Teilchen, deren Geschwindigkeit die Beziehung

$$\beta n > 1 \qquad (4.80)$$

erfüllt, registriert werden. Dies ermöglicht die Unterscheidung Teilchen verschiedener Masse bei gleicher Energie (THRESHOLD DISCRIMINATION).

4.5.2 Der Čerenkov-Zähler

Der Čerenkov-Effekt bietet nicht nur die Möglichkeit zu einem Zähler, der eine genaue Bestimmung von Geschwindigkeit und Ladung erlaubt, sondern besitzt den zusätzlichen Vorteil, sehr kurze Zeiten zu unterscheiden. In einem Medium ohne Dispersion wäre die ideale Dauer eines Lichtpulses in jedem Punkt auf dem Čerenkov-Kegel unendlich kurz; praktisch jedoch beträgt die Zeitauflösung etwa 10^{-10} sec.

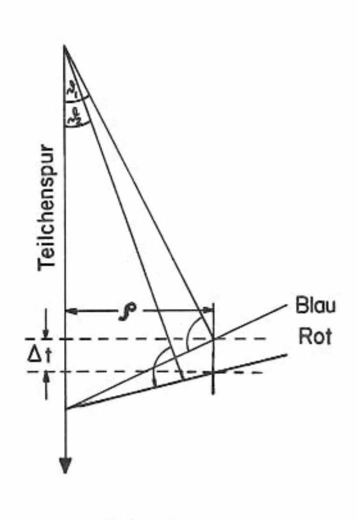


Fig. 4.35

Wenn ein Teilchen sich durch ein Medium mit Dispersion bewegt, dann ist der Čerenkov-Winkel ϑ_γ je nach Wellenlänge verschieden, so dass die Wellenzüge wie in Fig. 4.35 auseinanderlaufen. Die Dauer Δt des Lichtpulses bei Beobachtung längs einer Linie, die parallel zur Bahn in einem Abstand ρ verläuft, ist

$$\Delta t = \frac{\rho}{\beta c}\left(\sqrt{\beta^2 n^2_{\nu_1} - 1} - \sqrt{\beta^2 n^2_{\nu_2} - 1}\right) \qquad (4.81)$$

$$= \frac{\rho}{\beta c}\left(\operatorname{tg}\vartheta_2 - \operatorname{tg}\vartheta_1\right) \qquad (4.82)$$

wobei ν_1 und ν_2 die Grenzfrequenzen des Lichtdetektors, also die für blaues und für rotes Licht, sowie ϑ_1 und ϑ_2 die zugehörigen Čerenkov-Winkel sind.

Beispielsweise beträgt die Dauer eines Lichtblitzes im Abstand 10 cm seitlich von der Bahn eines schnellen Elektrons ($\beta \approx 1$), das sich in Wasser bewegt ($\bar{n}$ = 1,33 und $\bar{\vartheta}$ = 41°) bei den Grenzwellenlängen λ_1 = 6 000 Å → λ_2 = 4 000 Å theoretisch $\Delta t = 5 \cdot 10^{-12}$ sec.

Ein Čerenkov-Zähler besitzt also eine gute Zeitauflösung und eine hohe Ansprechswahrscheinlichkeit, wodurch hohe Zählraten erreichbar sind.

Čerenkov-Zähler können natürlich nicht zum Nachweis von Teilchen geringer Energie ($\beta \ll 1$) verwendet werden; für Glas oder Perspex (n = 1,5) liegt die Schwelle bei

0,175	MeV	für Elektronen
36	MeV	für μ -Mesonen
48	MeV	für π -Mesonen
322	MeV	für Protonen.

Solche Zähler lassen sich in zwei allgemeine Klassen einteilen, und zwar die fokussierenden Zähler, bei denen ein optisches System benützt wird, um die Čerenkov-Strahlung auf eine kleine Fläche zu konzentrieren, wo der Lichtdetektor, beispielsweise ein Photomultiplier aufgestellt ist, und die nicht-fokussierenden Zähler, bei denen das Licht sich zerstreut und nur ein Gesamteffekt gemessen wird.

Eine der ersten Konstruktionen, die von Mather (PR 1951, 84, 181) für die genaue Bestimmung von Protonengeschwindigkeiten am Synchrotron in Berkeley benützt wurde, ist in Fig. 4.36 skizziert. Die Protonen durchsetzen eine optisch ebene Glasplatte von nur 0,67 mm Dicke aus Flintglas (n = 1,88), die so gegen die Richtung des einfallenden Strahls geneigt ist, dass ein Teil des erzeugten Čerenkov-Kegels, der auf die reflektierende Aluminiumsschicht an der Rückseite trifft, senkrecht zur Vorderfläche austritt; auf diese Weise werden Brechungseffekte erster Ordnung eliminiert. Indem das Licht in dieser Anordnung reflektiert wird, kann die registrierende Kamera dicht an der Glasplatte angeordnet werden und trotzdem ausserhalb des Strahls bleiben.

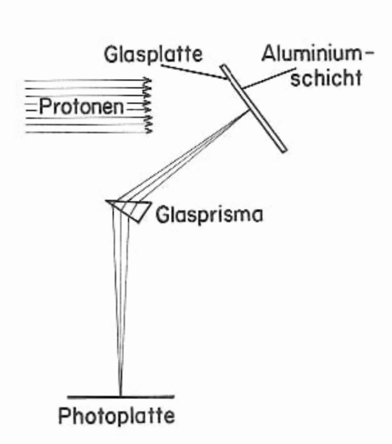
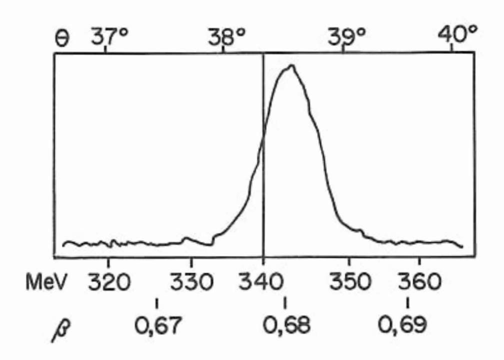


Fig. 4.36

Die Dispersion der Čerenkov-Strahlung wurde in erster Ordnung durch ein Prisma mit geeignetem Keilwinkel kompensiert. Die Ergebnisse in Form einer mikrophotometrischen Spur auf dem Filmbild sind in Fig. 4.37 quantitativ wiedergegeben. Die Auflösung betrug etwa 1%; dieser Wert wird auch von modernen Instrumenten nicht wesentlich übertroffen.



Bei den Experimenten von Chamberlain, Segrè, Wiegand und Ypsilantis (PR 1955, 100, 947), die zur Entdeckung des Antiprotons führten, wurde als Geschwindigkeitsselektor ein etwas anderer Typ eines fokussierenden Čerenkov-Zählers benützt, wie er in Fig. 4. 38 wiedergegeben ist.

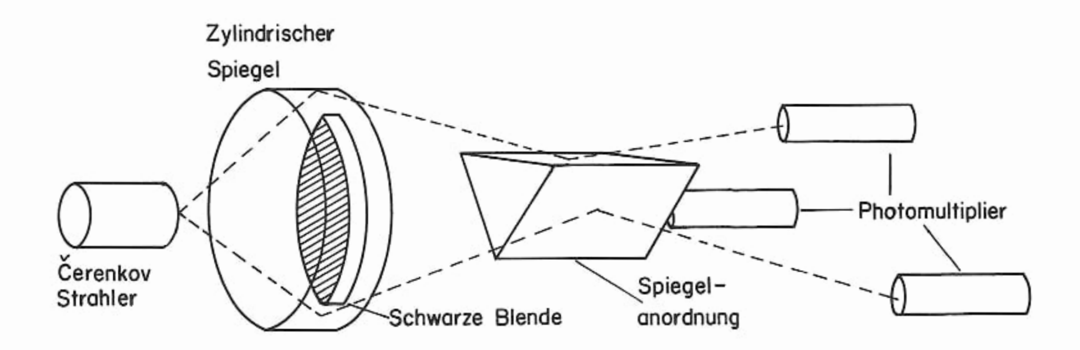


Fig. 4.38

Das Čerenkov-Licht, das in einem massiven Zylinder durch Teilchen erzeugt wird, die sich parallel zu dessen Achse bewegen, wird beim Austreten aus dem Zylinder am flachen Ende gebrochen und breitet sich über die Fläche eines Kegels mit grossem Öffnungswinkel aus. Nach Reflexion an einem zylindrischen Spiegel wird es wieder auf eine kleine Fläche konzentriert. Anstatt das Licht auf der Achse zu fokussieren, wobei der Photomultiplier in dem Partikelstrahl angeordnet werden müsste, wurde hier ein System von drei ebenen Spiegeln benützt, die das Licht in drei Anteile zerlegen und diese auf die Photokathoden von drei getrennten Photomultiplieren richten. Ein schwarzer Schirm wurde dazwischengestellt, um zu verhindern, dass Čerenkov-Strahlung von Teilchen registriert wird, die sich mit wesentlich höherer oder niedrigerer Geschwindigkeit bewegen, als für welche der Zähler justiert ist. Es wurde festgestellt dass die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählers für Teilchen genau der gewünschten Energie 97% betrug. Die Auflösung war so gut, dass die Zählrate auf 3% abfiel, wenn die Geschwindigkeit β von derjenigen um 3% abwich, für die der Zähler justiert war.

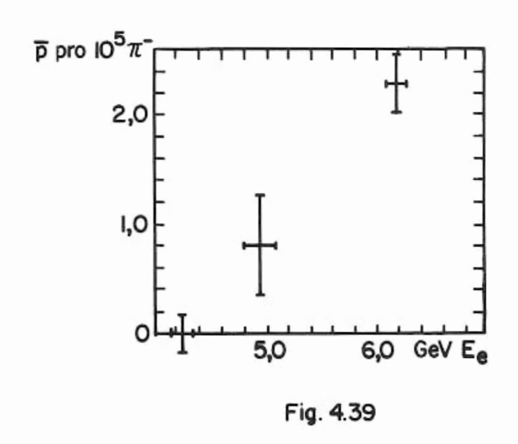


Fig. 4.39

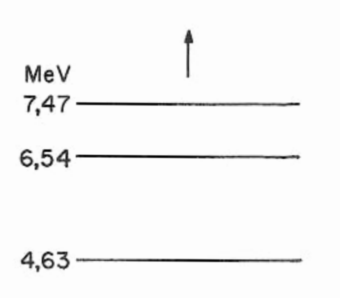
Durch eine geeignete Anordnung von zwei Čerenkov-Zählern waren Segrè et al. in der Lage, Teilchen genau des gesuchten Geschwindigkeits-Impuls-Verhältnisses und der richtigen Ladung für Antiprotonen von dem starken Untergrund aller anderen Teilchen zu unterscheiden, die beim Beschuss eines Kupfertargets mit dem Protonenstrahl des Bevatron entstehen. Sogar bei 6,2 GeV werden etwa 62 000 Mesonen pro Antiproton in dem Target erzeugt. Die Erzeugungsrate von $\bar{p}$ als eine Funktion der Strahlenergie des Bevatrons ist in Fig. 4. 39 gezeigt.

Durch strenge Auswahl der Teilchen, deren Impuls beim Eintritt in den Čerenkov-Zähler, 51 μsec nach der Erzeugung in dem Target 1,19 $\frac{GeV}{c}$ betrug und deren Geschwindigkeit zufolge der Messung mit der Čerenkov-Zähleranordnung genau innerhalb $0{,}75 < \beta < 0{,}78$ lag, erwies es sich als möglich, etwa 60 Antiprotonen nachzuweisen.

5. RADIOAKTIVER ZERFALL

5.1 Energieniveaux im Kern

Ebenso wie die Elektronen im Atom nur fest vorgegebene, diskrete Energiewerte annehmen können, sind auch in einem Viel-Teilchensystem, das beispielsweise jeder beliebige Kern darstellt, nur bestimmte Energiezustände möglich; diese werden ENERGIENIVEAUX genannt. Der Zustand kleinster Energie heisst GRUND-ZUSTAND; alle anderen Zustände besitzen eine ANREGUNGSENERGIE gegenüber diesem. Ferner wird die Energie des Grundzustandes jedes Kernes willkürlich gleich null gesetzt, (obwohl er potentielle Energie besitzt), so dass die Anregungsenergien die Energien bezogen auf den Grundzustand sind. Es gibt nur diskrete Energieniveaux (ganz analog zu den diskreten Energien des harmonischen Oszillators) und ebenso nur diskrete Energiesprünge.



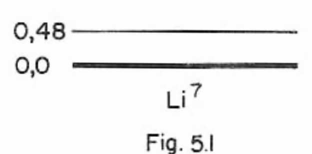


Fig. 5.1

Fig. 5.1 zeigt das "Niveauschema" von Li^7. Für die Aktivierung beispielsweise des zweiten angeregten Zustandes ist eine Energie von 4,63 MeV erforderlich. Der angeregte Kern kann durch Emission von γ-Quanten entweder über den ersten angeregten Zustand als γ-KASKADE (Fig. 5.2) oder direkt in den Grundzustand (Fig. 5.3) zerfallen. Dabei gibt er diese Anregungsenergie an die γ-Quanten ab.

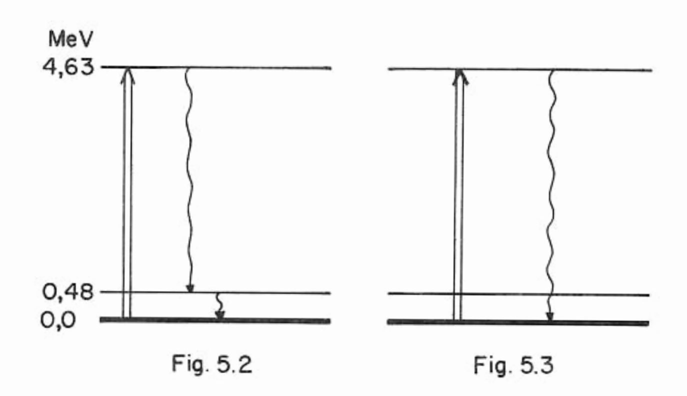


Fig. 5.2 Fig. 5.3

Fig. 5.2:
Die γ-Energien sind
$E_\gamma = 4{,}63 - 0{,}48 = 4{,}15$ MeV
und
$E_\gamma = 0{,}48$ MeV

Fig. 5.3:
Die γ-Energie ist
$E_\gamma = 4{,}63$ MeV

Bei der Aktivierung nimmt der Kern nur genau die betreffende Anregungsenergie auf. Die Energieunschärfe ΔE, die dabei auftritt, heisst die "NIVEAU-BREITE" und ist gegeben durch die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$. Darin ist $\Delta t = \tau$, die Lebensdauer des Niveaus, ein Mass für seine Stabilität gegen diesen Zerfall. τ ist zumeist von der Grössenordnung 10^{-12} sec, so dass die Niveaubreite $\Delta E \sim 10^{-3}$ eV eine im Vergleich zu der Energiehöhe des Niveaus ($\sim$MeV) sehr kleine Grösse ist.

5.2 Zerfallstypen

Im Prinzip begann die Kernphysik mit dem Studium des radioaktiven Zerfalls; man fand, dass die Radioaktivität in spontaner Emission von Teilchen und Strahlung aus angeregten Kernen besteht. Man teilt die Zerfallsprozesse unabhängig davon, ob sie aus künstlicher oder natürlicher Radioaktivität stammen, in verschiedene Kategorien als α-Zerfall, β-Zerfall und γ-Zerfall ein. Schematisch kann man die Typen radioaktiven Zerfalls mit Hilfe der Energieniveaux folgendermassen darstellen:

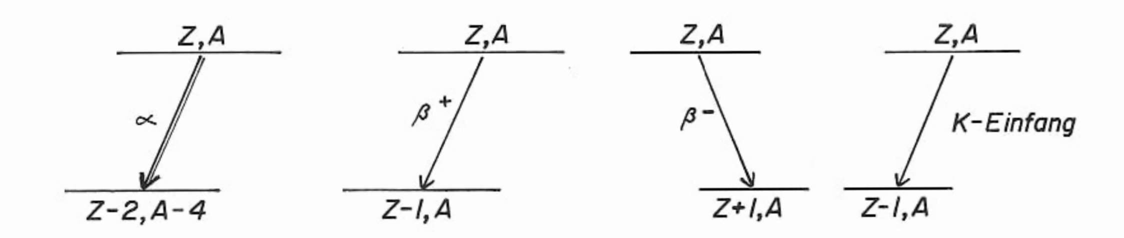
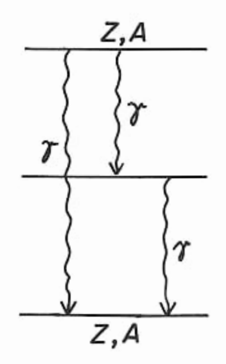


Fig. 5.4

Langsame Zerfälle: ($\tau \sim 10^{-7}$s - 10^{11} y)



Schnelle Zerfälle: ($\tau \sim 10^{-12}$ s)

Fig. 5.5

5.3 Zerfallswahrscheinlichkeit

Experimentell fand man, dass die Intensität der Strahlung aus einer reinen radioaktiven Substanz exponentiell mit der Zeit abfällt. Es stellte sich heraus, dass der Zerfall rein statistischen Charakter hat, d.h. dass er nur makroskopisch, aber nicht mikroskopisch voraussagbar ist, und dass dieses unmittelbar zu der exponentiellen Beziehung führt. Es gibt zwar eine mittlere statistische Zerfallswahrscheinlichkeit für ein radioaktives System das aus einer grossen Zahl angeregter Kerne besteht, aber es ist nicht möglich, für einen einzelnen Kern innerhalb dieser Menge vorauszusagen, wann er zerfällt. Man kann nur eine Wahrscheinlichkeit λ einführen, dass ein bestimmter Kern pro Zeiteinheit zerfällt.

5.4 Radioaktive Zerfallskonstante λ

Wenn die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Kern und Zeiteinheit den Wert λ hat, dann ist in einer Menge N identischer aktiver Kerne die gesamte Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit $N\lambda$; diese Grösse wird als AKTIVITÄT der Quelle bezeichnet. Für ein System, in dem keine neuen aktiven Kerne hinzukommen, wird die Zerfallsrate $\frac{dN}{dt}$ dieser numerisch gleich sein:

$$\boxed{\text{AKTIVITÄT} = N\lambda = -\frac{dN}{dt}} \; . \qquad (5.1)$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass N kleiner wird, wenn die Zeit t zunimmt.

Unter der Annahme, dass die Zerfallswahrscheinlichkeit λ unabhängig von dem Alter des Kerns ist *), kann man (5.1) integrieren und erhält

$$N = N_o e^{-\lambda t} \; . \qquad (5.2)$$

Hierin ist N die Zahl der Kerne, die zur Zeit t existieren und N_o die Zahl der Kerne zur Zeit t = 0. Die ZERFALLSKONSTANTE λ kann im Prinzip aus dem Diagramm log N gegen t gefunden werden. Für praktische Zwecke ist es jedoch leichter, nicht die Zahl der vorhandenen aktiven Kerne, sondern deren Aktivität zu bestimmen; aus den obigen Gleichungen (5.1), (5.2) folgt

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0} \cdot e^{-\lambda t} \qquad (5.3)$$

also

$$A = A_o e^{-\lambda t} \qquad (5.4)$$

wobei A die Aktivität zur Zeit t ist.

Im Diagramm log A gegen t ergibt sich λ unmittelbar (Fig. 5.6). λ ist je nach Kernsorte verschieden.

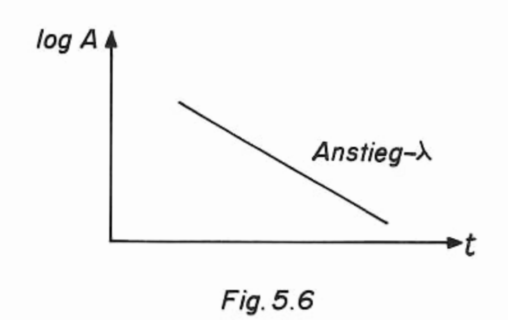


Fig. 5.6

*) Für eine Reihe von Radioisotopen besteht Evidenz, dass sich die λ während der letzten 10^9 Jahre nicht geändert haben; das kann aus pleochroitischen Halos von U und Th in Glimmer geschlossen werden.

5.5 Mittlere Lebensdauer τ

Obwohl ein einzelner Kern eigentlich eine Lebensdauer zwischen 0 und ∞ haben kann, ist die MITTLERE LEBENSDAUER (MEAN LIFETIME) eines Systems aktiver Kerne eine feste und bestimmte Grösse. Da der Zerfall exponentiell verläuft (5.4), ist es zweckmässig, die mittlere Lebensdauer als

$$\tau \equiv \frac{1}{\lambda} \qquad (5.5)$$

zu definieren.

τ bedeutet also die Zeit, innerhalb der die Aktivität auf den e-ten Teil ihres anfänglichen Wertes sinkt.

5.6 Halbwertszeit $T_{1/2}$

Aus praktischen Gründen ist es ausserdem zweckmässig, den Begriff der Zeitdauer einzuführen, in der die Aktivität sich auf die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes verringert. Die HALBWERTSZEIT (HALF-LIFE) ist dann die Zeitdauer, bei der die Chance zu "überleben", für einen einzelnen aktiven Kern gerade 50% beträgt; nach der Zeit $T_{\frac{1}{2}}$ beträgt die Zahl der aktiven Kerne $\frac{1}{2}\, N_o$.

Durch Einsetzen von

$$N = \tfrac{1}{2} N_o \qquad \text{bei} \qquad t = T_{\frac{1}{2}} \qquad (5.6)$$

in (5.2) wird

$$\tfrac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \qquad (5.7)$$

woraus

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}\,. \qquad (5.8)$$

Da $\tau \equiv \frac{1}{\lambda}$ folgt

$$\boxed{T_{1/2} = 0{,}693\ \tau}\,. \qquad (5.9)$$

Man bestimmt experimentell eher λ aus dem Anstieg (Fig. 5.6) als $T_{1/2}$ direkt; dieses Verfahren ist unabhängig vom Untergrund und den sehr verschiedenen Werten von $T_{1/2}$. Mit (5.8) lässt sich $T_{1/2}$ aus λ unmittelbar berechnen.

5.7 Aktivität

Ursprünglich wurde die Einheit der Aktivität auf die Menge Radium-Emanation bezogen, die mit 1 g reinen Radiums im Gleichgewicht steht; sie wurde das CURIE genannt. Die Bestimmung einer Aktivität erforderte dabei den Vergleich mit einem Radiumstandard. Eine solche Definition erwies sich als unzureichend, und die Einheit wurde neu definiert, so dass sie auf alle radioaktiven Kerne Anwendung finden kann:

"1 Curie ist die Menge einer radioaktiven Substanz, in der die Zahl der Zerfälle pro Sekunde $3{,}70 \cdot 10^{10}$ beträgt."

Mit dieser Definition ist die Aktivität von 1 g reinen Radiums genau 1 Curie:

$$1 \text{ g Ra} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{226} = 2{,}6 \cdot 10^{21} \text{ Atome}$$

$$T_{1/2} = 1622 \text{ Jahre} \longrightarrow \lambda = 1{,}42 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}$$

woraus $\lambda N = 1{,}42 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{21} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}$.

Bei den meisten kernphysikalischen Versuchen werden Quellen von der Grössenordnung Millicurie (mc) oder schwächer verwendet.

Der Ausdruck SPEZIFISCHE AKTIVITÄT bezeichnet die Aktivität pro Gramm einer aktiven Quelle.

Die spezifische Aktivität von U^{238} ($T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ y) ist beispielsweise

$$A' = \lambda N = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} \cdot N = 12\,300 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{g.sec}} .$$

5.8 Radioaktiver Zerfall: Tochteraktivität

Man bezeichnet das zerfallende, aktive Element als "Mutterelement" und das Produkt als "Tochterelement"; dieses kann seinerseits wieder aktiv sein und in einen weiteren "Tochterkern" zerfallen etc.

Es sei der Prozess

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C$$

betrachtet, wo λ_A die Zerfallskonstante des Elements A ist, etc. und die Bezeichnungen A, B, C die Zahl der Kerne jeder betreffenden Sorte zur Zeit t angeben. Wenn B stabil, dann ist $\lambda_B = 0$.

Zur Zeit t ist $A\lambda_A$ die Aktivität von A (abnehmend) und $B\lambda_B$ die von B (zunehmend), so dass die gesamte Änderung $\frac{dB}{dt}$ für die Kerne B ist:

$$\frac{dB}{dt} = A\lambda_A - B\lambda_B \qquad (5.10)$$

durch Zerfall von A gewonnen — durch Zerfall von B verloren

$$\frac{dB}{dt} = A_0 \lambda_A e^{-\lambda_A t} - B\lambda_B \qquad (5.11)$$

wobei $A = A_o$ und $B = 0$ bei $t = 0$. Die Lösung lautet mit diesen Bedingungen

$$B = A_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t} \right) . \qquad (5.12)$$

Die Aktivität von B ist $B\lambda_B$ (beachte: nicht dB/dt):

$$B\lambda_B = (A\lambda_A) \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} \left(1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t} \right) . \qquad (5.13)$$

5.9 Spezielle Fälle der Tochteraktivität

5.9.1 Maximale Aktivität des Tochterelements (Ideales Gleichgewicht)

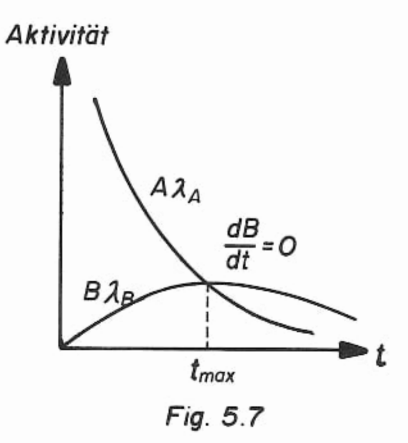


Fig. 5.7

Die Aktivität des Tochterelements ist maximal bei $\frac{dB}{dt} = 0$ zur Zeit $t = t_{max}$ (Fig. 5.7). Differentiation von (5.12) ergibt

$$\lambda_A e^{-\lambda_A t_{max}} = \lambda_B e^{-\lambda_B t_{max}} . \quad (5.14)$$

Also ist

$$\boxed{t_{max} = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A)} \cdot ln\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\right) \equiv \frac{\tau_A \tau_B}{\tau_A - \tau_B} \, ln\left(\frac{\tau_A}{\tau_B}\right)} \cdot \quad (5.15)$$

Aus (5.10) zeigt sich, dass

$$\boxed{B\lambda_B = A\lambda_A \quad \text{wenn} \quad t = t_{max}} , \quad (5.16)$$

weil dann $\frac{dB}{dt} = 0$.

Die Aktivitäten von Mutterelement und Tochterelement sind also zu diesem Zeitpunkt einander gleich (Fig.5.17). Diese momentane Gleichheit bei den Aktivitäten wird als IDEALES GLEICHGEWICHT (IDEAL EQUILIBRIUM) bezeichnet. Vor Erreichen des idealen Gleichgewichtes ($0 < t < t_{max}$) ist die Tochteraktivität kleiner und danach ($t > t_{max}$) grösser als die Mutteraktivität.

Diese Überschneidung (Fig. 5.7) kommt nur dann nicht zustande, wenn t_{max} als Grenzfall bei unendlich langen Zeiten liegt (p. 86).

Der Wert der maximalen Tochteraktivität beträgt

$$B\lambda_B = A_o \lambda_A \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}} = A\lambda_A \quad \text{bei} \quad t = t_{max} . \quad (5.17)$$

Für ungefähr gleiche Lebensdauern ($\tau_A \cong \tau_B$) ist mit $\tau_A = \tau_B(1+\varepsilon)$, wo $\varepsilon \ll 1$, aus (5.15) näherungsweise

$$t_{max} \cong \sqrt{\tau_A \tau_B} . \quad (5.18)$$

5.9.2 Mutterelement kürzerlebig als Tochterelement

Dann ist $\lambda_A > \lambda_B$, so dass man aus (5.12)

$$\mathcal{B} = A_o \, e^{-\lambda_B t} \qquad (5.19)$$

für hinreichend grosse t erhält. Die Aktivität für hinreichend grosse t ist dann

$$\mathcal{B}\lambda_B = A_o \lambda_B \, e^{-\lambda_B t} \, . \qquad (5.20)$$

Es verhält sich so, als wenn sich der Anfangsbestand A_o der Kerne A schnell in einen Anfangsbestand A_o der Kerne B umgewandelt hätte. Wie aus dem Beispiel in Fig. 5.8 ersichtlich ist, wird die Muttersubstanz sehr schnell aufgezehrt; es bleibt dann praktisch nur die Aktivität des Tochterelements. Das Verhältnis der Aktivitäten $\frac{\mathcal{B}\lambda_B}{A\lambda_A}$ steigt mit der Zeit unbegrenzt an.

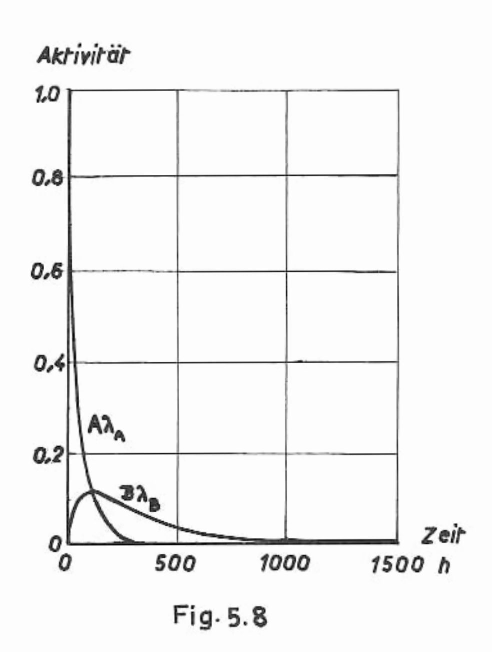


Fig. 5.8

5.9.3 Mutterelement längerlebig als Tochterelement (Fortschreitendes Gleichgewicht)

Das Verhältnis der Aktivitäten von Tochter- zu Mutterelement $\frac{\mathcal{B}\lambda_B}{A\lambda_A}$ steigt, gemäss (5.13) in jedem Fall anfangs an. Wenn $\lambda_A < \lambda_B$ ist, dann erreicht dieses Verhältnis nach Überschreiten des momentanen idealen Gleichgewichts schliesslich den konstanten Wert

$$\boxed{\frac{\mathcal{B}\lambda_B}{A\lambda_A} = \frac{\tau_A}{\tau_A - \tau_B} = const.} \, , \qquad (5.21)$$

der stets grösser als 1 ist. Dieses wird als FORTSCHREITENDES GLEICHGEWICHT (TRANSIENT EQUILIBRIUM) bezeichnet.

Aus (5.13) folgt, dass dazu der Exponent

$$(\lambda_B - \lambda_A)\,t \gg 1 \tag{5.22}$$

sein muss, also

$$0 < \frac{1}{t} \ll \frac{1}{\tau_B} - \frac{1}{\tau_A} \; . \tag{5.23}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$t > \tau_A > \tau_B \; . \tag{5.24}$$

Die Beobachtungszeit t muss also zum Erreichen dieses Gleichgewichtes gross gegenüber den Lebensdauern τ_A, τ_B sein. Obwohl $\tau_A > \tau_B$ sein muss, kann der Unterschied zwischen ihnen beliebig klein sein. -

Als Beispiel ist in dem Zerfall

$$Ra^{228} \xrightarrow[T_{1/2} = 6{,}7\,y]{\beta^-} Ac^{228} \xrightarrow[T_{1/2} = 6\,h]{\beta^-} Th^{228} \xrightarrow[T_{1/2} = 1{,}9\,y]{\alpha} Ra^{224} \xrightarrow{\alpha}$$

das Verhältnis der Aktivitäten im fortschreitenden Gleichgewicht

$$\frac{B\lambda_B}{A\lambda_A} = \frac{Th^{228}}{Ra^{228}} = \frac{T_{1/2}^{(Ra)}}{T_{1/2}^{(Ra)} - T_{1/2}^{(Th)}} = \frac{6{,}7}{6{,}7 - 1{,}9} = 1{,}39 \, .$$

Das Verhältnis ist konstant und grösser als 1 (Fig. 5.9).

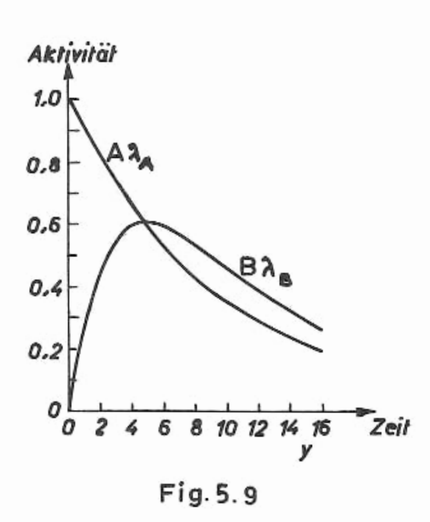


Fig. 5.9

5.9.4 Mutterelement viel längerlebig als Tochterelement

Setzt man in (5.12) die Bedingung $\lambda_A \ll \lambda_B$ ein, so ergibt sich

$$B = A_0\, e^{-\lambda_A t} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \; . \tag{5.25}$$

Das Tochterelement zerfällt dann mit der Halbwertszeit des Mutterelements.

Entsprechend folgt aus (5.13) für das Verhältnis der Aktivitäten

$$\frac{B\lambda_B}{A\lambda_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(1 - e^{-\lambda_B t}\right) . \tag{5.26}$$

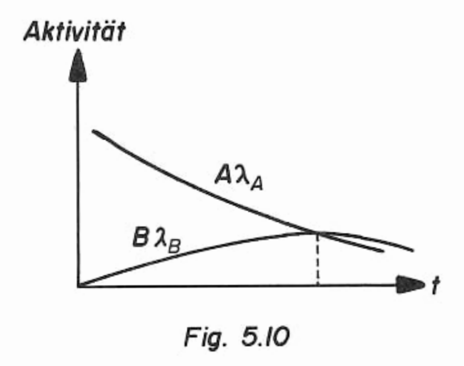


Fig. 5.10

Das ideale Gleichgewicht wird erst bei sehr grossen t erreicht (Fig. 5.10). Im Extremfall von $\lambda_A << \lambda_B$ nähert sich das System nur asymptotisch dem idealen Gleichgewicht (Fig. 5.11),

$$\frac{B\lambda_B}{A\lambda_A} = 1 \ . \qquad (5.27)$$

Da dieses nicht nur momentan besteht, sondern sich auf die Dauer erstreckt, wird dieser Grenzfall des idealen Gleichgewichtes als SÄKULARES GLEICHGEWICHT (SECULAR EQUILIBRIUM) bezeichnet. Der Permanenz dieses Gleichgewichtes entspricht, dass die Lebensdauer des Mutterelements τ_A sehr viel länger als die erreichbare Beobachtungszeit t ist:

$$\tau_A >> t >> \tau_B \ . \quad (5.28)$$

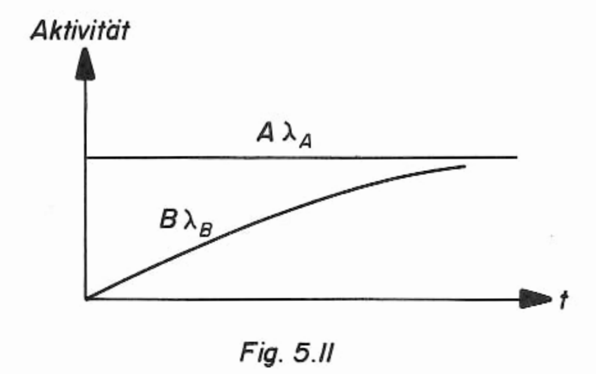


Fig. 5.11

Die Mutteraktivität muss also während der Beobachtungsdauer nahezu konstant sein. Dies gilt einerseits für extrem langlebige, d.h. fast stabile Elemente oder andererseits für Prozesse, bei denen die durch Zerfall bedingte Abnahme der Mutteraktivität ständig durch Erzeugung des Mutterelements aus anderen Prozessen kompensiert wird. Bei konstanter Erzeugungsrate wird diese Konstanz der Mutteraktivität erreicht, wenn die Lebensdauer τ_A des Mutterelements kurz ist gegenüber der Beobachtungszeit. Diese Art säkularen Gleichgewichts kommt beispielsweise bei Bestrahlung im Reaktorstrahl oder im Cyclotron zustande (Fig. 5.12).

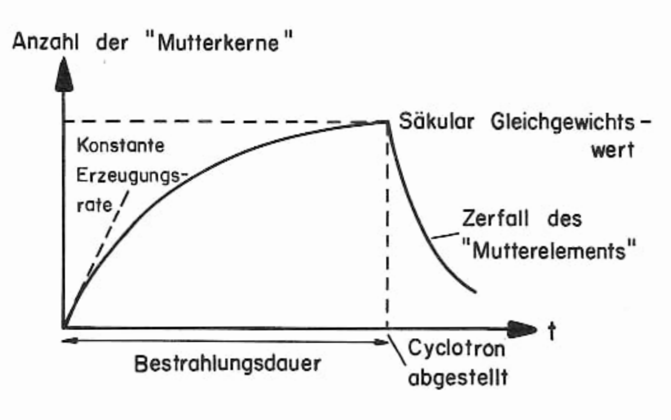


Fig. 5.12

Die Erzeugungsrate der Mutteraktivität $\frac{d(A\lambda_A)}{dt}$ beim Beschuss wird als AUSBEUTE (YIELD) bezeichnet:

AUSBEUTE $\frac{d(A\lambda_A)}{dt}$ = Zeitliche Aktivitätszunahme.

5.9.5 Zusammenfassung

Die unter 5.9 diskutierten Fälle sind im Folgenden nochmals gegenübergestellt:

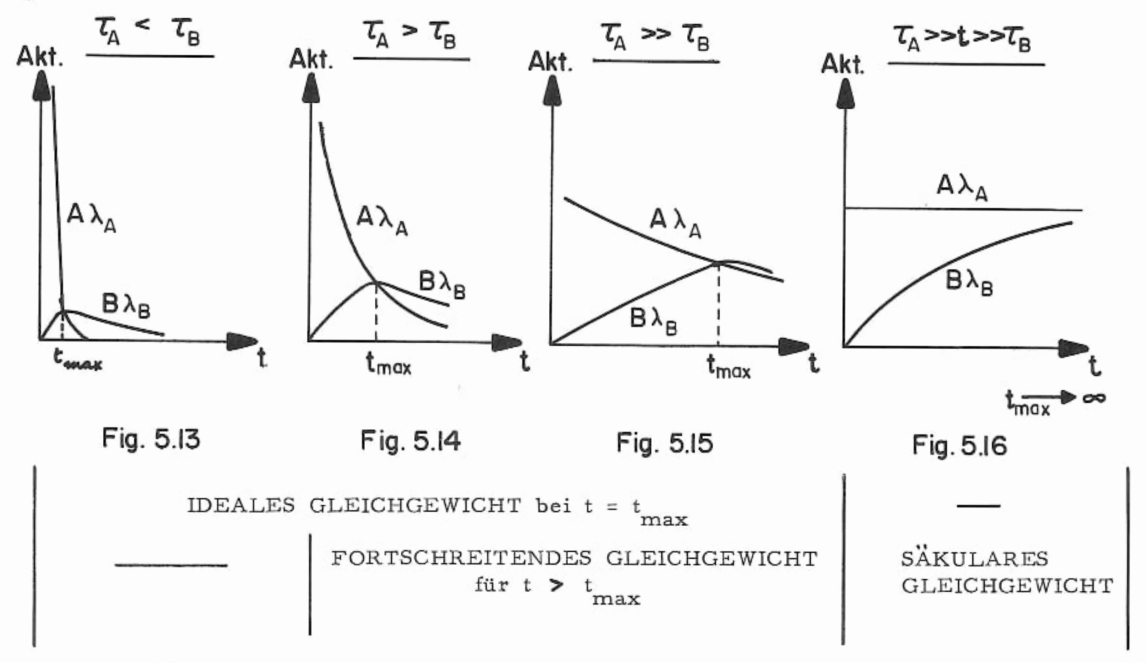


Fig. 5.13 Fig. 5.14 Fig. 5.15 Fig. 5.16

Die obigen Betrachtungen waren auf zweistufige Zerfallsketten beschränkt; bei Zerfallsreihen mit mehr Stufen kombinieren sich diese Zerfallsweisen und ergeben dabei zumeist kompliziertere Verhältnisse.

5.10 Geologisches Alter

Kelvin versuchte das "Alter" der Erde abzuschätzen, indem er annahm, dass sie anfangs eine geschmolzene Masse war, die dann erstarrte und sich abkühlte. Sein Ergebnis von 40 Millionen Jahren war um mindestens den Faktor 10 zu klein im Vergleich zu dem Wert, der geologisch aus Prozessen wie der Salzlagerbildung oder der Ablagerungsrate von Sedimenten errechnet wurde. Dieses falsche Resultat rührte daher, dass die Existenz der Radioaktivität als eine Wärmequelle innerhalb der Erde noch nicht berücksichtigt wurde. Während die Anwesenheit der Radioaktivität Kelvins Rechnung noch umstiess, liefert sie selbst eine wirksame Methode zur Bestimmung des Erdalters, die auf der relativen Häufigkeit von Mutter- und Tochterelementen in Gesteinen beruht.

Aus dem Zerfallsgesetz

$$N = N_0 \, e^{-\lambda_A t} \qquad (5.29)$$

für einen einstufigen Prozess $A \xrightarrow{\lambda_A} B$ (stabil) folgt

$$t = \tau_A \ln \frac{N_0}{N} \, . \qquad (5.30)$$

Wenn ferner B die Zahl der stabilen Tochteratome und A die Zahl der zerfallenden Mutteratome ist, die nach der Zeit t existieren, dann ist

$$t = \tau_A \ln \frac{A+B}{A} \, . \qquad (5.31)$$

Wenn also die Lebensdauer τ_A für einen gegebenen Prozess experimentell bekannt ist, und die Werte von A und B durch massenspektrographische Analyse genau gemessen werden, dann kann das "Alter" t des Gesteins unter der Annahme, dass B = 0 zur "Entstehungszeit" t = 0 war, ermittelt werden.

Die hauptsächlichen Bestimmungsmethoden sind folgende:

(a) Bestimmung des Uran-Blei-Gehalts uranhaltiger Gesteine und entsprechend für Thorium-Gesteine;

(b) Messung des Heliumgehalts von Gesteinen (das He, das aus dem α-Zerfall radioaktiver Elemente entsteht);

(c) photometrische Untersuchung der pleochroitischen Halos in Glimmer, die von α-Strahlen herrühren;

(d) C^{14}-Bestimmung von Substanzen.

Die Werte des Erdalters, die mit diesen verschiedenen Methoden gewonnen wurden, stimmen untereinander recht gut überein, obwohl einige Diskrepanzen und umstrittene Resultate bleiben. Es besteht auch gute Übereinstimmung mit den Abschätzungen des Erdalters aus anderen Methoden, wie z.B. dem Studium der Strahlenschäden oder Untersuchungen über Thermolumineszenz.

Um die gegenwärtigen Befunde und Ergebnisse kurz zusammenzufassen, scheinen die Gesteine aus dem Präcambrium die ältesten zu sein; ihr Alter beträgt etwa $3 \cdot 10^9$ Jahre, was dem Erdalter nahekommt. Die Werte, die man aus Bleibestimmungen in Monaziten und Uranititen erhält, können gegenwärtig als die zuverlässigsten gelten; diese zeigen ein Alter von $2{,}68 \cdot 10^9$ Jahren an.

Es ist interessant, die Werte für irdische Gesteine mit denen für Meteoriten zu vergleichen, wo Argon-Bestimmungen Werte um $4 \cdot 10^9$ Jahre an Chondriten ergeben.

Solche Vergleichsdaten wurden in einer Tabelle von Ahrens zusammengestellt, die hier wiedergegeben ist:

Tab. 5.1

Quelle	Bestimmung	Alter (10^9 y)
Älteste Gesteine	Rhodesia-Manitoba Pb	2,68
	Sr	2,50 - 3,35
	Klerksdorp, Transvaal Pb	2,93
Erde	Pb-Isotope in Bleiblende	4,20
	Pb-Gehalt von Granit	~ 3,5 - 4,0
	Maximales Alter	5,3 - 5,5
Steinmeteoriten	Pb	4,4 - 4,6
	A	4,6
Universum		~ 5

Zusammenfassende Darstellungen finden sich bei:

Rankama : "Isotope Geology" (1954)

Libby : "Radiocarbon Dating" (1955)

Ahrens : (Rep. Progr. Phys. 1956, 19, 80) "Radioactive Methods for Determining Geological Age"

Aldrich & Wetherill : (Ann. Rev. Nucl. Sci. 1958, 8, 257) "Geochronology by Radioactive Decay"

Fowler & Hoyle : (Ann. of Physics 1960, 10, 280) "Nuclear Cosmochronology"

6. BIOLOGISCHE STRAHLENWIRKUNGEN UND STRAHLENSCHUTZ

6.1 Einleitung

Seit der Entdeckung der Röntgenstrahlen (1895), der Herstellung künstlicher Radioisotope (1934) und der Kernspaltung (1939) ist eine zunehmend grosse Zahl von Menschen den Wirkungen ionisierender Strahlungen durch künstliche Quellen ausgesetzt, sowohl als "Beschäftigte" in industriellen und Forschungsbetrieben als auch die Bevölkerung im allgemeinen. Aus der Erfahrung der nachteiligen Wirkungen grösserer Strahlendosen auf lebende Organismen und der Tatsache, dass jede noch so geringe Strahlendosis ungünstige Mutationen in der Erbsubstanz auslöst, ist eine Niedrighaltung der Strahlenbelastung auf ein Minimum unerlässlich.

6.2 Aktivitäts- und Strahlungsdosiseinheiten

Um für biologische Strahlenwirkungen Masseinheiten aufzustellen, ist es zweckmässig, sie im Anschluss an physikalische Einheiten zu definieren. Die dazu dienenden physikalischen Einheiten sind folgende:

Einheit der Radioaktivität: 1 Curie

$1 \text{ c} = 10^3 \text{ mc} = 10^6 \mu\text{c} = 3{,}70 \cdot 10^{10}$ Zerfälle pro Sekunde

(1 c entspricht der Aktivität von 1 g Radium)

Einheit der Strahlendosis für Röntgen- und Gammastrahlen: 1 Röntgen

1 r ist die Intensität von Röntgen- und Gammastrahlung, die in 1 cm^3 Luft bei 0°C und 760 Torr so viele Ionenpaare erzeugt, dass deren Ladung jeden Vorzeichens 1 ESE (1 el. stat. Einh.) beträgt.

(1 r entspricht $1{,}61 \cdot 10^{12}$ Ionenpaaren pro g Luft).

1 rep = 1 Röntgen equivalent physical

Physikalische Einheit der Strahlendosis für beliebige Strahlenarten:

1 rad = 100 erg absorbierte Energie pro g Substanz.

Umrechnung für Photonen bis 3 MeV: 1 rep = 93 erg/g Wasser oder Gewebe
1 rep = 83 erg/g Luft

Die biologische Wirkung ist je nach Strahlenart verschieden. Man führt dafür empirische Faktoren ein, die die relative biologische Wirksamkeit angeben. Diese Einheiten R.B.E. (Relative biological effectiveness) sind auf β - und γ -Strahlen bezogen (Tab. 6.1):

Tab. 6.1: Relative biologische Wirksamkeit und max. Teilchenfluss

Strahlenart	RBE	Teilchenfluss bei 0,3 rem/W
Röntgen- & Gammastrahlen bis 3 MeV	1	1300 $\gamma/\text{cm}^2\text{s}$ von 1 MeV
Betastrahlen (Elektronen)	1	17 $\beta/\text{cm}^2\text{s}$ von 1 MeV
Alphastrahlen (Heliumkerne)	20	0,003 $\alpha/\text{cm}^2\text{s}$ von 5 MeV
Protonen und Deuteronen	10	
Thermische Neutronen	5	600 $\text{n/cm}^2\text{s}$ von 0,02 eV
Schnelle Neutronen	10	22 $\text{n/cm}^2\text{s}$ von 2 MeV

Dann ist die biologische Einheit der Strahlendosis für beliebige Strahlenarten:

Dosis in rem = Dosis in rad multipliziert mit RBE.

(REM = RÖNTGEN EQUIVALENT MAN)

6.3 Strahlungsdosen und Toleranzdosen

Eine Strahlenbelastung von 40 rem für grössere Teile der Bevölkerung verdoppelt auf Grund bisheriger Kenntnisse die spontane und natürliche Mutationsrate und würde im Verlauf mehrerer Generationen eine Degeneration der menschlichen Erbmasse zur Folge haben.

Die "International Commission on Radiological Protection" hat deshalb 1958 folgende maximale Toleranzdosen festgesetzt, nachdem diese im Verlauf jahrzehntelanger Erfahrungen mit Röntgenstrahlen immer wieder herabgesetzt worden waren.

Tab. 6.2: Toleranzdosen für die besonders empfindlichen Organe (Keimdrüsen, Blutbildungszentren, Augen usw.)

Personengruppen	jährl. Toleranzdosis
"Beschäftigte" in industr. und Forschungsbetrieben, Laboratorien etc.	5 rem
Besondere Gruppen der Bevölkerung	1,5 rem
Allgemeine Bevölkerung	0,15 rem

Tab. 6.3: Mittlere Dosen durch natürliche und künstliche Quellen

Quellen	mrem/Jahr
Kosmische Strahlung auf Meereshöhe (auf 1500m: 66; auf 3000m: 125)	40
Natürliche Radioisotope, im Mittel	70
K 40 im menschlichen Organismus	19
C 14 " " "	1
Total der natürlichen Quellen	130
Röntgen-Diagnostik	20
Leuchtzifferuhren	~ 5 *
Schuhdurchleuchtungen	~ 5 *
Atomexplosionen bis 1957	~ 5 *
Fernsehen	< 1
Total der künstlichen Quellen	36

* sehr unsichere Werte

Tab. 6.4: Bevölkerungstoleranzkonzentrationen einiger wichtiger Radioisotopen in der Luft, dem Wasser und im Körper

Radioisotop & Strahlung	Halbwertszeit	Kritisches Organ	Bevölkerungstoleranzkonzentrat. in Atemluft $\mu c/cm^3$	Trinkwasser $\mu c/cm^3$	Körper μc
C^{14} β	5600 Jahre	Fett	10^{-7}	$8 . 10^{-4}$	30
A^{41} β, γ	1,8 Std.	ganzer Körper	$4 . 10^{-8}$	--	--
Kr^{85} β, γ	10,4 Jahre	ganzer Körper	$3 . 10^{-7}$	--	--
Sr^{90} β	28 Jahre	Skelett	10^{-11}	10^{-7}	0,2
J^{131} β, γ	8,1 Tage	Schilddrüse	$3 . 10^{-10}$	$2 . 10^{-6}$	0,07
Cs^{137} β, γ	33 Jahre	ganzer Körper	$2 . 10^{-9}$	$2 . 10^{-5}$	3
Ra^{226} α, γ	1620 Jahre	Skelett	10^{-12}	10^{-8}	0,01
nat. Uran α, γ	$4,5 . 10^9$ Jahre	Rückenmark Lungen	$3 . 10^{-12}$	$2 . 10^{-5}$	0,0005
Pu^{239} α, γ	24400 Jahre	Skelett Lungen	$6 . 10^{-14}$	$5 . 10^{-6}$	0,004
Gemisch von Spaltprodukt.	---	---	10^{-11}	10^{-7}	--

6.4 Biologische Wirkungen

Die biologischen Wirkungen sind, abgesehen von genetischen Mutationen, bei gleicher physikalischer Strahlendosis davon abhängig, ob die Bestrahlung kurzzeitig mit starker Intensität oder über einen langen Zeitraum verteilt mit schwacher Intensität stattfindet. Die Schäden sind bei kurzer, starker Bestrahlung grösser; unter diesen Verhältnissen ergeben sich folgende Wirkungen:

Tab. 6.5 Biologische Wirkungen einer einmaligen Ganzkörperbestrahlung

Dosis 25 r	Maximal zulässige Dosis, bis zu der keine klinische Behandlung der Strahlenschäden erforderlich ist.
100 r	Einige Symptome der "Strahlenkrankheit", seltene Todesfälle.
400 r	Ernste Symptome der Strahlenkrankheit (Erbrechen, Haarausfall, innere Blutungen etc.), Semiletaldosis.
700 r	Tödlicher Ausgang der Strahlenkrankheit in fast allen Fällen.

Diese Symptome hängen mit der Schädigung oder Zerstörung von Körperzellen oder Geschlechtszellen zusammen. Die entsprechenden biologischen Strahlenwirkungen und medizinischen Anwendungen sind in Tab. 6.6 zusammengestellt:

Tab. 6.6: Biologische Strahlenwirkungen und medizinische Anwendung

Dosis	Biologische Wirkungen	Medizinische Anwendung
schwach (mr - r)	Schädigung einiger Zellen, vor allem des Zellkerns a) somatische Mutationen in den Körperzellen (Krebs, Leukämie, etc.) b) genetische Mutationen in den Geschlechtszellen	Diagnostik (Radiographie, Radioskopie, etc.) Unerwünschte biologische Wirkungen in den betroffenen Organen als Nebeneffekt
stark (100 r - 1000 r)	Zerstörung von Körperzellen vor allem während der Phase einer Zellteilung (Mitose)	Therapie (Krebstherapie) Unerwünschte biologische Schäden in den bestrahlten Organen als Nebeneffekt

Über die Vorsichtsmassnahmen beim Arbeiten mit radioaktiven Isotopen werden vom Eidg. Gesundheitsamt in Bern in einer Verordnung die nötigen Bestimmungen und Empfehlungen herausgegeben. Bisher dienten entsprechende Richtlinien:

"Richtlinien für den Schutz gegen ionisierende Strahlen",

herausgegeben vom Eidg. Gesundheitsamt in Bern (1960).

Literatur:

B. Rajewsky, Wissenschaftliche Grundlagen des Strahlenschutzes, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1957

H. Fritz-Niggli, Strahlenbiologie, G. Thieme Verlag, Stuttgart 1959

G. Wagner, Dangers des rayonnements et comment y parer, Bulletin d'information No. 3/4 1959 du Délégué aux questions atomiques

Richtlinien für den Schutz gegen ionisierende Strahlen, herausgegeben vom Eidg. Gesundheitsamt in Bern, 1960 (daselbst Literaturverzeichnis)

Reactor Handbook, Physics, p. 629, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955

Atomenergie und Strahlenschutz in der Schweiz, herausgegeben von der Schweiz. Vereinigung für Atomenergie, (FABAG-Fachschriften-Verlag, Zürich 1), 1963.

7. ALPHA - ZERFALL

7.1 Einleitung

Dieser radioaktive Zerfallstyp, der historisch als erster entdeckt und untersucht wurde, liefert beträchtliche Information über Kerneigenschaften. Beispielsweise bietet der α-Zerfall eine Möglichkeit, R_o zu bestimmen.

7.2 Semiempirische Massenformel

Die Systematik des α-Zerfalls kann aus der semiempirischen Massenformel gewonnen werden. Diese gestattet es, vorauszusagen in welchen Fällen α-Zerfall energetisch möglich ist.

Die totale Energie des α-Zerfalls, d.h. der Q-Wert des Zerfallsprozesses ist

$$Q_\alpha = \left[M(Z,A) - M(Z-2, A-4) - M(He^4)\right] c^2. \qquad (7.1)$$

Da sich weder die totale Zahl der Neutronen noch die der Protonen beim Zerfall ändert, kann (7.1) darauf reduziert werden, dass sie nur die Bindungsenergien enthält. Diese sind aus der semiempirischen Massenformel berechenbar. Somit wird

$$Q_\alpha = B(He^4) + B(Z-2, A-4) - B(Z,A). \qquad (7.2)$$

Der Weizsäckersche Ausdruck kann für den α-Zerfall vereinfacht werden: Die Differenz zwischen den δ's kann vernachlässigt werden; die totale Bindungsenergie des α-Teilchens beträgt 28,3 MeV, und anstelle von

$$\Delta B \equiv B(Z-2, A-4) - B(Z,A) \qquad (7.3)$$

kann man näherungsweise schreiben:

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial Z} \cdot \Delta Z + \frac{\partial B}{\partial A} \cdot \Delta A = -2\frac{\partial B}{\partial Z} - 4\frac{\partial B}{\partial A}. \qquad (7.4)$$

Dann ist

$$Q_\alpha \cong 28,3 - 4a_v + \frac{8}{3}\frac{a_s}{A^{1/3}} + 4\frac{a_c Z}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4a_a\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 \qquad (7.5)$$

wobei A und Z hier die Mittelwerte zwischen Mutter- und Tochterkern darstellen und die a-Koeffizienten ihre übliche Bedeutung (p. 14) haben.

Numerisches Einsetzen ergibt, dass $Q_\alpha > 0$ für alle $A \geqslant 150$; nach diesen Energiebetrachtungen sollten also die schweren Kerne (etwa ab Samarium) instabil sein und α-Teilchen emittieren können.

7.3 Beziehung zwischen α -Energie und Halbwertszeit

Die Halbwertszeit hängt sehr stark von der α -Energie ab, wie sich aus den folgenden Beispielen ersehen lässt:

Tab. 7.1

Kern	E_α	$T_{1/2}$
U^{238}	4,1 MeV	$4,5 \cdot 10^9$ y
Ra^{226}	4,7	$1,62 \cdot 10^3$ y
Po^{210}	5,3	138 d
Po^{214}(RaC')	7,7	$1,6 \cdot 10^{-4}$ s
Po^{212}(ThC')	8,8	$3 \cdot 10^{-7}$ s

Aus Untersuchungen über die Reichweiten R der α -Teilchen und die radioaktiven Zerfallskonstanten $\lambda \equiv \frac{0,693}{T_{1/2}}$ fanden empirisch Geiger und Nuttall eine einfache, lineare Beziehung zwischen log λ und log R, die in Fig. 7.1 dargestellt ist.

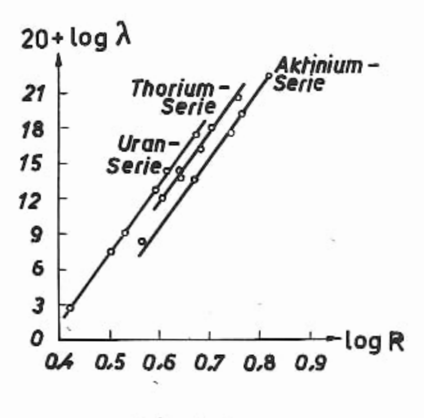


Fig. 7.1

Die Reichweite R ist ein direktes Mass für die α -Energie E_α : man fand, dass drei Zerfallsreihen (nämlich die Uran-, Thorium- und Aktiniumreihe) unterschieden werden können.

Geiger zeigte ferner, dass R näherungsweise mit der Anfangsgeschwindigkeit v der α -Teilchen durch

$$R \cong \text{const.}\, v^3 \qquad (7.6)$$

verknüpft ist; diese Beziehung heisst "GEIGERSCHE REGEL".

Dann folgt aus der "GEIGER-NUTTALL-REGEL"

$$\log \lambda = a + b \log R \qquad (7.7)$$

dass zwischen λ und v eine Beziehung der Form

$$\log \lambda = c + d.v^n \qquad (7.8)$$

besteht, mit c und d als Konstanten und n zwischen 1 und 2 liegend.

Erst mit dem Aufkommen der Wellenmechanik wurde es möglich, eine solche Beziehung zwischen λ und E_α auf Grund von Überlegungen über die Durchdringbarkeit von Potentialbarrieren theoretisch herzuleiten.

7.4 Kern-Potentialbarrieren

Die Kraftwirkung eines Kernes auf ein Teilchen kann durch den Verlauf des "KERNPOTENTIALS" dargestellt werden. Die Form eines solchen Potentials wird durch elektrostatische Kräfte und durch Kernkräfte kurzer Reichweite bestimmt; es handelt sich um die Darstellung der potentiellen Energie als Funktion des radialen Abstandes vom Mittelpunkt des Kerns, wie es qualitativ in Fig. 7.4 angedeutet ist:

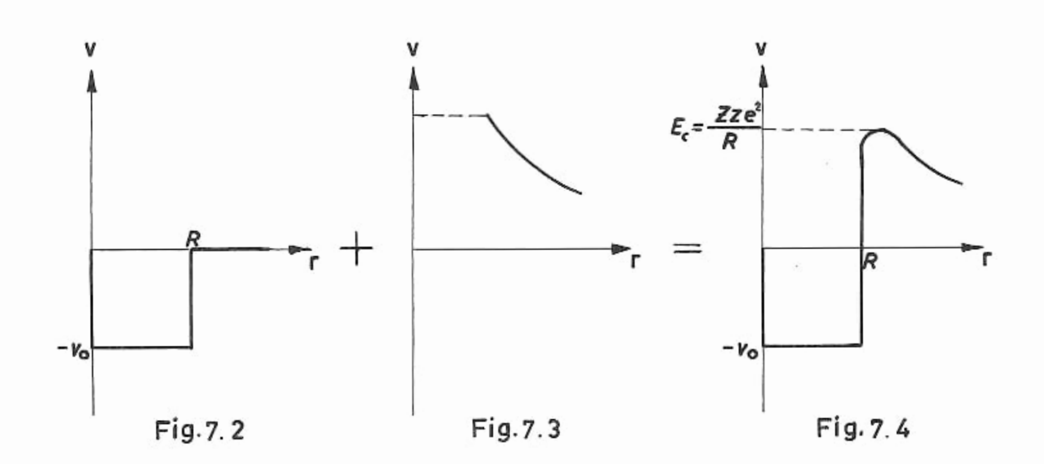


Fig. 7.2 Fig. 7.3 Fig. 7.4

Dieses Diagramm ist nur als eine eindimensionale Darstellung eines kugelsymmetrischen Potentials zu verstehen. Das Potential selbst aber erstreckt sich in drei Dimensionen, wobei die obige Darstellung als orthogonale Abbildung V(r) auf r anzusehen ist.

7.5 Durchdringbarkeit von Potentialbarrieren

(a) Klassisch ist für einen Körper, der nicht genügend Energie besitzt, um den höchsten Punkt einer Barriere zu überschreiten, das Durchdringungsvermögen gleich null. Wenn die Energie des Körpers der Masse M kleiner als Mgd ist, kann die Erhebung (Fig. 7.5) nicht überwunden werden. Nur wenn die Energie grösser als Mgd ist, wird die Transmissionswahrscheinlichkeit verschieden von null, und zwar springt sie dann auf 1.

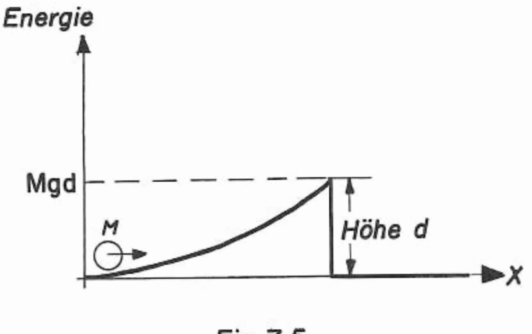


Fig. 7.5

(b) Quantenmechanisch ist indessen für ein Teilchen mit einer Energie, die kleiner als die Höhe der Barriere ist, die Wahrscheinlichkeit, die Barriere zu überwinden, nicht gleich null.

Das lässt sich qualitativ aus der Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar \qquad (7.9)$$

zeigen. Die Unbestimmtheit des Impulses kann nicht grösser sein als der Betrag des Impulses selbst, so dass

$$\Delta p \leq p \ . \qquad (7.10)$$

Dann ergibt sich

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{Mv} = \lambda\!\!\!^{-} \qquad (7.11)$$

wobei $\lambda\!\!\!^{-}$ die reduzierte de-Broglie-Wellenlänge ist.

Wenn die Energie des Teilchens zwar niedriger als die Höhe der Barriere, jedoch seine de-Broglie-Wellenlänge von gleicher Grössenordnung wie die Barrierenbreite bei dieser Energie ist, dann gibt es eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen auf jeder der beiden Seiten der Barriere befinden kann, d.h., dass es durch "TUNNELEFFEKT" die Barriere durchschreiten kann.

7.6 Transmission durch eine Rechteckbarriere

Ein Potential, das in dieser Darstellung die Form eines Rechtecks hat (Fig. 7.6), wird als RECHTECKBARRIERE, bzw. im Falle eines kugelsymmetrischen Potentials als TOPFPOTENTIAL oder KASTENPOTENTIAL bezeichnet, das man sich gewissermassen durch Rotation um die V-Achse anschaulich machen kann.

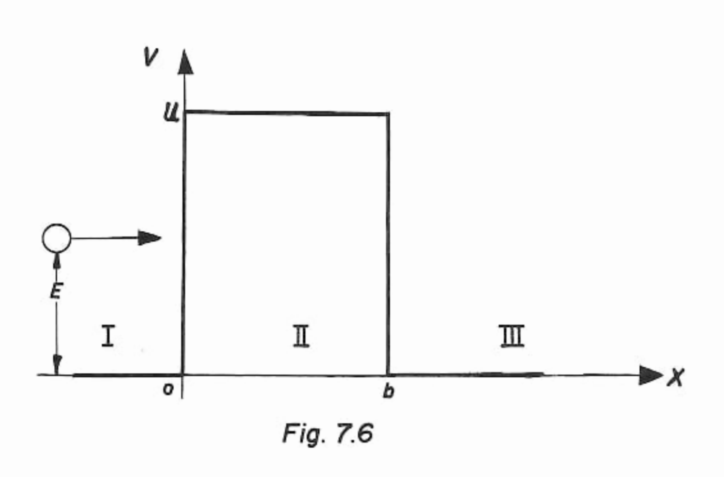


Fig. 7.6

Es sei das rechteckige Potential von Fig. 7.6 mit den Charakteristiken

V = O	$-\infty < x \leq 0$	Bereich I
V = U	$0 \leq x \leq b$	Bereich II
V = O	$b \leq x < \infty$	Bereich III

und ein Teilchen mit der kinetischen Energie E kleiner als das Potential U angenommen, für welches die Barriere klassisch undurchdringlich ist, welches aber quantenmechanisch eine gewisse "TRANSPARENZ" hat.

Wird das Teilchen, das auf die Potentialbarriere trifft, als eine Welle mit der de-Broglie-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{Mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{2ME}}$ und der Amplitude A angesehen (Fig. 7.7), dann wird bei x = O ein Teil dieser Welle mit der Amplitude B_1 reflektiert, und ein Teil mit der Amplitude A_2 tritt hindurch. In ähnlicher Weise wird von der Welle, die den Bereich II durchläuft und auf die andere Potentialfläche bei x = b "von innen" trifft, ein Teil mit der

Amplitude B_2 reflektiert und der Rest mit der Amplitude A_3 hindurchgelassen.

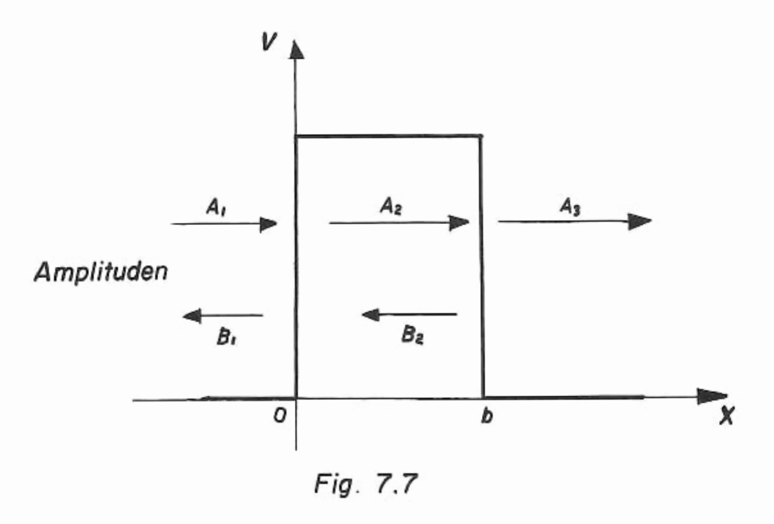


Fig. 7.7

Die TRANSPARENZ der Barriere ist dann definiert als

$$T = \frac{\text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte der durchdringenden Welle}}{\text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte der einfallenden Welle}}$$

$$= \frac{\text{Durchgelassene Intensität}}{\text{Einfallende Intensität}}$$

Man kann zeigen, dass die Transparenz hier numerisch gleich $\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$ ist. Die Wellenfunktion für einfallende Teilchen im Bereich I (in positiver x-Richtung) ist $A_1 e^{ik_I x}$, die für reflektierte im Bereich I (in negativer x-Richtung) $B_1 e^{-ik_I x}$. Die totale Wellenfunktion für den Bereich I erhält man durch lineare Überlagerung dieser beiden:

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x} \qquad (7.12)$$

mit der Wellenzahl

$$k_I \equiv \frac{1}{\lambda_I} = \sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}} \quad . \qquad (7.13)$$

Ähnlich für Bereich III:

$$\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x} \qquad (7.14)$$

mit $k_I = k_{III}$ in diesem Problem.

Diese ψ's aus (7.12) und (7.14) sind die Lösungen der eindimensionalen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichungen für die Bereiche I und III:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2M}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad . \qquad (7.15)$$

Für den Bereich II ist der Energieterm in der entsprechenden Schrödinger-Gleichung $E - V = E - U = - E_B$, wo E_B als eine Bindungsenergie angesehen werden kann, so dass die Lösung lautet:

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II}x} + B_2 e^{-ik_{II}x} \qquad (7.16)$$

mit

$$k_{II} = \sqrt{\frac{2M(E-U)}{\hbar^2}} = \sqrt{-\frac{2ME_B}{\hbar^2}} \; . \qquad (7.17)$$

Man sieht aus (7.17), dass k_{II} rein imaginär für $E < U$ ist. Aus Gründen mathematischer Bequemlichkeit werde eine reelle Wellenzahl k_{II}' eingeführt:

$$k_{II}' = i k_{II} = \sqrt{\frac{2ME_B}{\hbar^2}} \; . \qquad (7.18)$$

Dann wird die Wellenfunktion für den Bereich II:

$$\psi_{II} = A_2 e^{k_{II}' x} + B_2 e^{-k_{II}' x} \; . \qquad (7.19)$$

Die Ausdrücke (7.12), (7.19), (7.14) für ψ_I, ψ_{II} und ψ_{III} enthalten, wie man sieht, eine bekannte Amplitude A_1 (die auf 1 normiert werden kann) und vier unbekannte Amplituden B_1, A_2, B_2, A_3, die für die Berechnung der Transparenz T bestimmt werden müssen.

Da die Wellenfunktionen physikalische Vorgänge charakterisieren, ist es vernünftig, für sie und ihre ersten Ableitungen stetigen Verlauf an den Berührungspunkten $x = 0$, $x = b$ der verschiedenen Bereiche zu verlangen. Diese Forderungen können direkt aus einer graphischen Darstellung der Wellenfunktion in jedem der drei Bereiche abgelesen werden (Fig. 7.8).

Dass ψ_{II} keine periodische Funktion ist, liegt daran, dass k_{II} imaginär und k_{II}' reell ist.

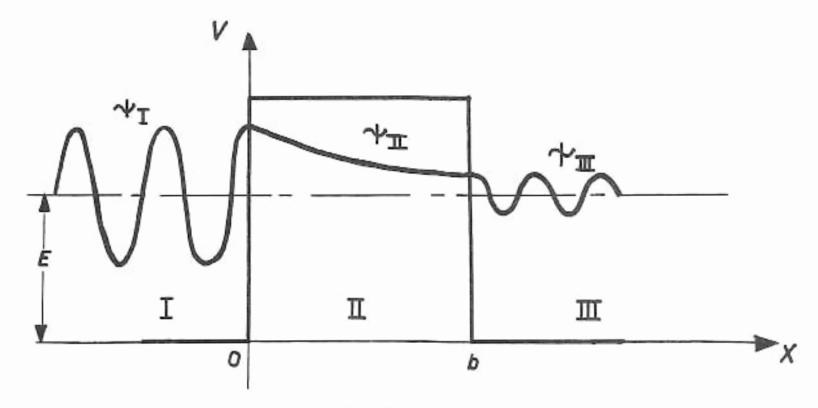


Fig. 7.8

Die Stetigkeitsbedingungen: ergeben vier Gleichungen:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \qquad A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{7.20}$$

$$\psi_{II}(b) = \psi_{III}(b) \qquad A_2 e^{k'_{II} b} + B_2 e^{-k'_{II} b} = A_3 e^{ik_{III} b} = A_3 e^{ik_I b} \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(0) \qquad ik_I (A_1 - B_1) = k'_{II}(A_2 - B_2) \tag{7.22}$$

$$\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(b) = \frac{\partial \psi_{III}}{\partial x}(b) \qquad k'_{II}(A_2 e^{k'_{II} b} - B_2 e^{-k'_{II} b}) = ik_{III} A_3 e^{ik_{III} b} . \tag{7.23}$$

Die Gleichungen (7.20) bis (7.23) können aufgelöst werden nach

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{q}{ip}\right) A_2 + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{q}{ip}\right) B_2 \tag{7.24}$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2} A_3 e^{ikb}\left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-\frac{qb}{\hbar}} \tag{7.25}$$

$$B_2 = \tfrac{1}{2} A_3 e^{ikb}\left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{\frac{qb}{\hbar}} \tag{7.26}$$

mit

$$p \equiv \sqrt{2ME} \quad ; \quad q \equiv \sqrt{2ME_B} \quad ; \; k \equiv k_I = k_{III} . \tag{7.27}$$

Dann ist nach Substitution von (7.25) und (7.26) in (7.24)

$$A_1 = \tfrac{1}{4} A_3 e^{ikb}\left\{\left(1 + \frac{q}{ip}\right)\left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-\frac{qb}{\hbar}} + \left(1 - \frac{q}{ip}\right)\left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{\frac{qb}{\hbar}}\right\} . \tag{7.28}$$

Führt man die Vereinfachung ein, dass

$$\frac{p}{q} \equiv \sqrt{\frac{E}{E_B}} \cong 1 \quad \text{und} \quad e^{-\frac{qb}{\hbar}} \ll 1 , \tag{7.29}$$

dann wird bei Vernachlässigung eines Faktors ½

$$A_1 \cong A_3 \cdot e^{ikb} \cdot e^{\frac{qb}{\hbar}} \tag{7.30}$$

und die Transparenz

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \cong e^{\left|-2ikb - \frac{2qb}{\hbar}\right|} \cong e^{-\frac{2qb}{\hbar}} . \tag{7.31}$$

Man muss den Realteil der Exponentialfunktion nehmen, um eine physikalisch sinnvolle Transparenz zu erhalten:

$$\boxed{T \cong e^{-2\sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}(U-E)}\cdot b}} . \tag{7.32}$$

Dieses wird als "GAMOW-FORMEL" bezeichnet. Aus (7.32) folgt, dass für kleine Massen, kleine Potentialhöhe (U - E) und kleine Potentialbreite b, die Transparenz gross ist, so dass z.B. Elektronen Barrieren leicht durchdringen. Im klassischen Grenzfall ($\hbar \to 0$) wird die Transparenz, wie erwartet, null.

7.7 Barriere beliebiger Form

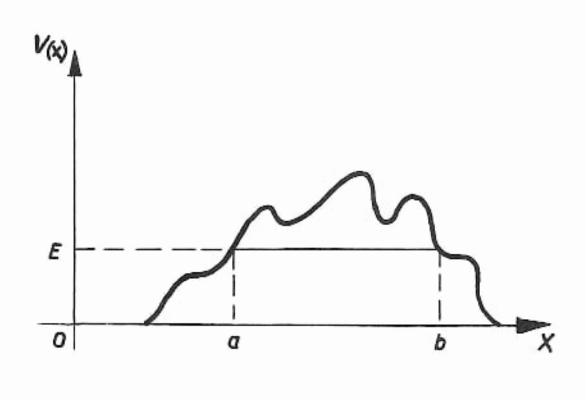


Fig. 7.9

In roher Näherung kann eine Barriere mit beliebiger Form wie eine rechteckige behandelt werden, wenn durch Integration eine "gemittelte Höhe" eingeführt wird (Fig. 7.9), so dass

$$T \cong e^{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}[V(x)-E]}\cdot dx} . \qquad (7.33)$$

7.8 Transmission durch die Kern-Potentialbarriere

7.8.1 Radiale Wellengleichung

Anstelle der eindimensionalen Rechteckbarriere werde jetzt eine kugelsymmetrische Barriere betrachtet. Das wird bequemer erreicht durch die Darstellung der Schrödinger-Gleichung in Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) und Aufspaltung der Wellenfunktion ψ in Funktionen ihrer einzelnen Variablen:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) . \Theta(\vartheta) . \Phi(\varphi) . \qquad (7.34)$$

Die Schrödinger-Gleichung lässt sich dann in drei Differentialgleichungen aufspalten, von denen hier allein die RADIALE WELLENGLEICHUNG, die nur r enthält, von Interesse ist:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{df(r)}{dr}\right] - \frac{2M}{\hbar^2}\left[V(r) - W + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2}\right] f(r) = 0 . \qquad (7.35)$$

W sei die Gesamtenergie des Teilchens. Aus Gründen mathematischer Bequemlichkeit wird eine MODIFIZIERTE RADIALE WELLENFUNKTION

$$\chi \equiv r . f(r) \qquad (7.36)$$

eingeführt, die die MODIFIZIERTE RADIALE WELLENGLEICHUNG ergibt

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{2M}{\hbar^2}\left[V(r) - W + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2}\right]\chi = 0 . \qquad (7.37)$$

r ist die radiale Entfernung vom Potentialursprung und M die reduzierte Masse des zusammenstossenden Systems.

7.8.2 Zentrifugalbarriere

Beim Vergleich von (7.37) mit dem eindimensionalen Fall

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2M}{\hbar^2}(V - W)\psi = 0 \qquad (7.38)$$

ist zu erkennen, dass das Potential V durch

$$V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} \qquad (7.39)$$

ersetzt worden ist. Der zweite Term hierin,

$$\mathcal{U}_z \equiv \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} \qquad (7.40)$$

hat ebenfalls die Dimension einer Energie. Sein Nenner hat die Form eines klassischen Trägheitsmomentes, während sein Zähler die Form des Quadrates eines Bahndrehimpulses hat. Er steht also in enger Analogie zur klassischen Rotationsenergie und lässt sich ausserdem als eine quantenmechanische Rotationsenergie der zusammenstossenden Teilchen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt auffassen. *) Seine physikalische Wirkung ist, dass er die Potentialbarriere erhöht; deshalb wird die zusätzliche Barriere, die durch den zweiten Potentialterm in (7.39) dargestellt wird, bei Stoss- und Zerfallsproblemen die "ZENTRIFUGAL-BARRIERE" genannt. Sie ist unabhängig von elektromagnetischen Wechselwirkungen und tritt deshalb auch beim Stoss mit ungeladenen Teilchen wie Neutronen auf; sie bedeutet eine verminderte Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion, z.B. Streuung.

---

*) Die klassische Zentrifugalkraft wäre

$$F = Mr\omega^2 = \frac{L^2}{Mr^3}, \qquad (7.41)$$

wobei $L = Mr^2\omega$ der Bahndrehimpuls des Teilchens ist, mit ω als Rotationsgeschwindigkeit. Das zugehörige Potential ist

$$\mathcal{U}(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} \qquad (7.42)$$

da

$$F = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = \frac{L^2}{Mr^3} \qquad (7.43)$$

ist. Vergleicht man (7.42) mit (7.40), dann wird es ersichtlich, dass bei dem Übergang zur quantenmechanischen Formulierung

$$L^2 \longrightarrow \ell(\ell+1)\hbar^2 \qquad (7.44)$$

gilt. Es stellt sich also heraus, dass das "quantenmechanische Quadrat" die Form $\ell(\ell+1)$ statt einfach ℓ^2 hat. Ebenso ist das "Quadrat" des Eigendrehimpulses nicht s^2, sondern $s(s + 1)$.

7.8.3 Coulomb-Barriere

Kehren wir zu den rein elektrostatischen Potentialbarrieren zurück: Ein geladenes Teilchen trifft bei der Annäherung an einen Kern auf einen "Potentialberg" der Höhe (Fig. 7.10)

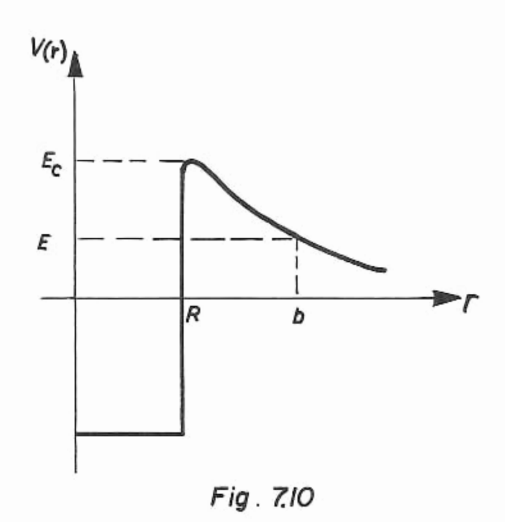


Fig. 7.10

$$E_c = \frac{Zz\,e^2}{R} . \qquad (7.45)$$

Z.B. ist bei der Annäherung an einen Urankern für ein Proton

$$E_c = 14,5 \text{ MeV},$$

und für ein α -Teilchen

$$E_c = 29 \text{ MeV}.$$

Die Transmission durch die Potentialbarriere bei einer gewissen Energie E hängt nicht nur von der Höhe der Barriere ab, sondern auch von ihrer Breite (b - R). Es lässt sich zeigen, dass die Energieunschärfe Δ E, die zu einer Impulsunschärfe Δ p gehört, die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation befolgt. Denn wenn der Impuls zwischen p und p + Δ p und die dazugehörige Energie zwischen E und E + Δ E liegt, dann ist in erster Näherung ($\Delta p \ll p$ und $\Delta E \ll E$ angenommen)

$$E + \Delta E = \frac{(p + \Delta p)^2}{2M} \cong \frac{p^2}{2M} + \frac{p\,\Delta p}{M} \cong E + v\,\Delta p , \qquad (7.46)$$

wo v = p/M die Teilchengeschwindigkeit bei dem Impuls p ist.

Für eine α -Energie E_α = 6 MeV beträgt die Geschwindigkeit $v \approx 10^9$ cm/sec - das ist zu schnell, als dass das Teilchen innerhalb der Potentialbarriere festgehalten werden kann.

Man hat die Beziehung

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{b} . \qquad (7.47)$$

Also ist

$$\Delta E = v\,\Delta p \approx v \cdot \frac{\hbar}{b} . \qquad (7.48)$$

Die entsprechende Zeitunschärfe ist

$$\Delta t = \frac{b}{v} , \qquad (7.49)$$

welche zu der erwarteten Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} \qquad (7.50)$$

führt.

Es ist, als wenn eine Unbestimmtheit in der Energie auftritt, die für einen Moment die Höhe der Coulomb-Barriere übersteigen und das α -Teilchen in die Lage versetzen kann, die Barriere zu überwinden. Diese anschauliche Darstellung ist der des Tunneleffektes vollkommen gleichwertig.

Bezüglich des α -Zerfalls, bei dem ein α -Teilchen in einem Kern entsteht und die Coulomb-Barriere, innerhalb der es sich anfangs befindet, via Tunneleffekt durchdringt, kann die Transparenz (7. 33) der Barriere

$$T = e^{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}(U-E)}\, . dr} \qquad (7.51)$$

geschrieben werden, wobei U jetzt die Höhe E_c der Coulomb-Barriere und r die radiale Koordinate darstellt. (7. 51) bestimmt die Chance des α -Teilchens, den Kern zu verlassen (die klassisch gleich null wäre).

Man betrachte eine grosse Anzahl α -aktiver Kerne. Es sei angenommen, dass zur Zeit t = 0 die α -Teilchen (als Wellen der anfänglichen Intensität I_o angesehen) die Barriere zu durchqueren versuchen. Ein Teil T von ihnen wird hindurchgehen (T = Transparenz) und die Intensität der in den Kernen zurückreflektierten Welle ist nach diesem "ersten Versuch" $(1 - T)I_o$. Nach n solchen "Versuchen" ist die Intensität

$$I_n = (1 - T)^n I_o = I_o\, e^{n \, . \ln(1-T)} . \qquad (7.52)$$

Für sehr kleine T, ist näherungsweise

$$\ln (1 - T) \cong - T \qquad (7.53)$$

so dass

$$I_n = I_o\, e^{-nT} . \qquad (7.54)$$

Die mittlere Zeit für die Durchquerung des Kerns, d.h. der zeitliche Abstand zwischen zwei "Versuchen" ist

$$\theta = \frac{2R}{v} \qquad (7.55)$$

und die Anzahl n der Versuche in der Zeit t ist

$$n = \frac{t}{\theta} . \qquad (7.56)$$

Dann folgt aus (7. 52)

$$I_n = I_o\, e^{-T . \frac{v}{2R} . t} . \qquad (7.57)$$

Da die Zahl der "Versuche" pro Zeiteinheit

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\theta} = \frac{v}{2R} \sim 10^{21}\ \mathrm{sec}^{-1} \qquad (7.58)$$

sehr gross ist, erfolgt die Abnahme der Intensität fast kontinuierlich:

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_o\, e^{-\lambda t} \qquad (7.59)$$

wobei die "ZERFALLSKONSTANTE"

$$\lambda = \frac{v}{2R} \cdot T = \frac{dn}{dt} . T \qquad (7.60)$$

ist.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist also gleich der Zahl der Versuche pro Zeiteinheit mal der Transparenz T.

Man kann

$$\boxed{\lambda = \lambda_o T \quad \text{mit} \quad \lambda_o \equiv \frac{dn}{dt} = \frac{v}{2R}} \qquad (7.61)$$

schreiben, worin T sehr verschiedene Werte besitzen kann, während λ_o in allen Fällen von gleicher Grössenordnung ist. Mit $\lambda_o \approx 10^{21}\ \sec^{-1}$ ist beispielsweise für U^{238} innerhalb der mittleren Lebensdauer $\tau \approx 6,5 \cdot 10^9$ y die Zahl der Versuche $n \approx 10^{38}$.

7.8.4 Gamow-Faktor

Da $\lambda = \lambda_o T$ und $T = e^{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}(u-E)}\,dr}$ ist, folgt durch Integration zwischen r = R und r = b (Fig. 7.11).

$$\lambda = \lambda_o e^{-G} \qquad (7.62)$$

worin der "GAMOW-FAKTOR" *)

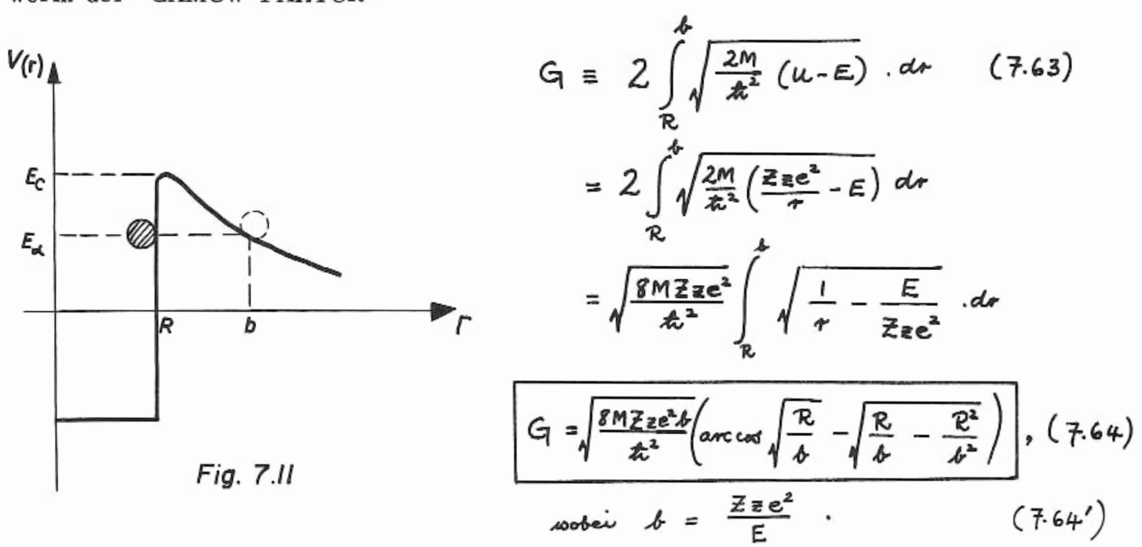


Fig. 7.11

$$G \equiv 2\int_R^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}(u-E)}\,.dr \qquad (7.63)$$

$$= 2\int_R^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}\left(\frac{Zze^2}{r} - E\right)}\,dr$$

$$= \sqrt{\frac{8MZze^2}{\hbar^2}}\int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{E}{Zze^2}}\,.dr$$

$$\boxed{G = \sqrt{\frac{8MZze^2 b}{\hbar^2}}\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}\right)}, \qquad (7.64)$$

$$\text{wobei } b = \frac{Zze^2}{E}. \qquad (7.64')$$

Dieser mathematisch unbequeme Ausdruck lässt sich für den Fall

$$E_\alpha \ll E_c$$

vereinfachen, weil dann b >> R ist (Fig. 7.11). Die Klammer in (7.64) reduziert sich in erster Näherung auf

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{b}}\ . \qquad (7.65)$$

---

*) Es ist üblich geworden, den ganzen Ausdruck (7.64) "Gamow-Faktor" zu nennen; streng genommen ist aber diese Bezeichnung nur auf sehr breite Barrieren, d.h. auf die Näherung $R \rightarrow 0$ anzuwenden.

Einerseits kann man dann den Gamow-Faktor in der Form

$$\boxed{G \cong A - B\sqrt{R}} \qquad (7.66)$$

schreiben, wobei die vom Kernradius unabhängigen Parameter lauten:

$$A \equiv \sqrt{\frac{2\pi^2 M Z z e^2 b}{\hbar^2}} \quad ; \quad B \equiv \sqrt{\frac{8 M Z z e^2}{\hbar^2}} . \qquad (7.67)$$

Andererseits erhält man unter Verzicht jeder Radiusabhängigkeit, indem man einfach die Klammer in (7.64) gleich eins setzt, was anhand von (7.65) gerechtfertigt erscheint, mit etwa ± 30% Genauigkeit,

$$\boxed{G \approx \sqrt{\frac{8 M Z z e^2 b}{\hbar^2}}} \qquad \text{mit } b \equiv \frac{Z z e^2}{E} . \qquad (7.68)$$

Es ist zu bemerken, dass die Zerfallskonstante λ von b abhängt und dadurch direkt mit der kinetischen Energie des α -Teilchens in Beziehung steht. Die deutliche Beziehung, auf der die Geiger-Nuttall-Regel (7.7) basierte, kann also, wie man sieht, durch die Theorie der Durchdringung von Barrieren erklärt werden.

7.9 Anwendung der Gamow-Formel auf den α -Zerfall

7.9.1 α -Energie und Intensität

Es wurde gezeigt, dass die Emissionswahrscheinlichkeit für α -Teilchen rasch mit deren Energie zunimmt. Es ist also zu erwarten, dass beim Zerfall eines bestimmten Kernes diejenigen α -Strahlen, die höhere Energien besitzen, "bevorzugt" (d.h. mit grösserer Intensität) emittiert werden.

Es ergeben sich beispielsweise bei dem α -Zerfall von Pu^{239} zu U^{235} (Fig. 7.12) drei Hauptgruppen von α -Strahlen (Tab. 7.2):

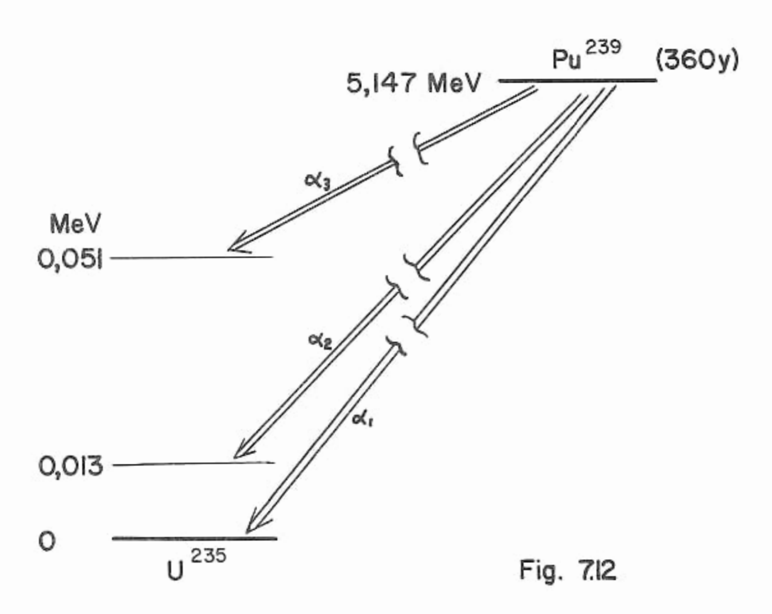


Fig. 7.12

Tab. 7.2

Übergang	E_α	Relat. Intensität
α_1	5,147 MeV	72,5 %
α_2	5,134	16,8
α_3	5,096	10,7

Obwohl der Energieunterschied zwischen α_1 und α_2 nur 0,25% beträgt, bedingt er schon eine ungefähr 4-fache Intensitätsabnahme.

7.9.2 Kernradius

Aus der Form der Gamow-Beziehung (7.62)

$$\lambda = \lambda_o e^{-G} = \lambda_o e^{-(A - B\sqrt{R})} \tag{7.69}$$

für $E_\alpha \ll E_c$, wo A und B bekannte Parameter sind, geht hervor, dass der Radius R des betreffenden Kerns errechnet werden kann, wenn die Zerfallskonstante λ aus Messungen der Lebensdauer des α -Zerfalls bekannt ist. Es kann also der Nukleonenradius R_o bestimmt werden. Das war historisch die erste Methode zur Bestimmung dieser Grösse. Mit einer etwas strengeren Theorie als hier ausgeführt, wurde R_o für einige α -emittierende gg-Kerne berechnet (Kaplan, PR 1951, 81, 962):

Tab. 7.3

Mutterkern	Zerfallsenergie (MeV)	$\log_{10}\lambda$ (sec^{-1})	R_o (f)
Pu^{240}	5,20	-11,437	1,60
Pu^{236}	5,85	- 8,090	1,56
U^{238}	4,25	-17,312	1,59
Th^{226}	6,41	- 3,426	1,58
Ra^{222}	6,62	- 1,745	1,59
Po^{214}	7,83	- 3,666	1,56
Po^{208}	5,24	- 9,867	1,43

7.10 Bemerkungen

(a) Es ist zu beachten, dass die Theorie voraussetzt, dass α -Teilchen im Kern entstehen und anschliessend emittiert werden, indem sie die Potentialbarriere durchdringen. Die Präformation von α -Teilchen im Kern ist noch nicht völlig abgeklärt; nach verschiedenen Theorien liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein α -Teilchen in einem Kern gebildet wird, zwischen 10 und 100 %.

(b) Der Einfluss der Zentrifugalbarriere (p. 103), der zur Geltung kommt, wenn die α -Teilchen mit einem von null verschiedenen Bahndrehimpuls emittiert werden, wurde hier vernachlässigt. Wie Aus Fig. 7.13 ersichtlich, erhöht diese die Potentialbarriere und verlängert somit die Lebensdauer. Die Grösse des Effektes ist jedoch klein: für Bahndrehimpulse bis zu ℓ = 5 wird τ nur etwa 10 mal grösser.

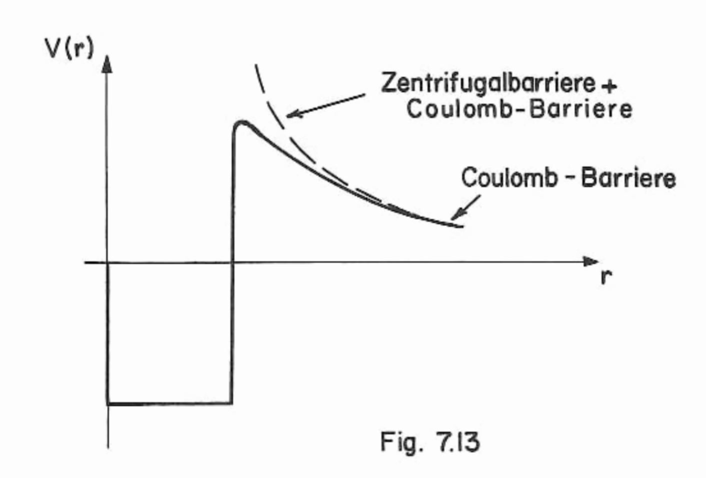


Fig. 7.13

8. BETA- UND GAMMA-SPEKTROSKOPIE

β - und γ -Spektroskopie gehören eng zusammen. Denn einerseits treten die Prozesse, bei denen Elektronen und Photonen emittiert werden, fast stets gemeinsam auf, beispielsweise bei der Konversion von γ -Linien, der Emission von charakteristischer Röntgenstrahlung und Auger-Elektronen, bei Paarerzeugungs- und Annihilationsprozessen oder dadurch, dass im Zerfallsschema einem β -Zerfall zumeist ein γ -Zerfall folgt, oder dass β -Emission und Elektroneinfang stets von Bremsstrahlung begleitet werden.

Ebenso sind die Nachweismethoden für geladene Teilchen und für γ -Strahlung sehr ähnlich. Denn der Nachweis von Teilchen beruht im Wesentlichen auf Wechselwirkungen, bei denen sie ihre Energie durch Ionisations- und Anregungsprozesse abgeben. Der Nachweis von γ -Quanten erfolgt stets über geladene Teilchen, und zwar durch Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarerzeugung.

Bei der Energiebestimmung werden zweckmässig Spektrometer verwendet. Zunächst seien die Detektoren und anschliessend die Spektrometer beschrieben.

8.1 Zählrohr

8.1.1 Prinzip

Ein Zählrohr besteht im Wesentlichen aus zwei Elektroden - einem zumeist zylindrischen Rohr und einem in der Achse des Rohres aufgespannten Draht - und ist mit Gas, zumeist einem Edelgas mit einem Zusatz einer organischen Verbindung gefüllt. Ein geladenes Teilchen, das durch ein dünnes Fenster (zumeist Glimmer oder Kunststoff wie z.B. Mylar) in das Zählrohr gelangt, erzeugt durch Ionisation der Atome des Füllgases freie Elektronen, deren Gesamtladung seiner abgegebenen Energie proportional ist. In dem angelegten elektrischen Feld wandern die Elektronen auf den Draht zu. Je nach der Höhe der Spannung, die an dem Zählrohr liegt, spielen sich dabei verschiedene charakteristische Vorgänge ab, so dass man diese Arbeitsbereiche als Ionisationskammer, Proportionalzähler und Geiger-Zähler unterscheidet.

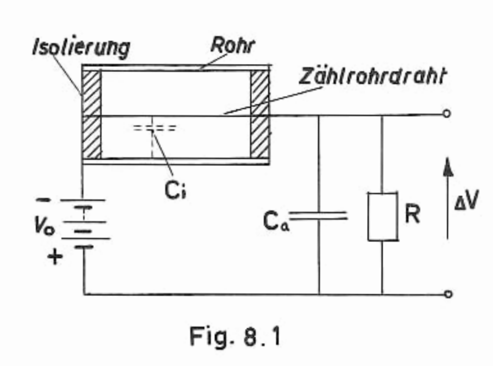


Fig. 8.1

8.1.2 Arbeitsbereiche

In dem elektrischen Feld wandern die Elektronen zum Draht und die positiven Ionen zur Rohrwand. Die insgesamt durch das Zählrohr hindurchgeflossene Ladungsmenge ist gleich der Ladungsmenge, die durch das β -Teilchen freigesetzt wurde. Das Zählrohr arbeitet dann als normale Ionisationskammer.

Auf dem Weg zum Draht werden die Elektronen durch das elektrische Feld beschleunigt. Die dabei aufgenommene Energie geben sie jedoch durch Zusammenstösse mit den Gasatomen ständig wieder ab. Die Feldstärke

$$E = \frac{V_o}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \qquad (8.1)$$

wird jedoch in der Nähe des Drahtes sehr gross, z. B. wird bei V_o = 1000 V, r_a = 1 cm, r_i = 0,1 mm an der Drahtoberfläche E ≈ 20 000 V/cm. Bei hinreichend hoher Spannung V_o kann also das Elektron innerhalb einer freien Weglänge ($\lambda \sim 10^{-3}$ cm bei 100 mm Hg Wasserstoffüllung) aus dem Feld eine Energie aufnehmen, die ausreicht, die Atome bei Zusammenstössen zu ionisieren, also neue Elektronen und positive Ionen zu bilden. Durch Wiederholung dessen bildet sich eine Elektronenlawine. Während die Elektronen sehr schnell zu dem Draht gelangen, bewegt sich die positive Ionenwolke nur langsam Richtung Rohrwand; durch ihr Verweilen sinkt die Feldstärke in dem Ionisationsgebiet und die Lawine reisst, wenn dieser Einfluss stark genug geworden ist, ab. Die insgesamt durch das Zählrohr hindurchfliessende Ladung ist um einen Faktor A gegenüber der primär freigesetzten Ladungsmenge vervielfacht. Das Zählrohr arbeitet dann als Proportionalzähler.

Mit zunehmender Spannung wird die Zone um den Draht herum, wo die Elektronen innerhalb einer freien Weglänge die zur Ionisation erforderliche Energie aufnehmen können, grösser. A steigt also mit der Spannung V_o an.

Bei den inelastischen Zusammenstössen mit den Gasatomen werden auch Photonen emittiert, die Gasatome in anderen Bereichen des Zählervolumens ionisieren oder insbesondere an der Zählrohrwand Sekundärelektronen auslösen können. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ionenpaar eine weitere Lawine auf diese Weise auslöst, ist etwa $\varepsilon \sim 10^{-5}$. Die Vielfach-Lawinenbildung setzt also erst bei einer Spannung V_o ein, bei der der Vervielfachungsfaktor A $\sim 10^5$ wird. Die Bildung weiterer Lawinen reisst ab, wenn durch die Raumladung der Ionenwolken die Feldstärke im Ionisationsgebiet und damit A soweit abgesunken ist, dass $A\varepsilon \lesssim 1$. Die durch das Zählrohr insgesamt hindurchfliessende Ladungsmenge ist nur noch durch diese Faktoren bestimmt; also unabhängig von der Energie des auslösenden β -Teilchens. Dann arbeitet das Zählrohr als Geiger-Zähler (Fig. 8.2).

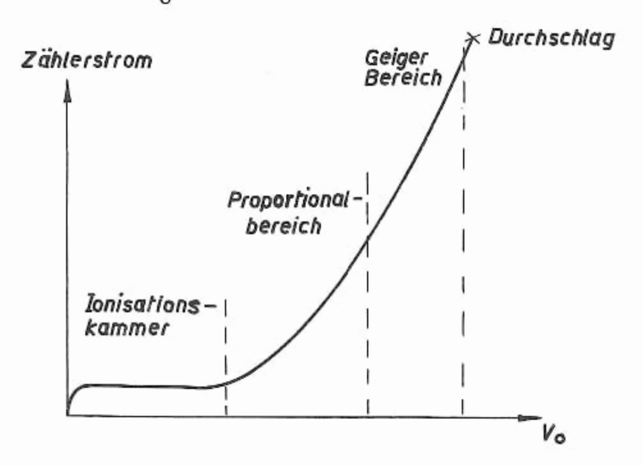


Fig. 8. 2

8.1.3 Quenching

Wenn das Zählrohr mit einem einatomigen Gas gefüllt ist, dann lösen die Gasionen aus der Lawine beim Auftreffen auf die Zählrohrwand Sekundärelektronen aus. Durch diese würde es also zu einer intermittierenden Dauerentladung kommen, die nur durch äussere Schaltmassnahmen gelöscht werden kann.

Durch einen Zusatz einer organischen Verbindung zu dem normalen Füllgas (10 mm Hg Äthylalkohol + 90 mm Hg Argon) lässt sich die Auslösung dieser Sekundärelektronen vermeiden, so dass die Entladung von selbst erlischt ("self quenching"). Denn einerseits werden die aus der Lawine emittierten Photonen auf dem Wege zur Zählrohrwand durch die Alkoholmoleküle sehr stark absorbiert und andererseits übernehmen diese bei Zusammenstössen wegen ihrer kleineren Ionisationsenergie die Ladungen der Argon-Ionen. Anstelle der Argon-Ionen wandern diese dann zur Zählrohrwand, wo sie eher dissozieren als Sekundärelektronen auslösen. Die Entladung breitet sich also nur längs eines Ionenschlauches um den Draht herum aus.

Da durch diese Dissoziationen die Alkoholmoleküle aufgebraucht werden (etwa 10^9 Moleküle pro Entladung), ist die Lebensdauer dieser selbstlöschenden Zählrohre auf etwa 10^{10} Stösse begrenzt. Aus denselben Gründen sind diese Zählrohre gegen Durchschlag bei zu hoher Zählrohrspannung sehr empfindlich.

Statt durch Alkoholdampf wird die Selbstlöschung auch durch einen Zusatz von etwa 0,1% eines Halogengases erzielt. Dieser Zusatz verbraucht sich nicht.

8.1.4 Zeitlicher Impulsverlauf

Das Zählrohrsystem Rohr - Draht nebst Schaltkapazitäten stellt einen geladenen Kondensator dar. Es sei zunächst $R = \infty$ angenommen; dann bewirkt die Verschiebung der Ladungen, die durch Elektronen und Ionen transportiert werden, ein Absinken der Spannung zwischen Rohr und Draht, und zwar erfolgt zunächst ein schneller Abfall, der davon herrührt, dass die Elektronen etwa 100 mal schneller als die Ionen wandern und den Draht nach etwa $\tau_- \sim 10^{-8} - 10^{-6}$ sec erreichen. Der Spannungsabfall infolge der Ionenwanderung erfolgt entsprechend langsamer über ein Zeitintervall (τ_+) von etwa 10^{-4} sec (Fig. 8.3). Die Länge des Impulses wird im Wesentlichen durch τ_+ bestimmt, wenn $RC \gg \tau_+$ ist. Der Spannungsimpuls lässt sich durch eine kleinere Zeitkonstante $\tau = RC$ verkürzen; über den Widerstand R fliesst dann der Kapazität schneller wieder Ladung zu, die das Zählrohr auf die ursprüngliche Spannung V_o einstellt; man nützt dann nur den ersten Teil des Spannungsimpulses aus. Normalerweise wählt man die Zeitkonstante des Systems τ so, dass sie zwischen der Elektronen- und der Ionenlaufzeit, also bei 10^{-5} sec liegt.

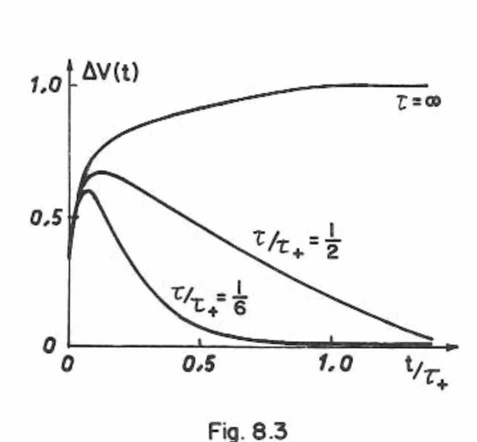


Fig. 8.3

Solange die Ionenwolke in dem Ionisationsbereich verweilt, kann ein weiteres β-Teilchen, das in das Zählrohr gelangt, keine Lawine auslösen, weil die Feldstärke in dem Ionisationsbereich zu niedrig ist. Während dieser TOTZEIT (DEAD TIME) kann also kein weiteres Teilchen registriert werden. Erst wenn die Ionenwolke eine gewisse Strecke nach aussen abgewandert ist, beginnt das Zählrohr wieder empfindlich zu werden. Der Impuls eines Teilchens, das während dieser ERHOLUNGSZEIT (RECOVERY TIME) registriert wird, ist je nach zeitlichem Abstand entsprechend klein (Fig. 8.4). Die Totzeiten von Geiger-Zählern liegen bei etwa 10^{-4} sec. Dadurch ist die Messung von Zählraten bis zu etwa 10^{3} sec^{-1} eingeschränkt. Bei Proportionalzählern sind jedoch die einzelnen Lawinen auf einen kleinen Volumenbereich beschränkt und unabhängig voneinander. Bei ihnen ist die zeitliche Auflösung im Wesentlichen zum Zwecke der Unterscheidbarkeit der einzelnen Teilchen durch die Elektronenlaufzeit von etwa 10^{-6} sec gegeben.

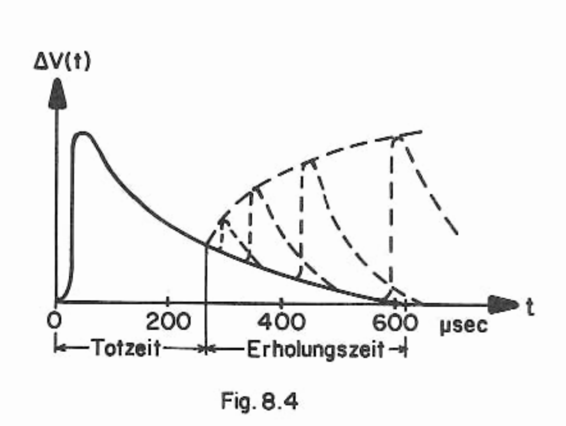


Fig. 8.4

8.1.5 Geiger-Plateau

Die Spannung, bei der der Geiger-Zähler am zweckmässigsten zu betreiben ist, ergibt sich aus der relativen Zählrate als Funktion von V_o (Fig. 8.5). Innerhalb eines Plateaus von einigen hundert Volt ist diese ziemlich konstant (1% - 5% pro 100 V). Nach Durchschreiten des Geiger-Plateaus nimmt die Zahl der Nachentladungen zu, und man nähert sich dem Bereich der intermittierenden Dauerentladung, d.h. dem Durchschlag.

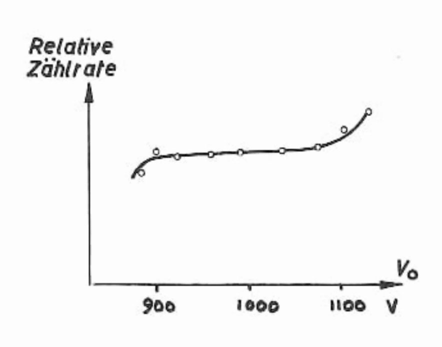


Fig. 8.5

8.1.6 Nachweis von γ-Strahlen mit dem Zählrohr

γ-Strahlen lassen sich im Zählrohr durch die Sekundärelektronen nachweisen, die sie an der Zählrohrwand auslösen; diese entstehen in dem Wandmaterial durch Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarerzeugung. In das Zählervolumen können jedoch nur diejenigen gelangen und dort in der üblichen Weise Elektronenlawinen auslösen, die innerhalb einer Entfernung von der Innenwand entstehen, die kleiner als ihre Reichweite in dem Material ist.

Die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohres auf γ-Strahlen ist also etwa der Wandfläche proportional, die zur Emission von Sekundärelektronen zur Verfügung steht, und bei genügend weiter Entfernung von der γ-Quelle nahezu unabhängig von der Orientierung des Zählrohres.

Für kleine γ-Energien ist die Ansprechwahrscheinlichkeit sehr gering und ausserdem von dem Wandmaterial abhängig; am günstigsten sind schwere Elemente. Im besten Fall beträgt die Ansprechwahrscheinlichkeit für γ-Energien bis zu 1 MeV etwa 10^{-3} bis 10^{-2}. Sie steigt bei höheren Energien linear und unabhängig vom Material an und erreicht etwa 20% bei 25 MeV.

8.2 Szintillationszähler

8.2.1 Wirkungsweise

Beim Durchgang eines ionisierenden Teilchens oder Eindringen eines γ-Quants wird in einem Szintillationskristall ein Lichtblitz ausgelöst. Dieses Lumineszenzlicht wird mit einem Photomultiplier beobachtet; dieser wandelt den Lichtblitz entsprechend seiner Intensität in einen elektrischen Impuls um; er besitzt an seinem flachen Kolbenende eine Photokathode, die unmittelbar dem Szintillationskristall (im Englischen häufig als Phosphor bezeichnet) zugewandt ist. Die Photonen des Lichtblitzes lösen an dieser lichtempfindlichen Schicht Photoelektronen aus, die in einem elektrischen Feld beschleunigt werden und auf eine Dynode prallen, aus der sie Sekundärelektronen herausschlagen (Fig. 8.6). Auf diese Weise verstärkt sich der Elektronenstrom; bei Wiederholung dieses Prozesses durch Bildung von Sekundärelektronen an einer Reihe weiterer Dynoden wird eine sehr hohe Verstärkung erreicht. Jede folgende Dynode liegt auf einer um etwa 100 V höheren Spannung als die vorangehende. An einem 10-stufigen Dynodensystem beträgt die Vervielfachung je nach Spannung 10^6 - 10^{10}. Auf diese Weise ist es möglich, sogar einzelne Photonen zu registrieren. Die Empfindlichkeit des Photomultipliers ist im Wesentlichen nur durch seinen Dunkelstrom begrenzt, d.h. durch thermische Emission einzelner Elektronen aus der Photokathode. Der Dunkelstrom lässt sich beispielsweise durch Kühlung der Photokathode reduzieren.

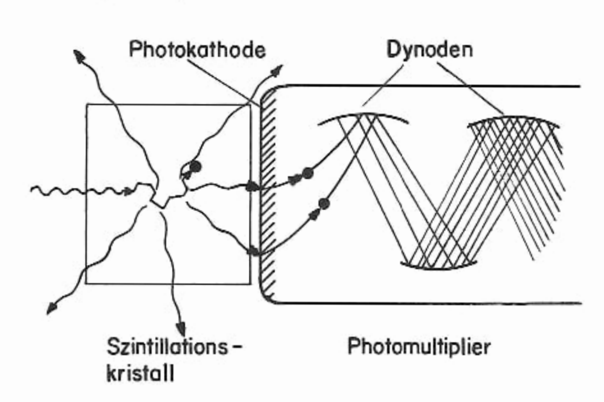


Fig. 8.6

Die Lichtmenge des Szintillationsblitzes ist der Energie, die das Primärteilchen bzw. Photon an den Kristall abgegeben hat, etwa proportional. Dieser Lichtblitz besteht aus einer grösseren Zahl Lichtquanten innerhalb des Fluoreszenzspektrums des Kristalls, und die Grösse des Strom- bzw. Spannungsimpulses am Ausgang des Photomultipliers ist proportional der Zahl dieser Lichtquanten, die auf die Photokathode treffen. Um die Energien der Primärteilchen zu unterscheiden, muss dafür gesorgt werden, dass kein Licht entweicht; der Kristall wird mit einer Schicht aus MgO umgeben, die das Licht in den Kristall zurückwirft.

Ausserdem muss ein guter Lichtkontakt zwischen Kristall und Photokathode hergestellt werden. Wenn der Kristall und der Photomultiplier weit voneinander entfernt angeordnet werden müssen, beispielsweise um Störungen des Photomultipliers durch Magnetfelder zu vermeiden, werden für diesen Lichtkontakt Plexiglasstäbe (Lucite) als Lichtleiter benutzt.

Ferner ist es zweckmässig, das Material des Szintillators und der Photokathode so zu wählen, dass ihre Spektralbereiche gut übereinstimmen und zur Vermeidung eines grösseren thermischen Dunkelstroms möglichst keine Anteile im roten Spektralbereich besitzen.

Die Energieauflösung solcher Szintillationszähler beträgt 6 - 10%. Es ist üblich, diese Auflösung bei der Eichenergie der 661-keV-Linie von Cs^{137} anzugeben.

Als Szintillatoren werden anorganische Kristalle (z.B. NaJ oder CsJ mit Tl aktiviert), organische Kristalle (z.B. Anthrazen, Stilben, Terphenyl) und Plastikstoffe verwendet. Organische Stoffe und deren Lösungen lassen sich auch als flüssige Szintillatoren benutzen; diese und die Plastikszintillatoren haben den Vorteil, dass sie in beliebigen Grössen herstellbar sind, während die Züchtung grosser einwandfreier Kristalle z.T. beträchtliche Schwierigkeiten bereitet. Die zeitliche Auflösung der Szintillatoren ist durch die Rekombinationszeit der angeregten Zustände bedingt. Sie beträgt für NaJ (Tl) - Kristalle etwa 10^{-6} sec, für die übrigen etwa 10^{-8} sec.

8.2.2 Photospitze und Compton-Verteilung

Geben die γ-Quanten ihre Energie nur durch Photoeffekt ab, so wird die γ-Energie vollständig an den Kristall abgegeben und in Fluoreszenzlicht umgewandelt; im Spektrum, das der Photomultiplier registriert, erscheint dann eine Linie, die der Energie E_γ entspricht, die sogenannte PHOTOSPITZE (PHOTO PEAK).

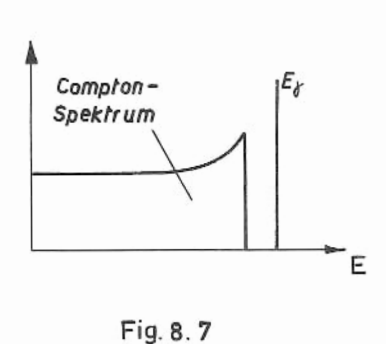


Fig. 8.7

Geben die γ-Quanten ihre Energie auch durch Compton-Streuung ab, wobei die gestreuten γ-Quanten wieder entweichen, so ergibt sich für die Compton-gestreuten Elektronen im Kristall ein zusätzliches Energiespektrum (Fig. 8.7), dessen Abstand von der γ-Linie sich aus (3.26) zu

$$\Delta E = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{m_e c^2}{2 E_\gamma}} \qquad (8.2)$$

ergibt. Dieser Abstand nimmt von kleinen

Energien zu grossen hin gemäss Fig. 8.8 bis zu $\frac{1}{2} m_e c^2$ zu. Der relative Abstand $\Delta E / E_\gamma$ jedoch nimmt gemäss Fig. 8.9 entsprechend ab.

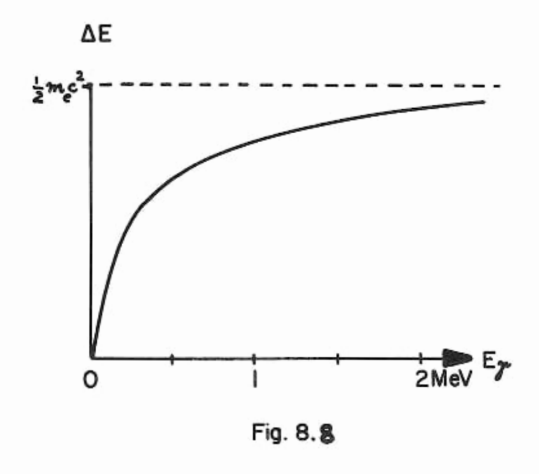


Fig. 8.8

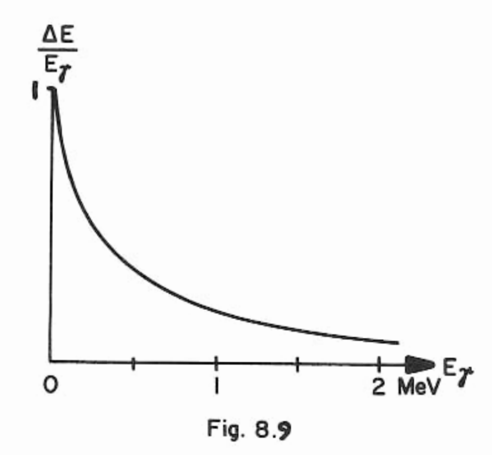


Fig. 8.9

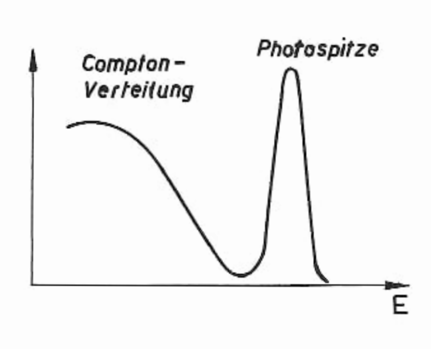


Fig. 8.10

Ein Teil der gestreuten γ-Quanten entweicht jedoch nicht; diese geben ihre Energie weiter durch die drei genannten Effekte ab. Dann hat das aus all diesen Effekten zusammengesetzte Energiespektrum der Compton-Elektronen eher die Form wie in Fig. 8.10; es türmt sich zu niedrigeren Energien hin auf.

8.2.3 Escape-Linien

Besitzt das γ-Quant genügend Energie, dann findet auch Paarerzeugung statt; die kinetische Energie des Paares ist zusammen $E_\gamma - 2\,m_e c^2$. Elektron und Positron werden im Kristall gebremst, und die dabei an den Kristall abgegebene Energie wird in Lumineszenzlicht umgewandelt. Das abgebremste Positron annihiliert unter Emission zweier γ-Quanten von je 511 keV. Werden diese beiden Annihilationsquanten durch Photoeffekt absorbiert, so ist die an den Kristall abgegebene Energie insgesamt wieder E_γ. Verlässt jedoch eines der beiden Annihilationsquanten den Kristall, dann erscheint eine Escape-Linie bei $E_\gamma - m_e c^2$; verlassen beide Annihilationsquanten den Kristall, dann erscheint eine zweite Escape-Linie bei $E_\gamma - 2\,m_e c^2$.

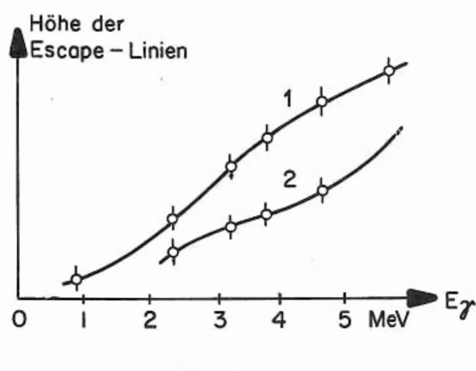


Fig. 8.11

Die relative Intensität dieser Escape-Linien hängt bei einem Kristall begrenzter Grösse von der Geometrie des Kollimators und des Kristalls sowie von der γ-Energie ab (Fig. 8.11). Diese Energieabhängigkeit lässt sich folgendermassen verstehen: Bei höheren γ-Energien ist die kinetische Energie der Positronen und ihre Reichweite grösser, so dass auf diese Weise Annihilationsquanten auch in Bereichen des Kristalls gebildet werden,

die mehr am Rand liegen. Von dort ist die Wahrscheinlichkeit des Entweichens grösser als aus der Mitte.

Es gibt noch eine Escape-Linie anderer Art: Der Kristall ist für die Photonen, die beim Auffüllen von Lücken in den Elektronenschalen emittiert werden, fast vollkommen durchsichtig. Während das Fluoreszenzlicht des Kristalls von der Mg0 - Schicht, die den Kristall umgibt, zurückgeworfen wird, entweichen die Röntgen-Quanten, die beim Auffüllen der innersten Elektronenschalen emittiert werden. Infolgedessen erscheint im Photomultiplier-Spektrum eine Escape-Linie bei $E_\gamma - E_B$, wobei E_B die Energie der charakteristischen Röntgenlinie ist; E_B beträgt für die Linie vom Jod 30 keV. Natürlich entweichen auch Röntgenquanten, die von Na-Atomen stammen; nur ist deren Energie so klein, dass deren Escape-Linien infolge der begrenzten Energieauflösung des ganzen Systems nicht von der Photospitze unterschieden werden können.

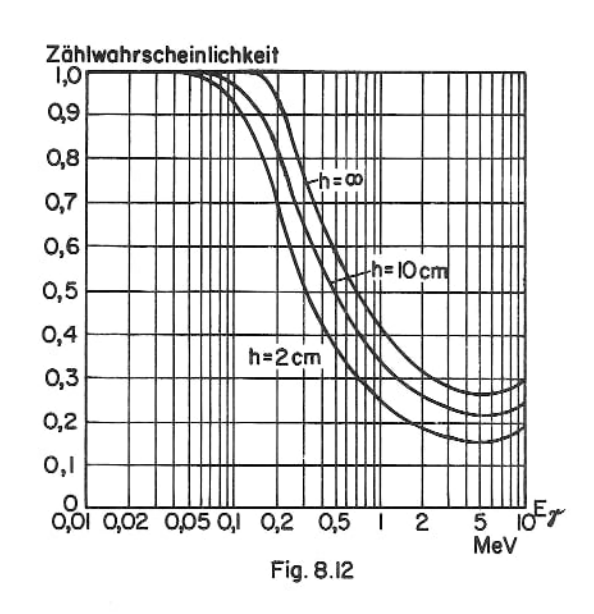


Fig. 8.12

Infolge der verschiedenen Reichweiten ist für einen Kristall begrenzter Grösse die Zählwahrscheinlichkeit von der Energie und der Geometrie abhängig. Fig. 8.12 zeigt diese Charakteristik für einen NaJ (Tl) - Kristall von 1 1/2 Inch Durchmesser und 1 Inch Höhe bei verschiedenen Abständen von dem Präparat.

8.3 β - Spektrometer

8.3.1 Methoden der Energiebestimmung

Für die Energiebestimmung von β -Teilchen gibt es drei Methoden:

(a) Messung der Reichweite, z.B. in Photoemulsionen, in Wilsonkammern oder durch Absorption in verschieden dicken Folien.

(b) Ionisierungen und Anregungen in dem Medium, in dem es gebremst wird, z.B. in Zählrohren oder Szintillationskristallen.

(c) Ablenkung in elektrischen oder magnetischen Feldern, z.B. in Spektrometern.

8.3.2 Ablenkung in magnetischen und elektrischen Feldern

Die direkte Beobachtung der Teilchenablenkung in magnetischen Feldern ist nur auf wenige Anwendungen der Wilsonkammer oder photographischer Emulsionen bei hochenergetischen Teilchen beschränkt.

In den anderen Fällen werden Spektrometer benützt. Dabei werden die von einem Präparat emittierten Teilchen mit Hilfe eines Feldes je nach deren Impuls verschieden stark abgelenkt und in Abhängigkeit von dieser Ablenkung, also nach Impulsen getrennt, vom Detektor registriert. Es gibt dabei zwei Methoden der Registrierung: Beim Spektrographen dient als Detektor eine Photoplatte; die Elektronen treffen je nach Impuls an verschiedenen Stellen auf die Platte und schwärzen sie entsprechend ihrer Intensität (Fig. 8.13); das ganze Spektrum wird dabei gleichzeitig bei konstantem Feld aufgenommen. - Beim Spektrometer dient ein Zählrohr oder Szintillationszähler als Detektor. Dabei werden nur Teilchen mit einem bestimmten Impuls in den Detektor gelassen. Das Spektrum wird durch die Zählrate für verschiedene Impulse nacheinander durch Variieren des Feldes gemessen (Fig. 8.14).

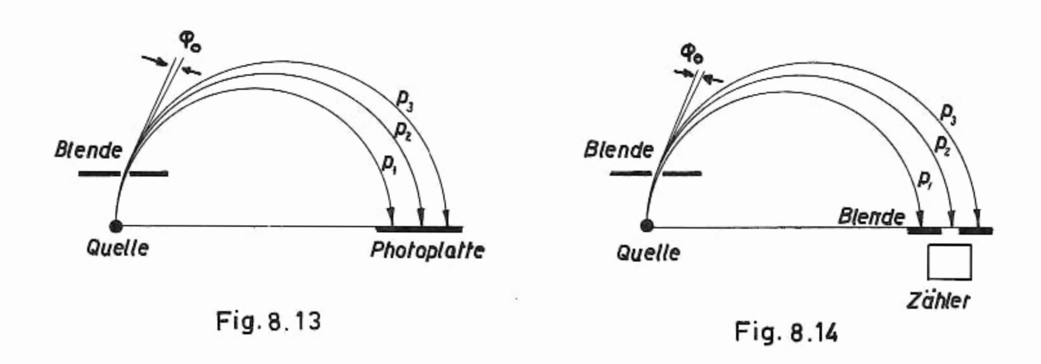


Fig. 8.13

Fig. 8.14

Es werden kaum elektrische, sondern fast ausschliesslich magnetische Spektrometer benützt.

8.3.3 Impuls- und Energiebestimmung durch magnetische Ablenkung

Die Bewegungsgleichung für ein Elektron, das sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu einem homogenen magnetischen Feld B bewegt, ergibt eine Kreisbahn mit dem Radius ρ

$$B \cdot ev = \frac{mv^2}{\rho} \qquad (8.3)$$

woraus unmittelbar

$$p = mv = e\,(B\rho)\,. \qquad (8.4)$$

Hierin ist

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (8.5)$$

die relativistische und m_e die Ruhemasse des Elektrons. Je grösser der Impuls des

Teilchens, desto grösser ist der Krümmungsradius ρ. Durch die Grösse $B\rho$ (Gauss.cm) wird direkt der Impuls des Teilchens gemessen.

Die relativistische Beziehung zwischen kinetischer Energie E_β und dem Impuls p lautet

$$(E_\beta + m_e c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2 \qquad (8.6)$$

woraus unmittelbar

$$E_\beta = \sqrt{p^2 c^2 + (m_e c^2)^2} - (m_e c^2) \qquad (8.7)$$

bzw.

$$E_\beta = m_e c^2 \left[\sqrt{\left(\frac{p}{m_e c}\right)^2 + 1} - 1 \right]. \qquad (8.8)$$

Setzt man die MAGNETISCHE STEIFHEIT $B\rho$ ein, dann ist

$$E_\beta = m_e c^2 \left[\sqrt{\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2 (B\rho)^2 + 1} - 1 \right] \qquad (8.9)$$

und numerisch

$$E_\beta = 510{,}984 \left(\sqrt{3442{,}2 \cdot 10^{-10} (B\rho)^2 + 1} - 1 \right) \qquad (8.10)$$

mit E_β in keV und $B\rho$ in Gauss.cm. Für $E_\beta = m_e c^2$ ist $B\rho \approx 3000$ Gauss.cm.

Ein Diagramm $B\rho$ als Funktion von E befindet sich im Anhang A (Fig. A.4). Für $E = f(B\rho)$ stehen Tabellen zur Verfügung (Siegbahn, 1955, p. 926).

Für die Interpolation in $E/B\rho$ -Tabellen ist zu beachten, dass die relativen Änderungen der Energie $\Delta E/E$ nicht denen des Impulses $\Delta(B\rho)/B\rho$ gleich, sondern durch die Beziehung

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(1 + \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E} \right) \cdot \frac{\Delta (B\rho)}{B\rho} \qquad (8.11)$$

verknüpft sind.

Häufig werden Impuls und Energie in relativistischen Einheiten ausgedrückt:

$$\eta \equiv \frac{p}{m_e c} = \frac{B\rho}{1704{,}45} \qquad (8.12)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{m_e c^2} = \frac{E}{510{,}984} \qquad (8.13)$$

mit $$\varepsilon^2 = \eta^2 + 1 \,. \qquad (8.14)$$

8.3.4 Magnetische Spektrometer

Die erwähnten Anordnungen (Fig. 8.13 und 8.14) verlangen die Ausblendung eines sehr dünnen Strahls in der Nähe der Quelle. Um von der im Präparat verfügbaren Intensität mehr nutzen zu können, verwendet man fokussierende Felder. Die Elektronen mit bestimmtem Impuls treffen dann alle wieder nahezu in einem Punkt zusammen. Man bildet also die Quelle mit chromatischer Verzerrung auf den Detektor ab.

Die Fokussierung lässt sich jedoch bei allen konstruierbaren Systemen nur für Teilchen hinreichend gut erreichen, die innerhalb eines gewissen Raumwinkels ω von der Quelle ausgesandt werden. Die übrigen Teilchen müssen ausgeblendet werden, wenn die Abbildung hinreichend scharf werden soll. Dabei wird natürlich nur ein Teil aller Teilchen aus der Quelle ausgenützt (Fig. 8.15). Ein Mass dafür ist die Apertur

$$a = \frac{\omega}{4\pi} .$$

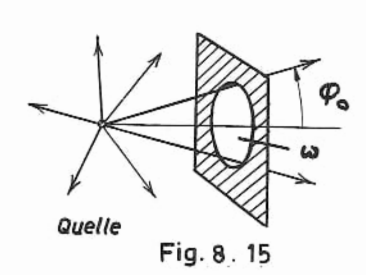


Fig. 8. 15

Als Transmissionsgrad eines Spektrometers wird das Verhältnis der im Detektor aufgefangenen zu den insgesamt innerhalb des betreffenden Impulsintervalls von der Quelle emittierten Teilchen bezeichnet.

Im Prinzip lassen sich magnetische Spektrometer mit sehr hoher Auflösung bauen (10^{-4} - 10^{-5}). Eine so hohe Auflösung erfordert jedoch die Verwendung sehr dünner Präparate, damit Energieverluste in der Quelle möglichst vermieden werden. Kleine Apertur und kleine Präparatmenge bedingen gemeinsam sehr geringe Intensitäten. Die meisten β-Spektrometer werden infolgedessen für eine Auflösung von ca. 0.1 - 1% gebaut.

Es ist indessen noch darauf hinzuweisen, dass die im Spektrometer aufgenommene Zählrate Z(p) nicht das Impulsspektrum darstellt: Bei festem Feld H entspricht die vom Blendensystem zugelassene Streuung des Bahnradius $\delta\rho$ einer Impulsbreite

$$\delta(p) = \delta(H\rho) = H \cdot \delta\rho = p \cdot \frac{\delta\rho}{\rho} \qquad (8.15)$$

so dass

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta\rho}{\rho} . \qquad (8.16)$$

Nun ist $\delta\rho$ = const durch die Blendenbreite und ρ = const durch den Abstand Quelle-Detektor fest vorgegeben, also $\delta\rho/\rho$ = const für alle Impulse. Infolgedessen ist auch $\delta p/p$ = const. Das registrierte Impulsintervall δp ist also nicht konstant, sondern proportional p. Das Impulsspektrum N(p) wird aber nur bei konstanter Kanalbreite δp sinnvoll wiedergegeben. Erst die durch p bzw. H dividierte Zählrate Z(p) liefert das Impulsspektrum (Fig. 8.16).

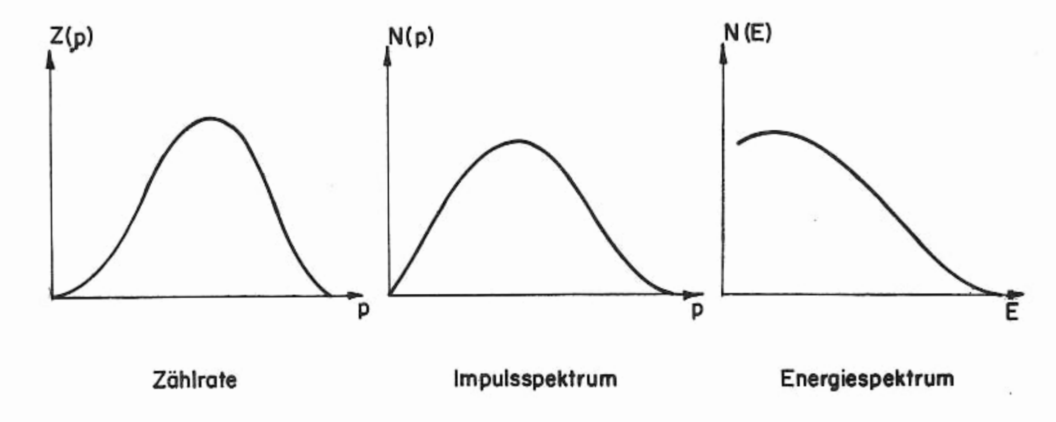


Fig. 8.16

Um daraus das Energiespektrum N(E) zu gewinnen, ist in gleicher Weise zu berücksichtigen, dass dE und dp verschieden sind; es gilt nicht-relativistisch

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad ; \quad dE = \frac{p}{m} \cdot dp \qquad (8.17)$$

also

$$N(E)\, dE = N(p)\, dE = N(p) . \frac{p}{m} . dp . \qquad (8.18)$$

Das Impulsspektrum ist also praktisch (nicht-relativistisch) nochmals durch p zu dividieren um das Energiespektrum zu erhalten (Fig. 8.16).

Das gilt jedoch nicht für Intensitätsmessungen an Linien; die Linienbreiten sind in allen praktisch vorkommenden Fällen kleiner als das Δ p bzw. Δ E des Spektrometers, d.h. die Zahl der Elektronen, die zu Linien gehören, wird unabhängig von Δ p, also im ganzen Spektrum gleichwertig direkt durch die Zählrate wiedergegeben. Die Linien erscheinen lediglich entsprechend dem Auflösungsvermögen verbreitert, wodurch zwar ihre Höhe beeinflusst wird; aber die Fläche unter den Linien ist nicht davon betroffen.

Die Eichung eines Spektrometers erfolgt mit Hilfe von Linien aus Eichquellen. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen ist es jedoch besonders im Bereich kleiner Energien schwierig, genau die Mittte einer solchen Linie zu bestimmen, weil sie nicht symmetrisch erscheint. Denn an der energieärmeren Seite der Linie tritt stets ein Schweif von Elektronen auf, die im Präparat geringfügig gebremst wurden. Ausserdem sind die Linien in verschiedenen Bereichen des Spektrums infolge der Auflösungscharakteristik $\Delta p \sim p$ verschieden breit; sie lassen sich jedoch auf der energiereichen Seite auf kongruente Form bringen, wenn man sie nicht über Bρ , sondern über log (Bρ) aufträgt, wie aus

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta (B\rho)}{B\rho} = \text{const.} \qquad (8.19)$$

folgt (Fig. 8.17). Der von Energieverlusten herrührende Schweif ist an Linien bei kleiner Energie am stärksten und an Linien bei höherer Energie schwächer ausgeprägt. Dieser Anteil lässt sich dann durch Vergleich der Linien in dieser Form und Extrapolation auf hohe Energien eliminieren.

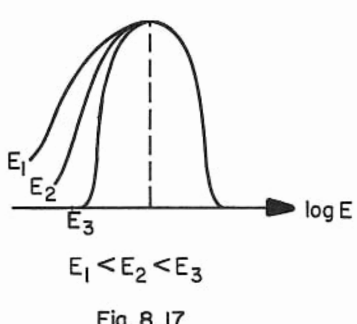


Fig. 8.17

8.3.5 Fokussierende Felder

Es gibt zwei Typen der Fokussierung:

(a) transversale Fokussierung

(b) longitudinale Fokussierung

Bei transversaler Fokussierung steht das Feld senkrecht zur Verbindungslinie Quelle-Detektor. Die Elektronenbahnen verlaufen vorzugsweise auf Ebenen (Fig. 8.18).

Bei longitudinaler Fokussierung liegt das Feld in Richtung der Verbindungslinie Quelle-Detektor. Die Elektronenbahnen sind eine Art Schraubenlinien. Dieser Typ wird als achsiale bzw. Schrauben- oder Linsenfokussierung bezeichnet (Fig. 8.19).

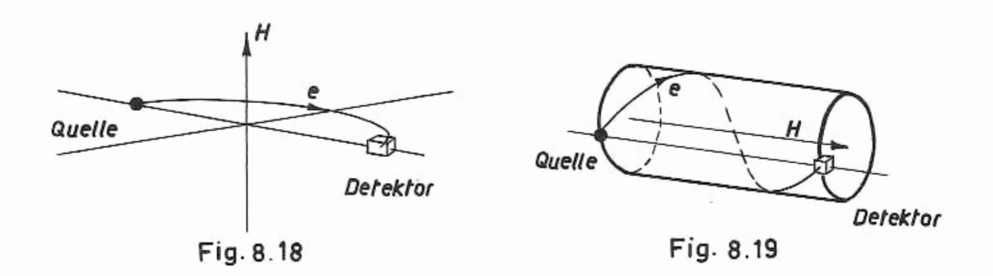


Fig. 8.18 Fig. 8.19

Ausserdem unterscheidet man zwischen langer und kurzer Fokussierung, je nachdem sich das Magnetfeld über die ganze Bahn zwischen Quelle und Detektor oder nur auf einen Teil davon (Sektorfeld) erstreckt.

Ferner unterscheidet man zwischen einfacher und doppelter Fokussierung, je nachdem eine punktförmige Quelle als Linie oder als Punkt abgebildet wird.

Ein ausschlaggebendes Kriterium für die Güte der magnetischen Optik ist schliesslich der Fokussierungsgrad in bezug auf die Apertur. Jedes fokussierende System stellt nur eine mehr oder minder gute Näherung für "achsennahe Strahlen" dar; die Bildunschärfe δ wird mit dem Öffnungswinkel φ_0 (Fig. 8.20) grösser. Sie stellt in jedem Fall eine Näherung der Form

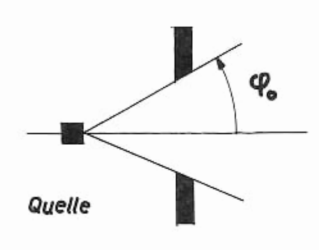


Fig. 8. 20

$$\delta = a_n \varphi_0^{\,n} + a_{n+1} \varphi_0^{\,n+1} + a_{n+2} \varphi_0^{\,n+2} + \dots \qquad (8.20)$$

dar, wobei n von der Konstruktion des Systems abhängt. Die Öffnungswinkel φ_0 sind stets klein ($\varphi_0 \ll 1$), so dass nur der erste Term massgebend bleibt:

$$\delta \sim \varphi_0^{\,n} \, . \qquad (8.21)$$

Die Fokussierung ist um so besser, je grösser n ist; man spricht dann in folgender Weise von Fokussierungsgraden:

$\delta \sim \varphi_0^{\,1}$: keine Fokussierung (Fig. 8.14)

$\delta \sim \varphi_0^{\,2}$: Fokussierung erster Ordnung

$\delta \sim \varphi_0^{\,3}$: Fokussierung zweiter Ordnung

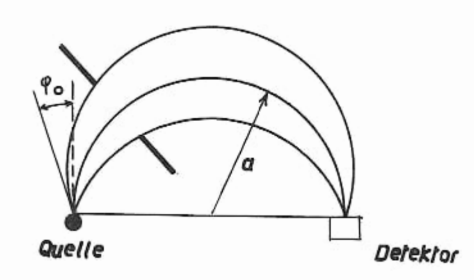
⋮ ⋮

In Abschnitt 8.3.6 werden einige Fokussierungstypen, wie sie in Spektrometern benutzt werden, angegeben.

8.3.6 Spektrometertypen

(a) Transversale Fokussierung

Halbkreis-Spektrometer (langes Feld):



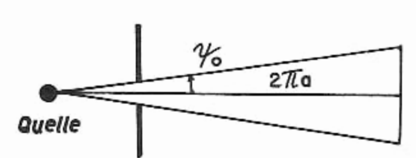


Fig. 8.21

Bei homogenem Feld:
Einfachfokussierung 1. Ordnung in φ_o.

Bei geeignetem Abfall des Feldes in radialer Richtung:
Einfachfokussierung 3. Ordnung in φ_o.

$\pi\sqrt{2}$-Spektrometer (langes Feld):

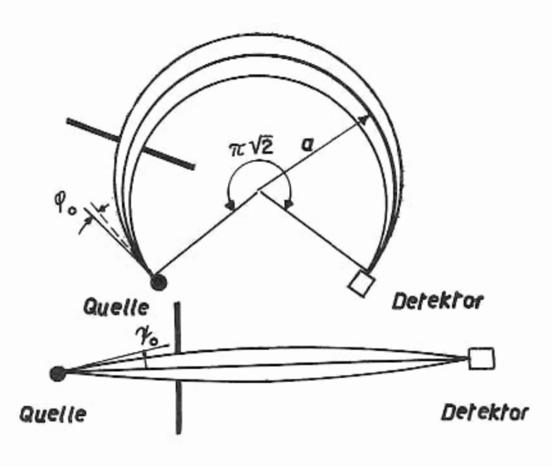


Fig. 8.22

Doppelfokussierung
3. Ordnung in φ_o und
1. Ordnung in ψ_o bei
geeigneter Feldform.

Polschuhform (Fig. 8.23):

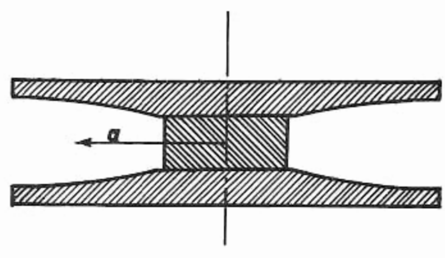


Fig. 8.23

"orange-type"-Spektrometer (kurzes Feld):

Ideale Fokussierung in φ_0 und ψ_0 ! Spezielle Formgebung der Polschuhe; nach aussen mit $\frac{1}{x}$ abfallendes Feld (Fig. 8.24). Bei Zusammensetzung 6 solcher, voneinander unabhängiger Spektrometer haben die Polschuhe die Form von Apfelsinenscheiben (Fig. 8.25).

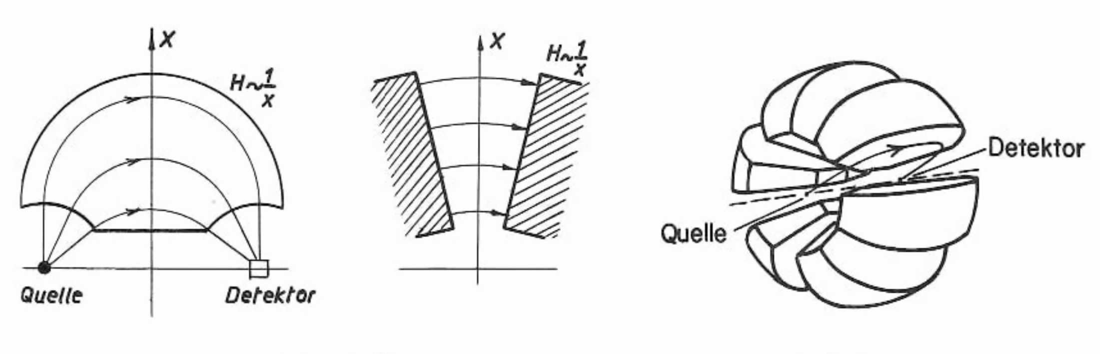


Fig. 8. 24 Fig. 8.25

(b) Longitudinale Fokussierung

Die Transmission ist bei longitudinaler Fokussierung grösser als bei transversaler. Das lässt sich mit Hilfe von Fig. 8.26 einsehen: Während bei transversaler Fokussierung die ideale Emissionsrichtung mit der "optischen Achse" des Systems zusammenfällt, ist sie bei longitudinaler Emission um einen gewissen Winkel α gegen sie geneigt. Bei gleichem Öffnungswinkel φ_0 um diese idealen Emissionsrichtungen herum ist der Raumwinkel im zweiten Fall wesentlich grösser. Indessen ist die Fokussierung nicht so einfach wie beim transversalen Typ; jedoch sind Auflösungen von ca. 1% in jedem Fall erreichbar. Insofern bedeutet die höhere Transmission einen wesentlichen Vorzug. Man unterscheidet kurze und lange Linsen. Der Feldverlauf einer kurzen Linse ist in Fig. 8.27 skizziert. Lange Linsen haben sich jedoch als günstiger erwiesen. Der Extremfall dessen ist das homogene Feld. Die Bahnen koinzidieren unabhängig vom Emissionswinkel etwa in einem Punkt (Fig. 8.28). Diese Stelle eignet sich für das Anbringen einer ringförmigen Blende. Der günstigste Emissionswinkel bezüglich der Auflösung liegt bei etwa 40° - 45°. Dieses Maximum ist jedoch sehr flach, so dass es, um die Dimensionen der Feldspulen möglichst klein zu halten, eher üblich ist, einen Winkel von etwa 30° zu wählen. Mit diesem Typ

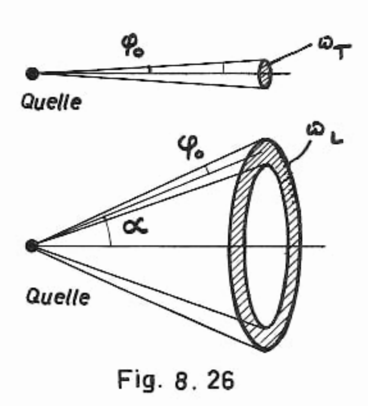


Fig. 8. 26

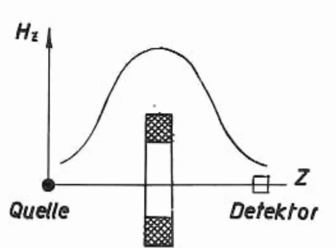


Fig. 8.27

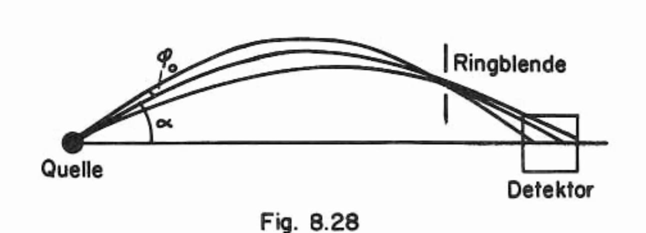


Fig. 8.28

lässt sich etwa eine Auflösung bis zu 0,3% und eine Transmission bis zu 5% erreichen.

Eine wesentliche Verbesserung der Transmission bringt die Verwendung eines Feldes, dessen Verlauf dem einer kurzen Linse etwa entgegengesetzt ist (Fig. 8.29). Bei einer bestimmten Stärke eines Feldgradienten dieser Form kommt es zur Zwischenbildfokussierung an der ringförmigen Blende. Dadurch wird der Transmissionsgrad wesentlich erhöht; er liegt dann um einen Faktor 50 höher als bei kurzen Linsen.

Fig. 8. 29

8.4 γ-Spektrometer

Eine sehr genaue Messung von γ-Energien ist über die Messung ihrer Wellenlängen möglich, was sich mit Hilfe Braggscher Reflexion an den Gitterebenen eines Kristalls ausführen lässt.

DuMond hat auf dem Prinzip der Braggschen Reflexion ein Präzisions-γ-Spektrometer konstruiert, bei dem die Fokussierungsbedingungen durch Verwendung eines gebogenen Quarzkristalls erfüllt werden. Die Geometrie dieses Kristallspektrometers ist folgendermassen: Der Quarz ist mit einem Krümmungsradius gebogen, der doppelt so gross ist wie der Radius des Kreises in Fig. 8.30, so dass sich die Gitterebenen des gebogenen Kristalls in 0 schneiden. Die von der strichförmigen γ-Quelle Q ausgehenden Strahlen werden, wenn sie die Braggsche Bedingung erfüllen, an diesen Gitterebenen so reflektiert, dass sie für einen Beobachter hinter dem Kristall von der virtuellen Quelle P auszugehen scheinen. Durch einen Kollimator mit engen Schlitzen, deren gemeinsamer Fluchtpunkt P ist, wird verhindert, dass γ-Strahlung auf geradem Weg von der Quelle in den Detektor gelangt. Bewegt man die Quelle längs der Peripherie des Kreises und schwenkt man den Kollimator in geeigneter Weise mit, so wird die Braggsche Bedingung für verschiedene γ-Energien nacheinander erfüllt und wenn die betreffende γ-Energie von der Quelle emittiert wird, im Detektor nachgewiesen. Allerdings wird nur der Kristall gedreht und die Quelle auf einer entsprechenden Bahn synchron bewegt.

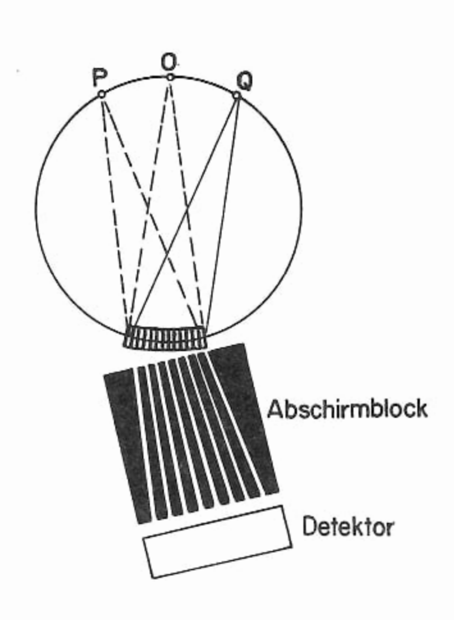


Fig.8.30

Der Reflexionswinkel wird mit zunehmender Energie sehr klein; er beträgt bei 1 MeV etwa $^1/_3{}^\circ$. Das Auflösungsvermögen beträgt bei 1 MeV etwa 1% und wird mit abnehmender γ -Energie etwa proportional $^1/_E$ besser; es ist in dem Bereich einiger hundert keV mit dem der besten β -Spektrometer vergleichbar. Es bietet jedoch den Vorteil, dass es als einziges die Absolutmessung von γ -Energien ermöglicht; die Standardwerte für die Energieeichung beruhen auf Messungen an diesem Instrument, z.B.

J^{131}	0,08016	MeV
Au^{198}	0,41177	MeV
Annihilation	0,510976	MeV
Cs^{137}	0,6616	MeV
Co^{60}	1,3325	MeV .

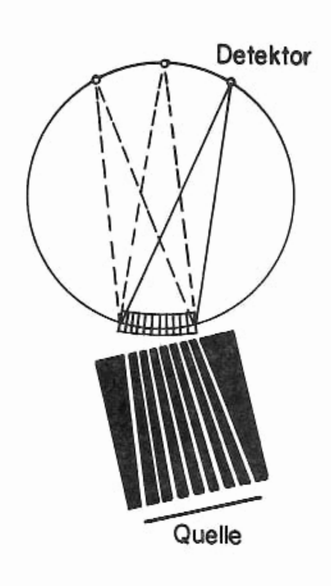


Fig. 8.31

Das Gerät kann auch, wie es von Couchois und Marmier unternommen wurde, in umgekehrter Richtung benützt werden (Fig. 8.31). Man erhält dann auch bei einer sehr ausgedehnten γ -Quelle eine sehr scharfe Auflösung schmaler γ -Linien.

8.5 Koinzidenzmessungen

Unter Koinzidenzmessungen versteht man die Messung verschiedener Teilchen oder Quanten unter Beachtung ihrer zeitlichen Zuordnung. Registriert werden dabei nur solche Ereignisse, bei denen die Impulse von verschiedenen Detektoren innerhalb der Auflösungszeit τ in die Koinzidenzapparatur gelangen.

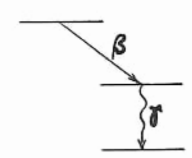


Fig. 8.32

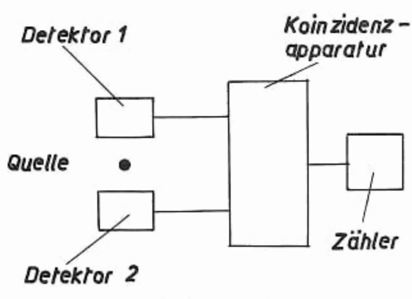


Fig. 8.33

Beispielsweise werden bei einem β -Zerfall mit nachfolgendem γ -Zerfall (Fig. 8.32) diejenigen β -Teilchen und γ -Quanten, die von demselben Kern emittiert werden, bevorzugt innerhalb der Lebensdauer des γ -zerfallenden Zustandes in den Detektoren wahrgenommen. Leitet die Koinzidenzapparatur (Fig. 8.33) diese Impulse nur dann zur Registrierung weiter, wenn sie innerhalb der Auflösungszeit τ der Apparatur eintreffen, dann werden nur diese zusammengehörigen gezählt. Durch Koinzidenzmessungen zwischen γ -Strahlen, Röntgenquanten, β -Teilchen, Konversionselektronen etc. lassen sich auf diese

Weise Zerfallsschemata, Winkelverteilungen, z. B. $\beta\gamma$-Winkelkorrelationen etc. messen.

Zufällige Koinzidenzen zweier unabhängiger Ereignisse sind natürlich auch möglich. Wenn τ die Auflösungszeit, $\dot{n}_1$ und $\dot{n}_2$ die Zählraten der beiden Detektoren einzeln sind, dann ist die Zählrate der zufälligen Koinzidenzen

$$\dot{n}_K = 2\tau\,\dot{n}_1\,\dot{n}_2 \,. \qquad (8.22)$$

Um die gewünschten zugeordneten Ereignisse aus dem Untergrund der zahlreichen anderen Ereignisse herauszuheben, ist es oft von Bedeutung, dass $\dot{n}_K$ möglichst klein ist. Das lässt sich durch möglichst kleine Auflösungszeiten τ erzielen; man erreicht etwa $\tau \sim 10^{-10}$ sec.

Zumeist ist eine Energiediskriminierung der einfallenden Teilchen oder Quanten erforderlich. Je nach deren Auflösung ist eine genauere Zuordnung möglich. In vielen Fällen werden Detektoren und Spektrometer für Koinzidenzmessungen kombiniert. Oft ist die Kombination einer Vielzahl von Detektoren für Koinzidenzmessungen erforderlich. Ebenso lässt sich die Registrierung unerwünschter Ereignisse durch Antikoinzidenzschaltungen unterdrücken.

Wenn zwei Ereignisse, deren Zusammengehörigkeit geprüft werden soll, eine gewisse Verzögerung d_o zueinander haben, dann lässt sich die Koinzidenz wieder herbeiführen, indem man zwischen dem Detektor, der das erste der beiden wahrnimmt, und der Koinzidenzapparatur eine Verzögerungsleitung einsetzt.

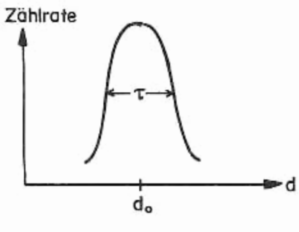


Fig. 8.34

Bei Variation dieser Verzögerung d (delay) ergibt sich eine maximale Koinzidenzrate bei d_o (Fig. 8.34). Verzögerte Koinzidenzen dieser Art werden beispielsweise in Zählerteleskopen zur Geschwindigkeits- und Richtungsbestimmung schneller Teilchen benutzt (Fig. 8.35).

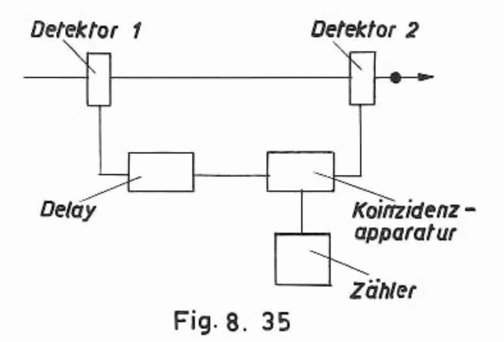


Fig. 8. 35

9. BAHNDREHIMPULS, SPIN UND PARITÄT

9.1 Einleitung

Ebenso wie ein Elektron nicht nur einen Bahndrehimpuls, sondern auch einen Eigendrehimpuls besitzt, hat man bei Proton und Neutron auch einen Eigendrehimpuls oder "SPIN" der Grösse $\frac{1}{2}\hbar$ festgestellt. Sie sind also sogenannte FERMIONEN, indem sie der Fermi-Dirac-Statistik gehorchen, die auf alle Teilchen mit halbzahligem Spin $\frac{1}{2}\hbar$, $\frac{3}{2}\hbar$, ... anwendbar ist. Teilchen mit ganzzahligem Spin 0, $\hbar$, ... gehorchen der Bose-Einstein-Statistik und werden als "BOSONEN" bezeichnet; Beispiele dafür sind Photonen und π-Mesonen.

Da es üblich ist, Spins und Bahndrehimpulse in Einheiten $\hbar$ auszudrücken, bezeichnet man Elektronen, Protonen und Neutronen als Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen.

Für ein System, das aus mehreren Fermionen besteht, ist der Gesamtspin einfach die Vektorsumme der Spinkomponenten, so dass man für Kerne mit einer geraden Zahl von Nukleonen ganzzahligen Spin (0, 1, 2, ...) und für Kerne mit einer ungeraden Zahl von Nukleonen halbzahligen Spin ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ...) erwarten müsste. Experimentell wurde bestätigt, dass das stets der Fall ist. (Für die experimentelle Bestimmung des Spins siehe Kopfermann: "Kernmomente", 1956).

Ausserdem wurde dadurch die Annahme gerechtfertigt, dass der Kern nur aus Protonen und Neutronen besteht, aber keine Elektronen enthält. Beispielsweise haben die Kerne H^2, Li^6, N^{14}, wie man fand, im Grundzustand alle den Spin 1, was mit den obigen Schlüssen für Kerne mit gerader Massenzahl A übereinstimmt. Wären jedoch die Kerne nur aus Protonen und Elektronen zusammengesetzt, dann müsste ihre Struktur wie folgt sein: H^2: 2p + 1e; Li^6: 6p + 3e; N^{14}: 14p + 7e, so dass man in jedem einzelnen Fall eine ungerade Zahl von Fermionen, also halbzahligen Kernspin hätte.

In einem Kern addieren sich vektoriell alle Spins (die halbzahlige Werte besitzen) der Nukleonen sowie auch ihre Bahndrehimpulse (ganzzahliger Werte) zu einem gesamten Drehimpuls, den man "KERNSPIN" (NUCLEAR SPIN) nennt, weil er dem Eigendrehimpuls des Kerns entspricht.

Der Gesamtdrehimpuls (KERNSPIN) eines Kerns in einem angeregten Zustand ist im allgemeinen verschieden von dem desselben Kerns im Grundzustand, z.B. hat Be^7 im Grundzustand den Kernspin $\frac{3}{2}$ und in den angeregten Zuständen 0,43 MeV bzw. 4,53 MeV ein Spin $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{7}{2}$ (Fig. 9.1).

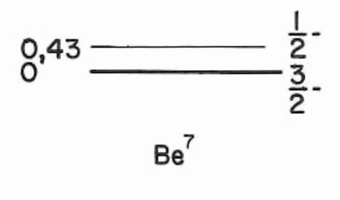


Fig. 9.1

Bevor wir zu dem Formalismus des Kernspins kommen, ist es von Interesse, festzustellen, dass die Spins aller Kerne mit gerader Nukleonenzahl (mit Ausnahme der vier stabilen uu-Kerne H^2, Li^6, B^{10} und N^{14}) im Grundzustand gleich null sind. Es hat also den Anschein, als wenn die Spineinstellungen und Bahndrehimpulse der beteiligten Nukleonen bestrebt sind,

sich gegenseitig aufzuheben. Dieser Gesichtspunkt wird ferner durch die Tatsache gestützt, dass die Spins der übrigen Kerne in den Grundzuständen meistens klein sind ($\lesssim \frac{9}{2}$).

9.2 Quantenzahlen der einzelnen gebundenen Nukleonen

Der Zustand eines Körpers im quantenmechanischen Sinne (d.h., was seine physikalisch bestimmten Grössen wie Energie, Impuls, Bewegung etc. anbelangt) ist im Prinzip eindeutig durch seine Wellenfunktion gegeben, die ihrerseits eine Lösung der Wellengleichung für das System ist und durch bestimmte Werte von Parametern charakterisiert wird, die als "QUANTENZAHLEN" bezeichnet werden. Der Zustand eines bestimmten Nukleons wird also durch Quantenzahlen charakterisiert, ähnlich denen der Atomphysik, von denen die folgenden die am meisten benützten sind:

9.2.1 Bahnquantenzahl ℓ

Diese gibt den Wert des Bahndrehimpulses an (dessen Betrag $\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ ist, s.p. 103), und nimmt die Werte 0, 1, 2, ... an. Unter Benützung der Nomenklatur der atomaren Spektroskopie, werden die Zustände folgendermassen bezeichnet:

$\ell = 0$,	s-Zustand	(= "sharp")
$\ell = 1$,	p- "	(= "principal")
$\ell = 2$,	d- "	(= "diffuse")
$\ell = 3$,	f- "	(= "fundamental")
$\ell = 4$,	g- "	
$\ell = 5$,	h- "	

und alphabetisch so weiter.

9.2.2 Magnetische Bahnquantenzahl m_ℓ

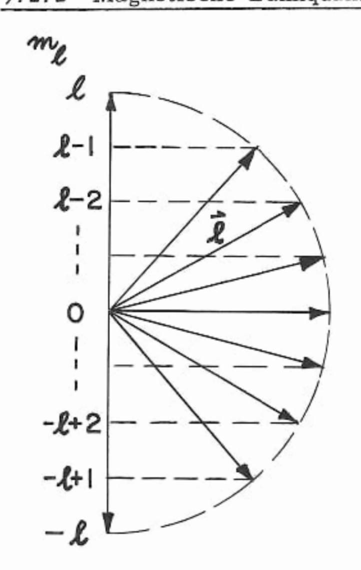


Fig. 9.2

Diese gibt die Komponente von ℓ in einer ausgezeichneten Richtung an, z.B. entlang eines äusseren angelegten Magnetfeldes, das üblich als die z-Achse angenommen wird. Sie hat die $(2\ell + 1)$ möglichen, ganzzahligen Werte $-\ell$, $-\ell + 1$, ... -1, 0, $+1$,... $\ell - 1$, ℓ, die die Projektionen von ℓ auf die z-Achse (Fig. 9.2) sind (VEKTORMODELL).

9.2.3 Spin-Quantenzahl s

Der Eigendrehimpuls eines Teilchens wird als SPIN bezeichnet. Er wird durch eine Quantenzahl s charakterisiert, und sein Betrag ist $\hbar\sqrt{s(s+1)}$, worin s ganzzahlige Werte (für Bosonen) oder halbzahlige Werte (für Fermionen) annehmen kann. Für Proton, Neutron und Elektron ist $s = \frac{1}{2}$ und sein Betrag ist demnach $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$.

9.2.4 Magnetische Spinquantenzahl m_s

Diese ist die Komponente von s in einer ausgezeichneten Richtung, z.B. entlang einem angelegten Magnetfeld. Wenn $s = 0$, dann $m_s = 0$; wenn $s = \frac{1}{2}$, dann sind entsprechend dem Vektormodell die einzigen möglichen Werte $m_s = \pm \frac{1}{2}$ (die paralleler bzw. antiparalleler Spinausrichtung entsprechen).

9.2.5 Quantenzahl des totalen Drehimpulses j

Diese ist gegeben durch die Vektorsumme von Spin und Bahndrehimpuls, und wird charakterisiert durch

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}. \tag{9.1}$$

Wie man sieht, kann j für ein Fermion die Werte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ annehmen. Der Betrag des betreffenden totalen Drehimpulses ist $\hbar\sqrt{j(j+1)}$.

9.2.6 Magnetische Quantenzahl des totalen Drehimpulses m_j

Die Komponente von j in einer ausgezeichneten Richtung, wie der eines äusseren, angelegten Magnetfeldes, ist die sogenannte "MAGNETISCHE QUANTENZAHL DES TOTALEN DREHIMPULSES" m_j (oder einfach m). Sie kann positive und negative Werte annehmen, die um 1 auseinanderliegen; beispielsweise für Fermionen kann m irgendeinen der $(2j+1)$ möglichen Werte $j, j-1, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -j+1, -j$ annehmen.

9.2.7 Radiale Quantenzahl n_r

Die Bewegung in einem zentralsymmetrischen Feld, wie etwa einem Coulomb-Feld, kann auf ein eindimensionales Problem zurückgeführt und wie das des harmonischen Oszillators gelöst werden. Die diskreten Energiewerte, die auf diese Weise für ein gegebenes ℓ gewonnen werden, können dann nach zunehmender Grösse geordnet werden, indem man jedem eine positive ganze, radiale Quantenzahl n_r, beginnend mit $n_r = 0$ zuordnet. In der Wellenmechanik entspricht n_r der Zahl der Knoten im radialen Teil der Wellenfunktion für endliche Werte von r und unter Ausschluss des Punktes $r = 0$. Sogar für Felder, die nicht Coulomb-artig sind, ist die Charakterisierung der Energieniveaux durch n_r eindeutig, während sie durch die Hauptquantenzahl (s. unten) nicht ist.

9.2.8 Hauptquantenzahl n

In einem Coulomb-Feld werden die Energieniveaux durch die "TOTALE" oder "HAUPTQUANTENZAHL" n charakterisiert, wobei die betreffenden Energien

$$E = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{9.2}$$

sind. Mit dieser Definition ist die totale Quantenzahl gegeben durch

$$n = n_r + \ell + 1. \tag{9.3}$$

Die möglichen Werte von ℓ laufen bis (n - 1).

9.2.9 Tabelle der Quantenzahlen für ein Teilchen

Tab. 9.1

Name	Symbol	Beziehungen	Werte
Bahnquantenzahl	ℓ		$0, 1, 2, \ldots (n-1)$
Spin	s		$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{(Fermionen)} \\ 0, 1 & \text{(Bosonen)} \end{cases}$
Totaler Drehimpuls	j	$\vec{j} = \vec{\ell} \pm \vec{s}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots & \text{(Fermionen)} \\ 0, 1, 2, \ldots & \text{(Bosonen)} \end{cases}$
Magn. Bahnquantenzahl	m_ℓ	$-\ell \leq m_\ell \leq +\ell$	$-\ell, -\ell+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \ell-1, \ell$
Magn. Spinquantenzahl	m_s	$-s \leq m_s \leq +s$	$\begin{cases} -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} & \text{(Fermionen)} \\ -1, 0, +1 & \text{(Bosonen)} \end{cases}$
Magn. Quantenzahl des totalen Drehimpulses	m_j oder m	$-j \leq m_j \leq +j$ $m = m_s + m_\ell$	$-j, -j+1, \ldots, j-1, j.$
Radiale Quantenzahl	n_r		$0, 1, 2, \ldots$
Hauptquantenzahl	n	$n = n_r + \ell + 1$	$1, 2, 3, \ldots$

9.3 Beschreibung der Kernzustände

9.3.1 Drehimpuls der Niveaux

Jeder beliebige Quantenzustand eines Kernes, sei es der Grundzustand oder ein angeregtes Niveau, wird von einer Zahl von Nukleonen gebildet, deren einzelne Bahndrehimpulse und Spins sich zusammensetzen und einen resultierenden totalen Drehimpuls für diesen Zustand ergeben. Ein solcher totaler Drehimpuls eines Niveaus wird durch die Quantenzahl I (oder in älterer Bezeichnung J) charakterisiert, wobei $\hbar\sqrt{I(I+1)}$ den Betrag des resultierenden totalen Drehimpulses darstellt. Für verschiedene Kerne und für die verschiedenen Niveaux jedes Kernes nimmt der "Kernspin" I numerisch verschiedene Werte an.

Da sich I aus den Spin- und Bahndrehimpuls-Komponenten der einzelnen Nukleonen zusammensetzt, muss die Art der vektoriellen Zusammensetzung berücksichtigt werden. Der Wert für I könnte durch direkte Summation aller j,

$$\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i \qquad (9.4)$$

oder andererseits durch die Vektorsummen der resultierenden Bahndrehimpulse und Nukleonenspins

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (9.5)$$

gegeben sein, worin

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i \quad \text{und} \quad \vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \qquad (9.6)$$

Die Summationen sind in jedem Fall über alle Komponenten der Nukleonen i auszuführen.

Diese beiden Fälle entsprechen einem verschiedenen "Kopplungsschema", das anschliessend erörtert wird.

9.3.2 Kopplungsschemata für die Drehimpulse

(a) Spin-Bahn-Kopplung (jj-Kopplung)

Wenn die vorherrschende Wechselwirkung in dem Teilchensystem für den betreffenden Kernzustand so ist, dass Spin und Bahndrehimpuls bei jedem anwesenden Nukleon stark gekoppelt sind und einen resultierenden totalen Drehimpuls j_i für jedes Nukleon ergeben, dann kann man die j_i als getrennte Grössen ansehen, die vektoriell zum totalen Drehimpuls des Kerns zusammenzusetzen sind:

$$\boxed{\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i} \qquad (9.7)$$

wobei für jedes Nukleon

$$\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i . \qquad (9.8)$$

Weiter ist bei diesem Modell anzunehmen, dass die ℓ_i der verschiedenen Nukleonen keine Gesamtwechselwirkung untereinander ergeben, und ebenso die s_i nicht, so dass es in diesem Fall keine Quantenzahl L oder S für ein Kernniveau gibt.

(b) Russell-Saunders-Kopplung (LS-Kopplung)

Wenn im Gegensatz zu oben die Bahndrehimpulse und die Spins nicht stark miteinander gekoppelt sind, dann braucht man die Spin-Bahn-Wechselwirkung am einzelnen Nukleon, die in diesem Modell als vernachlässigbar klein angenommen wird, nicht zu beachten und kann die Quantenzahlen

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i \; ; \; \vec{S} = \sum_i s_i \qquad (9.9)$$

bilden, indem man getrennt das ganze System der Bahndrehimpulse und ebenso alle einzelnen Spins zusammensetzt.

Man muss annehmen, dass sich die Niveaux mit verschiedenen L-Werten in der Energie unterscheiden, und dass ausserdem für einen vorgegebenen Wert von L auch die "Spin-Multipletts", die durch die Gruppe der zugehörigen S-Werte gebildet werden, verschiedene Energien haben. Der resultierende Kern-Gesamtdrehimpuls ist die Vektorsumme der summierten Spins und Bahnimpulse

$$\boxed{\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}} \qquad (9.10)$$

Bei LS-Kopplung benützt man die spektroskopische Nomenklatur (allerdings mit grossen Buchstaben, um die Quantenzustände des Kerns von denen eines einfachen Partikels zu unterscheiden):

L = 0	S - Niveau	
L = 1	P - "	
L = 2	D - "	
L = 3	F - "	etc.

Für jedes Niveau gibt es wegen der Spin-Multipletts (2 S + 1) mögliche Werte von I, die sich jeweils um 1 unterscheiden, und man bezeichnet (2 S + 1) als die "MULTIPLIZITÄT" des Niveaus, die als Affix links oben in der Bezeichnung der Zustände notiert wird, wie z.B.: Ein ^2F-Zustand ist ein solcher mit L = 3 und (2 S + 1) = 2, so dass $S = \frac{1}{2}$.

Ein besonderer I-Wert kann als Suffix rechts unten notiert werden:

$^2F_{5/2}$, wofür $L = 3,\ S = \frac{1}{2},\ I = \frac{5}{2}\ (= 3 - \frac{1}{2})$.

(c) Intermediäre Kopplung

Die beiden eben diskutierten Kopplungsschemata stellen Extremfälle dar; es ist natürlich möglich, intermediäre Kopplungen (INTERMEDIATE COUPLING) zu benützen.

9.3.3 Kernspin

Wenn man die Kernspins der Grundzustände klassifiziert, findet man, dass sie eine bestimmte Regel befolgen (Tab. 9.2)

Tab. 9.2.

Kernart	Anzahl	Kernspin im Grundzustand
uu	4	Ganzzahlig
ug	50	Halbzahlig
gu	55	Halbzahlig
gg	165	Null

Das lässt vermuten, dass bei der gg-Klasse Spinkompensation auftritt; d.h. die Spins der Protonen sind paarweise entgegengesetzt (antiparallel) und bei den Neutronen ebenso.

Demnach könnten die uu-Kerne als aus einem gg-Kern-Rumpf (Spin 0) bestehend angesehen werden, zu dem ein weiteres Proton und weiteres Neutron hinzugefügt ist, deren zusammengesetzte Spins und Bahndrehimpulse den resultierenden totalen Kerndrehimpuls bestimmen. Also erwartet man für uu-Kerne einen ganzzahligen Kernspin im Grundzustand, was tatsächlich der Fall ist (H^2: $I = 1$; Li^6: $I = 1$; B^{10}: $I = 3$; N^{14}: $I = 1$). - In ähnlicher Weise würden ug- und gu-Kerne aus einem gg-Rumpf und einem einzelnen "Valenz"-Proton bzw. -Neutron bestehen, das einen halbzahligen Spin ergibt (z.B., Li^7(ug): $I = \frac{3}{2}$; C^{13}(gu): $I = \frac{1}{2}$).

9.3.4 Grösster beobachtbarer Kernspin

In einer beispielsweise durch ein magnetisches Feld ausgezeichneten Richtung sind die beobachtbaren Werte des totalen Kerndrehimpulses quantenmechanisch gegeben als $m_I \hbar$, wobei m_I als die "MAGNETISCHE QUANTENZAHL DES KERNSPINS" (NUCLEAR MAGNETIC QUANTUM NUMBER) bezeichnet wird und sich über die Werte $-I, -I+1, \ldots, I-1, I$ erstreckt. Diese stellt die Projektion des Kernspins I bei einer mehr oder minder parallelen bzw. antiparallelen Einstellung gegenüber dieser Richtung dar. Der maximal beobachtbare Kernspin ist $I\hbar$. Es ist ausserdem üblich, die Bezeichnung "KERNSPIN" für den maximalen Wert von m_I, also I, zu verwenden.

9.3.5 Grad der Spinorientierung

Es ist üblich geworden, Kerne in einem Präparat zu klassifizieren als:

	UNORIENTIERT (UNORIENTED)	AUSGERICHTET (ALIGNED)	POLARISIERT (POLARISED)
wenn die Kernspins: orientiert sind	in beliebiger Richtung	längs einer Richtung (parallel und antiparallel)	in einer Richtung (alle parallel oder alle antiparallel)
	Fig. 9.3	Fig. 9.4	Fig. 9.5
Orientierungsgrad	= 0	= 1	= 2

9.4 Parität

9.4.1 Definition der Parität

Da die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch das Quadrat des Betrages der Wellenfunktion gegeben ist, lässt sich physikalisch nicht bestimmen, ob eine Wellenfunktion symmetrisch oder antisymmetrisch bezüglich der Inversion der Raumkoordinaten ist, ob also

$$\psi(\vec{r}, \vec{s}) = + \psi(-\vec{r}, \vec{s}) \qquad (9.11)$$

oder

$$\psi(\vec{r}, \vec{s}) = - \psi(-\vec{r}, \vec{s}) \qquad (9.12)$$

wo $\vec{r}$ die Raumkoordinaten und $\vec{s}$ die Spinorientierung des Teilchens darstellt. $\vec{s}$ ist ein Achsialvektor (Pseudovektor) und wechselt sein Vorzeichen nicht bei Spiegelung der Raumkoordinaten am Ursprung.

Um dieses auf die Zustände eines Kerns, der aus zahlreichen Nukleonen besteht, zu erweitern, kann die Wellenfunktion Ψ dieses Zustandes in erster Näherung als Produkt der Wellenfunktionen der Nukleonen geschrieben werden:

$$\Psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot \;\ldots \qquad (9.13)$$

oder als lineare Kombination solcher Produkte. Daraus folgt, dass die Parität von Ψ, also seine Eigenschaft bezüglich der Raumspiegelung, von den Paritätseigenschaften der ψ_i abhängt. Wenn Ψ symmetrisch ist, dann heisst seine Parität "gerade" ("even" oder +) und wenn es antisymmetrisch ist, "ungerade" ("odd" oder -). Ein Kernzustand mit dem totalen Drehimpuls I und gerader Parität wird dann als (I +) Zustand gekennzeichnet, z.B. $\frac{3}{2}$ +, womit angegeben ist, dass die Wellenfunktion des Kerns in diesem Zustand symmetrisch bezüglich der Spiegelung der Raumkoordinaten der Nukleonen ist (also ihr Vorzeichen nicht wechselt) und dass der quantenmechanische Erwartungswert für den Spin $\hbar\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$ ist.

Um die physikalische Bedeutung zu beleuchten, die der Kennzeichnung der Parität eines Kernzustandes zukommt, werde anschliessend der Zusammenhang zwischen den Bahnquantenzahlen ℓ_i der beteiligten Nukleonen und der Parität dieses Zustandes erörtert. Erst bei der Behandlung des β- und γ-Zerfalls der Kerne wird die Rolle der Parität des Kerns und der einzelnen Partikel in der Beeinflussung von Kernprozessen deutlich sichtbar.

9.4.2 Zusammenhang zwischen Parität und Bahndrehimpuls

Die Wellenfunktion eines einzelnen (nicht-relativistischen) Nukleons in dem Zustand mit dem Bahndrehimpuls ℓ wird für die gegenwärtige Betrachtung am besten in Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) ausgedrückt, die bei Raumspiegelung, wie anhand von Fig. 9.6 zu sehen ist, in

$$r \longrightarrow r\,, \quad \vartheta \longrightarrow \pi - \vartheta\,, \quad \varphi \longrightarrow \pi + \varphi \qquad (9.14)$$

übergehen.

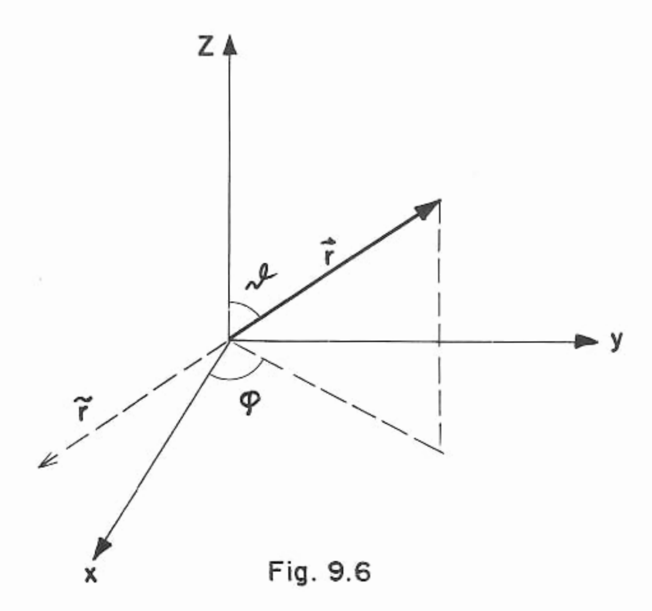


Fig. 9.6

Die Wellenfunktion lässt sich durch einen radiusabhängigen und einen winkelabhängigen Anteil ausdrücken

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) \tag{9.15}$$

von denen der radiale Anteil bei der Betrachtung der Parität der Wellenfunktion keine Rolle spielt, weil er wegen der $r \to \tilde{r}$ Transformation "gerade" ist. Die Kugelfunktion $Y(\vartheta, \varphi)$ kann, abgesehen von Konstanten die hier unwesentlich sind, in der Form

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = P_\ell^m(\cos\vartheta) \cdot e^{im\varphi} \tag{9.16}$$

ausgedrückt werden, die wie man sieht, von den Werten der Bahnquantenzahl und der magnetischen Quantenzahl m des totalen Drehimpulses abhängt. $P_\ell^m(\cos\vartheta)$ ist ein zugeordnetes Legendre-Polynom.

Wenn φ durch $\pi + \varphi$ ersetzt wird, dann ist der Faktor $e^{im\varphi}$ mit $(-)^m$ zu multiplizieren, und wenn ϑ durch $\pi - \vartheta$ ersetzt wird, dann wird aus $P_\ell^m(\cos\vartheta)$,

$$P_\ell^m(-\cos\vartheta) = (-1)^{\ell-m} P_\ell^m(\cos\vartheta). \tag{9.17}$$

Die ganze Funktion $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ wird also bei Raumspiegelung mit $(-1)^\ell$ multipliziert. Die Parität eines Zustandes mit einem gegebenen Wert ist somit unabhängig von m und gleich $(-)^\ell$.

Ein Zustand mit <u>geradem</u> ℓ hat <u>gerade</u> Parität (symmetrische Wellenfunktion)
Ein Zustand mit <u>ungeradem</u> ℓ hat <u>ungerade</u> Parität (antisymmetrische Wellenfunktion).

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass jedoch für <u>relativistische</u> Teilchen die Parität des Zustandes nicht mehr durch eine so einfache Beziehung von ℓ bestimmt ist.

Die obigen Betrachtungen können auf Kernzustände, die aus zahlreichen Nukleonen zusammengesetzt sind, erweitert werden. Die Gesamtparität des Zustandes ist gegeben durch das Produkt der Einzelparitäten der beteiligten Nukleonen (vgl. (9.13)).

9.4.3 Bestimmung der Parität eines Kernzustandes

Die Parität, die ein rein formaler Begriff ist, kann nicht experimentell direkt bestimmt werden. Die Parität eines Niveaus kommt durch den geraden oder ungeraden Charakter, der dem $\sum_i \ell_i$ innewohnt, zustande.

Die Paritätszuordnungen für die Grundzustände der Kerne können nach Messungen der Kernspins und der magnetischen Momente der Kerne (durch Polarisationsexperimente, Kerninduktion) und für angeregte Niveaux mittels Übergangsregeln vorgenommen werden.

9.4.4 Die Parität der Elementarteilchen

Durch willkürliche Vereinbarung ist dem Elektron eine positive Eigenparität zugeordnet worden. Dann ergibt sich, dass die Parität von Proton, Neutron, μ-Meson und Neutrino ebenfalls positiv ist, während die des π-Mesons negativ ist.

9.4.5 Erhaltung der Parität

Die physikalischen Prozesse lassen sich entsprechend der relativen Stärke der Wechselwirkungen in folgende vier allgemeine Kategorien einteilen:

1. Starke Wechselwirkungen — 1
   Normale Kern-Wechselwirkungen mit sehr starken Kräften kurzer Reichweite.

2. Elektromagnetische Wechselwirkungen — 10^{-2}
   Coulomb-Kräfte infolge Emission und Absorption virtueller Photonen.

3. Schwache Wechselwirkungen — 10^{-14}
   z.B. β-Zerfall.

4. Gravitations-Wechselwirkungen — 10^{-38}
   Gravitationskräfte.

Ganz rechts sind die ungefähren, relativen Werte der Stärke dieser Wechselwirkungen, und zwar die Werte der Kopplungskonstanten, z.B. im Fall der elektromagnetischen Wechselwirkungen die Feinstrukturkonstante $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \sim 10^{-2}$ angegeben.

Man hat gefunden, dass die Parität bei schwachen Wechselwirkungen nicht erhalten ist, aber bei starken Wechselwirkungen, die mit Ausnahme des β-Zerfalles

den grössten Anteil an Kernprozessen ausmachen, bis zu einer Genauigkeit von 99.96% (s. Tanner, PR 1957, 107, 1203) erhalten ist. Das bedeutet, dass beispielsweise beim α-Zerfall die Parität des zerfallenen Kerns und des emittierten α-Teilchens zusammen gleich der Parität des ursprünglichen Zustandes des zerfallenden Kernes sein muss. Ein α-Teilchen kann also nur dann als p-Welle ($\ell = 1$), die ungerade Parität hat, emittiert werden, wenn die Parität des Anfangs- und Endzustandes des Kerns verschieden sind.

9.4.6 Andere Symmetrien und Erhaltungssätze

Invarianzbedingungen führen auf Erhaltungssätze, z.B. in der analytischen Mechanik:

Invarianz bezüglich räumlicher Translation : Impulserhaltung
Invarianz bezüglich zeitlicher Translation : Energieerhaltung
Invarianz bezüglich Drehung : Drehimpulserhaltung.

Man war der Ansicht, dass drei weitere Symmetriegesetze für

(a) PARITÄT (PARITY) (P)

(b) LADUNGSKONJUGATION (Teilchen – Antiteilchen)
(CHARGE CONJUGATION) (C)

(c) ZEITUMKEHR (TIME REVERSAL) (T)

existieren und dass diese durch das PCT-THEOREM verknüpft sind, welches besagt, dass die gemeinsame Anwendung aller drei Transformationen (a), (b) und (c) das quantenmechanische System in seinem ursprünglichen Zustand belässt: der zusammengefasste Operator PCT ist mit dem Hamilton-Operator des Systems vertauschbar.

Diese Transformation lässt sich auch so vorstellen, dass an Materie direkt beobachtete Prozesse genau so erscheinen wie solche an Antimaterie, mit einem Film aufgenommen und rückwärtslaufend im Spiegel betrachtet.

Es kann heute als bewiesen gelten, dass die Invarianz bezüglich der ZEITUMKEHR in starken, elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen vorherrscht (Henley u. Jacobsohn, PR 1959, 113, 225 u. 234): Bei starken Wechselwirkungen fand man, dass sie besser als mit 97% erfüllt ist; genaue Prüfungen quantenelektrodynamischer Voraussagen zeigen Invarianz bei elektromagnetischen Wechselwirkungen, (z.B. Maxwellsche Gleichungen, s. auch: Sachs, Ann. of Phys. 1959, 6, 244); bei schwachen Wechselwirkungen zeigen Messungen am Zerfall polarisierter Neutronen eine Invarianz von mindestens 92% an. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Untersuchungen ist in CERN Bibl. 4 (1959) gegeben. Kürzlich haben Hwang, Ophel, Thorndike u. Welson (PR 1960, 119, 352) wichtige Untersuchungen im Gebiet der mittleren Energien (pp-Streuung bei 142 MeV) durchgeführt, welche die Zeitumkehrinvarianz hier recht gut bestätigt haben.

Also scheint die Operation PC invariant zu sein, so dass

(1) bei schwachen Wechselwirkungen sowohl Parität als auch Ladungskonjugation maximal verletzt sind,

(2) bei starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen beide erhalten sind.

Beispielsweise hat Tanner (PR 1957, 107, 1203) PARITÄTSERHALTUNG bei starken Wechselwirkungen bis zu einer Genauigkeit von 10^{-7} (nur durch die Empfindlichkeit seiner Apparatur begrenzt) nachgewiesen; er untersuchte die Ausbeute der Reaktion

$$F^{19} + p \longrightarrow O^{16} + \alpha$$

in der Umgebung eines bekannten 1^+ -Zustandes des Zwischenkernes Ne^{20}. Man weiss, dass die Grundzustände von O^{16} und vom α -Teilchen 0^+ sind; also können α -Teilchen höchster Energie nur von 0^+, 1^-, 2^+, ... - Niveaux des Ne^{20} kommen, wenn die Parität nicht verletzt sein soll. Bei dieser untersuchten Resonanz konnten experimentell keine α -Teilchen festgestellt werden.

9.5 Isospin-Quantenzahl (T und T_3)

Nicht nur hinsichtlich der Ladungsunabhängigkeit, sondern auch bezüglich vieler anderer (nicht-elektrischer) physikalischer Eigenschaften besteht eine so deutliche Ähnlichkeit zwischen Proton und Neutron, dass es plausibel ist, sie im Grunde als ein und dasselbe Teilchen, das NUKLEON, anzusehen, aber in verschiedenen Quantenzuständen. Der Begriff der LADUNGSUNABHÄNGIGKEIT (CHARGE INDEPENDENCE), der die Gleichheit von Systemen n-n, p-p und p-n enthält, geht weiter als der der "LADUNGSSYMMETRIE" (CHARGE SYMMETRY), der nur Systeme n-n und p-p als identisch erklärt. Um den Zustand des Nukleons zu unterscheiden, wurde eine Quantenzahl T eingeführt, die formale Eigenschaften hat, die denen der Spinquantenzahl s sehr ähnlich sind, derart, dass $T = \frac{1}{2}$ ist und seine "Projektion" im Isospinraum T_3 den Zustand des Nukleons bestimmt; sie nimmt in unserer Konvention den Wert $+\frac{1}{2}$ an, wenn das Teilchen sich in dem Zustand des Protons befindet und $-\frac{1}{2}$ im Neutronzustand.

Der Begriff des Isospins enthält also die "Unempfindlichkeit" der Kerne gegenüber der Ersetzung eines Neutrons durch ein Proton, sofern es beispielsweise die Energieniveaux anbelangt, d.h. die Ähnlichkeit einander entsprechender Energieniveaux in Spiegelkernen wie $_3Li^7$ und $_4Be^7$ (Fig. 9.7).

MeV
7,47 $\frac{5}{2}-$
6,54 $(\frac{1}{2}+, \frac{3}{2}+)$
4,63 $(\leq \frac{7}{2}-)$
0,48 $\frac{1}{2}-$
0 $\frac{3}{2}-$
Li^7

MeV
7,18 $(\frac{5}{2}-)$
6,35 $(\frac{3}{2}+)$
4,53 $\frac{7}{2}-$
0,43 $\frac{1}{2}-$
0 $\frac{3}{2}-$
Be^7

Fig. 9.7

Oder ${}_6C^{13}$ und ${}_7N^{13}$ (Fig. 9.8):

C^{13}: MeV		N^{13}: MeV	
3,85	$\frac{5}{2}+$	3,56	$\frac{5}{2}+$
3,68	$\frac{3}{2}-$	3,51	$\frac{3}{2}-$
3,085	$\frac{1}{2}+$	2,365	$\frac{1}{2}+$
0	$\frac{1}{2}-$	0	$(\frac{1}{2}-)$

Fig. 9.8

Für einen gegebenen Kern ist es leicht, T_3 zu bestimmen, denn sein Betrag ist einfach gleich (minus) der Hälfte des Neutronenüberschusses

$$\boxed{T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)}. \tag{9.18}$$

Man beachte, dass T_3 denselben Wert für alle Niveaux eines Kerns hat, während T selbst verschiedene Werte annehmen kann.

Bei Benützung des Isospin-Formalismus kann man die Wellenfunktion des Kerns

$$\psi = \psi(r_1, \xi_1 ; r_2, \xi_2 ; \cdots ; r_Z, \xi_Z ; r'_{Z+1}, \xi'_{Z+1} ; \cdots ; r'_A, \xi'_A) \tag{9.19}$$

(wobei die r_i die Lagevektoren und die ξ_i die Spinvektoren der Nukleonen sind und die ungestrichenen Parameter Protonen, die gestrichenen Neutronen beschreiben), durch die Wellenfunktion

$$\psi = \psi(r_1, \xi_1, \tau_1 ; r_2, \xi_2, \tau_2 ; \cdots ; r_{Z+1}, \xi_{Z+1}, \tau_{Z+1} ; \cdots ; r_A, \xi_A, \tau_A) \tag{9.20}$$

ersetzen, wo $\tau_i = +1$, wenn das Teilchen i ein Proton ist, und $\tau_i = -1$, wenn es ein Neutron ist. Dann ist gemäss Definition

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A} \tau_i = \frac{1}{2}(Z - N), \tag{9.21}$$

da sich der Isospin der Neutronen und Protonen, die paarweise vorhanden sind, gegenseitig heraushebt und der Gesamtisospin einfach der der unpaarigen Überschussneutronen ist.

Nun ist bei vorgegebenem A für einen Kern X der Wert $\frac{1}{2}(Z_X - N_X)$ am grössten. Dieser entspricht dann dem maximalen T_3 eines Systems mit $T = T_3'$, das $(2T + 1)$ Zustände mit Erhaltung von Spin und Parität enthält. Ein solches System nennt sich "ISOBARENMULTIPLETT". Wenn beispielsweise A = 2 ist, dann stellt $T_3 = -1$ die Neutron-Neutron-Streuung dar, $T_3 = 0$ entweder das Deuteron oder die

Neutron-Proton-Streuung und $T_3 = +1$ die Proton-Proton-Streuung, so dass das System eine Triade bildet.

Zur weiteren Illustration von Isobaren-Multipletts, und zwar solchen, bei denen der ganze Bereich möglicher T_3-Werte von $-T, -T+1, \ldots, T-1, T$ vorhanden ist, seien die benachbarten Isobare C^{14}, N^{14}, 0^{14} betrachtet, deren entsprechende T_3-Werte -1, 0, +1 sind. Für die Niveaux, deren Wellenfunktion in jeder Hinsicht, mit Ausnahme der Ersetzung eines Neutrons durch ein Proton, ähnlich sind ("korrespondierende Zustände"), zeigt die nähere Untersuchung eine Ähnlichkeit zwischen den Grundzuständen von C^{14} und 0^{14} und dem 2,31-MeV-Niveau von N^{14}. Diese Niveaux sind bezüglich Eigendrehimpuls, Parität und Energie, abgesehen von Coulomb-Effekten, sehr ähnlich. Dann ist es plausibel, diese als eine Triade des Isospins $T = 1$ (Multiplizität $2T + 1 = 3$) anzusehen. Dem Grundzustand von N^{14} (also einem Isobaren-Singulett) ordnet man einen Isospin $T = 0$ zu (Fig. 9.9).

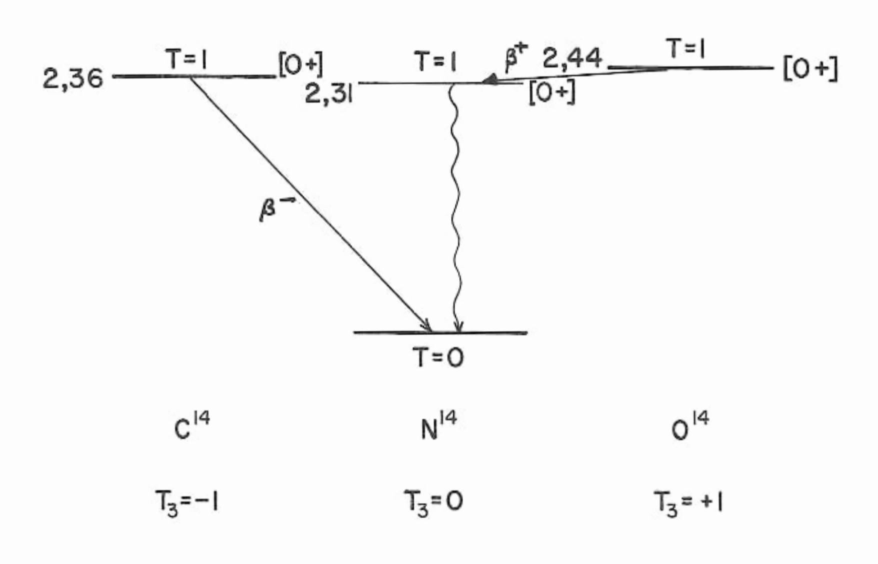


Fig. 9.9

Die Ähnlichkeit der Wellenfunktionen zeigt sich beispielsweise daran, dass der β^+-Zerfall von 0^{14} eher zu dem <u>angeregten</u> 2,31 MeV Niveau des N^{14} als zu dessen Grundzustand führt.

Es ist klar, dass der geeignete Wert von T nur durch detaillierten Vergleich der Kerneigenschaften eines gegebenen Niveaus mit den korrespondierenden Zuständen bei seinen Isobaren in Verbindung mit der Kenntnis des Wertes des "projizierten" Isospins T_3 und theoretischen Voraussagen auf Grund eines Kernmodells zugeordnet werden kann.

Es erscheint jetzt mehr und mehr sicher, dass der Isospin ebenso wie der totale Drehimpuls bei Kernwechselwirkungen erhalten bleibt.

Die Isospin-Invarianz ergibt die Eigenschaft der Erhaltung elektrischer Ladung, die man bei allen Arten von Wechselwirkungen als erfüllt ansieht.

Eine gute Beschreibung und Zusammenfassung: s. Schintlmeister "Der Isospin von Atomkernen" (Akademie-Verlag, Berlin, 1960).

9.6 Strangeness (Isoparität)

Eine auffallende "Lethargie" in dem Verhältnis von Kernreaktionsraten führte zu Überlegungen über die "STRANGENESS": Man hatte gefunden, dass ein ausserordentlicher Unterschied zwischen den mittleren Entstehungszeiten und den mittleren Zerfallszeiten bei den schweren, als "HYPERONEN" bezeichneten Elementarteilchen besteht, deren Masse grösser als die des Protons ist. Die Entstehungsdauer ist ungefähr gleich der Zeit, die ein relativistisches Teilchen braucht, um einen Nukleonenradius zu durchqueren ($\sim 10^{-23}$ sec). Sind sie jedoch erst einmal gebildet, dann zerfallen alle Hyperonen (mit Ausnahme der sehr kurzlebigen Σ^0) in leichtere Teilchen plus π -Meson in etwa 10^{-10}sec. Die Entstehungszeit steht also zur Zerfallszeit im gleichen Verhältnis wie 1 Sekunde zu 1 Million Jahre (ein Faktor 10^{13})! Hyperonenbildung stellt eine "starke Wechselwirkung", ihr Zerfall eine "schwache Wechselwirkung" dar.

Gell-Mann und Pais führten den Begriff einer STRANGENESS-QUANTENZAHL ein, um dieses seltsame Verhalten durch eine ad-hoc-Erweiterung des Isospin-Formalismus in Rechnung zu setzen.

Der Isospin erhöht im Grunde genommen die Zahl der Kernzustände noch innerhalb der Gültigkeit des Ausschlussprinzips von Pauli; seine T_3-Komponente ist eine Darstellung im "Isospinraum" der elektrischen Ladung Q eines Nukleons. Man kann die Formel für "Ladungsmultipletts" als

$$\boxed{Q = T_3 + \frac{N}{2}} \qquad (9.22)$$

schreiben, wo die BARYONENZAHL

$N = 1$ für Nukleonen und
$N = 0$ für π -Mesonen

ist. Für Antinukleonen kehren sich die Vorzeichen von N und T_3 um.

Gell-Mann verallgemeinerte dieses, indem er in dem letzten Term von (9.22) die "STRANGENESSZAHL" S einführte, die für alle gewöhnlichen Teilchen wie e, p, n, gleich null und für die neuen, fremden ("strange") Partikel von null verschieden ist, z.B. $S = -1$ für Σ-&-Λ-Hyperonen. Man erhielt auf diese Weise die "QUANTENZAHL DER ISOPARITÄT U", die die Summe aus der Baryonenzahl und der Strangenesszahl ist, so dass

$$\boxed{Q = T_3 + \frac{U}{2} = T_3 + \frac{1}{2}(N + S).} \qquad (9.23)$$

Unter der Annahme, dass die Strangeness bei starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen erhalten bleibt, sich aber bei schwachen Wechselwirkungen

um eins ändern kann, erwies es sich als möglich, das physikalische Verhalten aller Elementarteilchen zufriedenstellend in Rechnung zu setzen. Die Baryonenzahl bleibt bei allen Wechselwirkungen erhalten.

Beispielsweise tritt Hyperonenbildung nur paarweise (mit entgegengesetzter Strangeness) durch schnelles Zusammenfügen von π-Mesonen und Protonen, die beide S = 0 haben, auf. Dann kann ein einzelnes Hyperon mit Ausnahme von Σ^0 ($\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma, \Delta S = 0$), wenn Q und N erhalten bleiben, nicht zerfallen, es sei denn, dass sich S ändert. Dies ist aber gewissermassen "verboten", d.h. eine Änderung $\Delta S = \pm 1$ führt zu einem "lethargischen" Zerfall, und eine Änderung $|\Delta S| > 1$ führt zu unendlich langer Zerfallszeit.

Ein Invarianzprinzip in Verbindung mit der Erhaltung der Strangeness wurde von Racah vorgeschlagen durch Interpretation von U als "PARITÄTSINDEX", in der Art, dass er der Exponent von i ($i \equiv \sqrt{-1}$) ist, der vor der Zustandsfunktion eines Partikels erscheint, wenn man eine Inversion im Isoraum ausführt; (vgl. das $(-)^{\ell}$ als Paritätsindex bei Raumspiegelung). Während S = 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2 bei Teilchen ist, die bisher in Kernprozessen behandelt wurden, nimmt U die Werte U = 0, $\pm$ 1 an, so dass man Teilchen mit U = 0 als "ISOBOSONEN" (Isosinguletts oder Isotripletts) und solche mit U = $\pm$ 1 als "ISO-FERMIONEN" (Isodubletts) bezeichnen kann.

Wenn man

$$\boxed{Q = T_3 + \frac{U}{2}} \qquad (9.24)$$

schreibt, erhält man die von Gell-Mann vorgeschlagene Regel für die "Erhaltung der Isoparität".

Es ist von grossem Interesse, den Formalismus einen Schritt weiterzuführen. Wenn man der Isoparität einen Operator U_{op} zuordnet, dann lässt sich die Operation der Inversion im Isoraum

$$P_{op} = i^{U_{op}} = e^{+i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot U_{op}} \qquad (9.25)$$

schreiben. In einer solchen Darstellung erscheint T_3 als erzeugender Operator einer Drehung α um die T_3-Achse

$$A_{op}(\alpha) = e^{i (T_3)_{op} \cdot \alpha} \qquad (9.26)$$

und der Operator der elektrischen Ladung Q_{op} als erzeugender Operator einer Kombination einer halben Drehung und Inversion

$$P_{op} A_{op}(\pi) = A_{op}(\pi) P_{op} = e^{i \pi Q_{op}}, \qquad (9.27)$$

was einer Reflexion an der Äquatorialebene entspricht, die senkrecht zur T_3-Achse liegt.

Die zunehmende Reduzierung in der Symmetrie von starken, über elektromagnetische zu schwachen Wechselwirkungen entspricht dann einer Reduzierung von der vollständigen Rotations-Inversionsgruppe über die zylindrische Rotationsgruppe zur einfachen Spiegelgruppe im Isoraum.

Selbstverständlich kommt diesen Betrachtungen nur eine rein pragmatische Bedeutung zu.

9.7 Magnetisches Moment

Ein geladenes "spinnendes" Teilchen, wie beispielsweise ein Kern mit dem totalen Drehimpuls I, besitzt ein magnetisches Dipolmoment vom Betrag $\frac{q\hbar}{2\,Mc}\sqrt{I(I+1)}$, wenn M seine Masse und q seine homogen-verteilte elektrische Ladung ist.

Diese Beziehung muss noch etwas modifiziert werden:

(a) durch einen dimensionslosen Korrekturfaktor, den "g-FAKTOR" oder "LANDÉ-FAKTOR", und

(b) durch Berücksichtigung der Tatsache, dass die grösste beobachtbare Komponente des totalen Drehimpulses I in Einheiten $\hbar$ ist und das grösste beobachtbare magnetische Moment dann

$$\boxed{\mu = g \cdot I \cdot \mu_K} \qquad (9.28)$$

ist, worin $\mu_K \equiv \frac{e\hbar}{2M_pc}$ als das "KERNMAGNETON" bezeichnet wird.

Also ist

$$\boxed{\mu_K = 5{,}050 \cdot 10^{-24} \text{ erg/Gauss.}}$$

Es ist üblich, das magnetische Kernmoment μ in Einheiten von μ_K auszudrücken; man beachte, dass in diesem Fall μ, g und I nur einfache Zahlen sind. μ wird als positiv gerechnet, wenn seine Richtung bezüglich des Drehimpulsvektors mit der einer rotierenden, positiven Ladung übereinstimmt.

9.7.1 Schüler-Schmidt-Diagramme

Wenn man bequemlichkeitshalber die mathematische Strenge zurückstellt, lässt sich eine halbklassische Analyse der Beziehung zwischen magnetischem Moment und totalem Drehimpuls mit Hilfe des Vektormodells vornehmen. Man kann die Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} \ell^* &\equiv \sqrt{\ell(\ell+1)} \\ s^* &\equiv \sqrt{s(s+1)} \\ j^* &\equiv \sqrt{j(j+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (9.29)$$

einführen und magnetische "Bahnmomente" und "Spinmomente"

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mu}_{\ell^*} &= g_{\ell^*}\,\vec{\ell^*} \\ \vec{\mu}_{s^*} &= g_{s^*}\,\vec{s^*} \end{aligned}\right\} \qquad (9.30)$$

definieren, wobei die Quantenzahlen j*, ℓ* und s* der unpaarigen Nukleonen im Kern

hier als Vektoren angesehen werden. Auf Grund des Ein-Teilchen-Modells bestimmen diese "Valenz"-Nukleonen die Eigenschaften des Kerns, so dass I = j, also I* = j*.

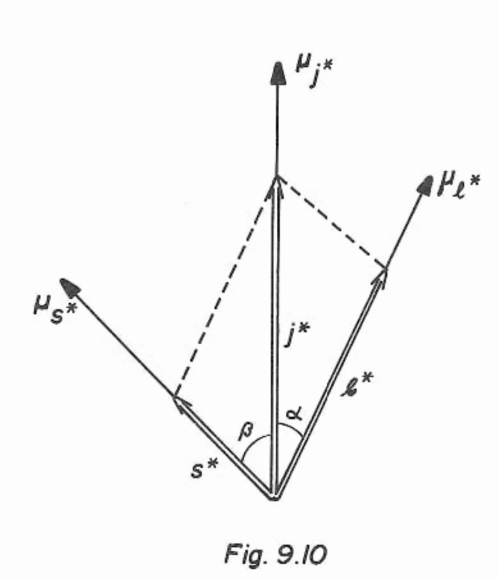


Fig. 9.10

Das Vektordiagramm setzt sich wie folgt zusammen (Fig. 9.10): ℓ* und s* präzedieren um j*, so dass nur ihre Komponenten längs j* berücksichtigt zu werden brauchen. j* selbst präzediert um eine ausgezeichnete Richtung, wie die eines äusseren Magnetfeldes, in der Weise, dass j die grösste beobachtbare Komponente von j* ist.

Dann ist aus Fig. 9.10,

$$\mu_{j^*} = \mu_{\ell^*} \cdot \cos\alpha + \mu_{s^*} \cdot \cos\beta \,, \qquad (9.31)$$

$$\cos\alpha = \frac{j^{*2} + \ell^{*2} - s^{*2}}{2 j^* \ell^*} \qquad (9.32)$$

$$\cos\beta = \frac{j^{*2} + s^{*2} - \ell^{*2}}{2 j^* s^*} \,. \qquad (9.33)$$

Ferner ist gemäss (9.30)

$$g_{\ell^*} \equiv \frac{\mu_{\ell^*}}{\ell^*} = \frac{\mu_\ell}{\ell} = g_\ell \qquad (9.34)$$

$$g_{s^*} \equiv \frac{\mu_{s^*}}{s^*} = \frac{\mu_s}{s} = g_s \,, \qquad (9.35)$$

und der g-Faktor eines unpaarigen Nukleons gemäss (9.28)

$$g = \frac{\mu_I}{I} = \frac{\mu}{j} = \frac{\mu_{j^*}}{j^*} \qquad (9.36)$$

wobei μ die grösste beobachtbare Komponente des gesamten magnetischen Dipolmoments μ_I ist. Also ist nach Einsetzen von (9.32) bis (9.36) in (9.31)

$$g = \tfrac{1}{2} g_\ell \left(1 + \frac{\ell^{*2} - s^{*2}}{j^{*2}}\right) + \tfrac{1}{2} g_s \left(1 - \frac{\ell^{*2} - s^{*2}}{j^{*2}}\right). \qquad (9.37)$$

Es seien nun die zwei möglichen Spineinstellungen betrachtet:

(i) <u>Parallele Einstellung ($I = j = \ell + s = \ell + \frac{1}{2}$)</u>

Hier ist

$$g = g_\ell \cdot \frac{\ell}{I} + g_s \cdot \frac{s}{I} \,, \qquad (9.38)$$

so dass

$$\mu = \mu_\ell + \mu_s \,. \qquad (9.39)$$

(ii) Antiparallele Einstellung ($I = j = \ell - s = \ell - \frac{1}{2}$)

Hier ist

$$g = g_\ell \left(\frac{\ell + 1}{I + 1} \right) - g_s \left(\frac{s}{I + 1} \right), \qquad (9.40)$$

so dass

$$\mu = g_\ell \cdot \frac{I(2I+3)}{2(I+1)} - \mu_s \cdot \frac{I}{I+1} = \mu_\ell \frac{I(2I+3)}{(2I+1)(I+1)} - \mu_s \frac{I}{I+1} . \qquad (9.41)$$

Diese Beziehungen lassen sich auf ug-Kerne (unpaariges Proton) und gu-Kerne (unpaariges Neutron) durch entsprechendes Einsetzen der g-Faktoren für das Proton ($g_\ell = 1$; $g_s = 2\mu_s = 2 \cdot 2{,}79$) und für das Neutron ($g_\ell = 0$; $g_s = 2\mu_s = -2 \cdot 1{,}91$) anwenden (Tab. 9.3):

Tab. 9.3

	ug-Kerne	gu-Kerne	
$I = \ell + \frac{1}{2}$	$\mu = I + 2{,}29$	$\mu = -1{,}91$	(9.42)
$I = \ell - \frac{1}{2}$	$\mu = I - 2{,}29 \frac{I}{I+1}$	$\mu = 1{,}91 \frac{I}{I+1}$	(9.43)

In einer graphischen Darstellung von μ gegen I (SCHÜLER-SCHMIDT-DIAGRAMM) sollten die einzelnen Kerne auf den entsprechenden Kurven liegen (Fig. 9.11). In Wirklichkeit stellte es sich heraus, dass die experimentellen Werte zwischen den Schmidt-Linien liegen (Fig. 9.12 und 9.13, die einer moderneren Darstellung entsprechen).

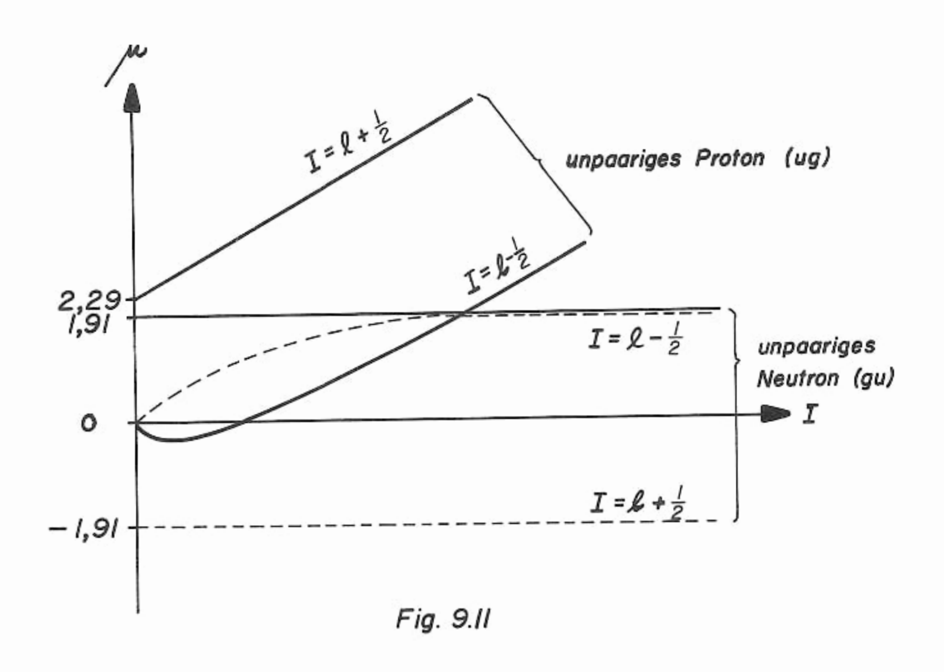


Fig. 9.11

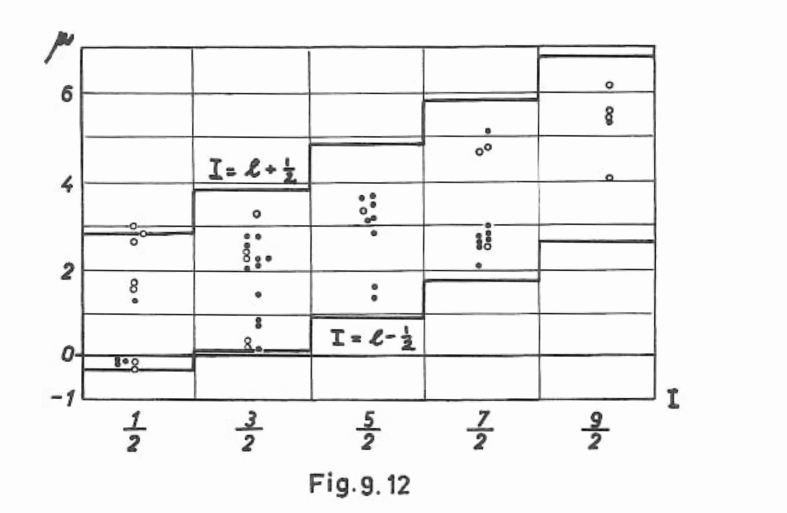


Fig. 9.12

ug-Kerne

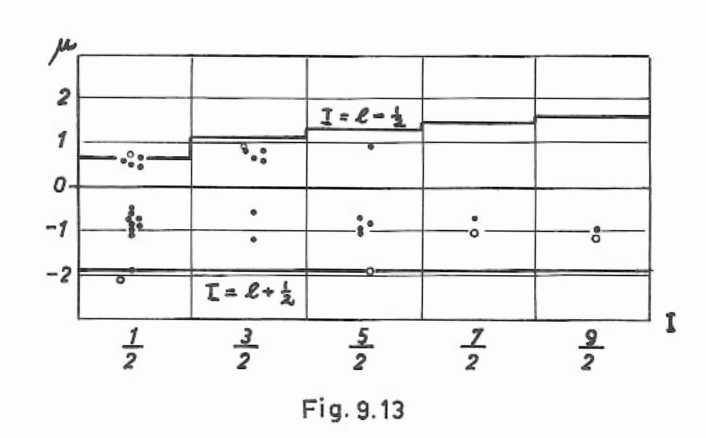


Fig. 9.13

gu-Kerne

9.8 Absoluter Wirkungsquerschnitt

Der Begriff des Wirkungsquerschnittes als ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prozess stattfindet, wurde in Kap. 2 eingeführt. Da der Wirkungsquerschnitt die Fläche einer hypothetischen Scheibe ist, erscheint es plausibel, ihn einfach möglicherweise als die Querschnittsfläche des Targetkerns anzusehen. Dieser nennt sich der "GEOMETRISCHE WIRKUNGSQUERSCHNITT" σ_g und ist gegeben durch

$$\boxed{\sigma_g = \pi R^2 = \pi R_0^2 A^{2/3}} \quad , \qquad (9.44)$$

z.B. für Au^{198}: σ_g = 2,1 barn.

Dass der tatsächliche Wirkungsquerschnitt σ für einen gegebenen Prozess, z.B. für den Einfang thermischer Neutronen (n,γ) in keinem Zusammenhang mit σ_g steht, geht daraus hervor, dass Messungen für die Reaktion $Au^{198}\,(n,\gamma)\,Au^{199}$: $\sigma = 35000$ b und andererseits für $C^{13}\,(n,\gamma)\,C^{14}$: $\sigma = 9 \cdot 10^{-4}$ b ergeben, was den Umfang zeigt, in dem die Werte von σ variieren.

Der "ABSOLUTE WIRKUNGSQUERSCHNITT" bei Stossprozessen ist vom Bahndrehimpuls der einfallenden Teilchen bezogen auf den Targetkern abhängig (Fig. 9.14).

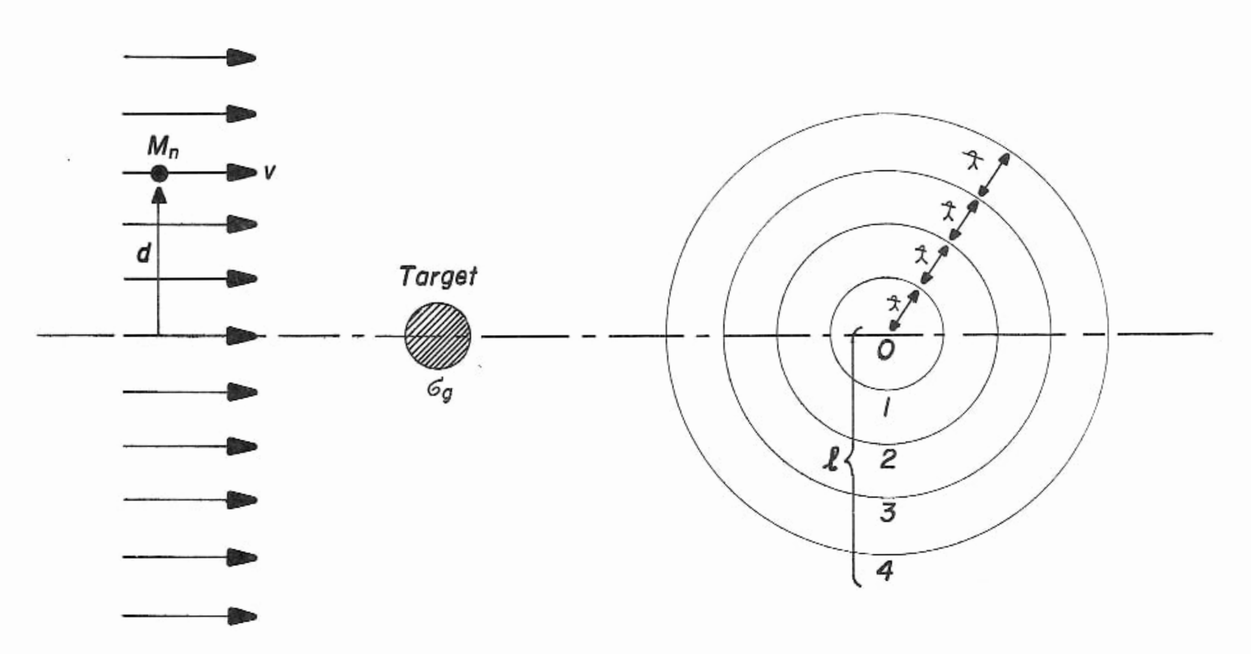


Fig. 9.14

Ein Strahl langsamer, monochromatischer Neutronen falle mit der Geschwindigkeit v auf das Target (Fläche σ_g). Ein Neutron (Masse M_n), das den STOSSPARAMETER d (Abstand senkrecht zur Einfallsrichtung) hat, besitzt in bezug auf den Targetkern den Bahndrehimpuls $M_n vd$. Dieser muss quantisiert werden, so dass

$$M_n v d = \ell \hbar \; . \qquad (9.45)$$

Dann ist

$$d = \frac{\ell \hbar}{M_n v} = \ell ƛ \qquad (9.46)$$

wobei

$$ƛ \equiv \frac{\hbar}{M_n v} \qquad (9.47)$$

die reduzierte de-Broglie-Wellenlänge des Neutrons ist. Streng genommen müsste $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ anstelle von ℓ geschrieben werden.

In naiver Veranschaulichung wäre d quantisiert, so dass also Neutronen mit

den Quantenzahlen des Bahndrehimpulses $\ell = 0$ den Stossparameter $d = 0$
$\ell = 1$ $d = \lambdabar$
$\ell = 2$ $d = 2\lambdabar$ etc.

hätten. Der Strahl lässt sich damit als in zylindrische Zonen mit diskreten Bahndrehimpulsen eingeteilt vorstellen, d.h. eine S-Wellenzone bewegt sich entlang der Targetachse und die P-, D-, F-Bereiche etc. ebenso, untereinander jeweils um den Abstand $\lambdabar$ getrennt (Fig. 9.14). Man beachte, dass in Wirklichkeit keine Quantisierung des Stossparameters auftritt.

D-Wellen-Neutronen würden sich also in der Fläche des projizierten Ringes, der mit $\ell = 2$ gekennzeichnet ist, in einem Abstand $d = 2\lambdabar$ befinden, und wenn sie eine Reaktion verursachen, muss der absolute Wirkungsquerschnitt die Fläche dieses Ringes haben, also ungefähr die Kreisringfläche zwischen $d = 2\lambdabar$ und $d = 3\lambdabar$. Allgemein ist für Neutronen mit dem Bahndrehimpuls ℓ, die als Ergebnis eines Kernprozesses eingefangen, d.h. aus dem einfallenden Strahl herausgenommen werden, die Kreisringfläche diejenige zwischen $\ell\lambdabar$ und $(\ell + 1)\lambdabar$:

$$\sigma_\ell = \pi(\ell+1)^2 \lambdabar^2 - \pi \ell^2 \lambdabar^2 \qquad (9.48)$$

$$\boxed{\sigma_\ell = \pi \lambdabar^2 (2\ell+1)} \, . \qquad (9.49)$$

Während also σ_g nur von den Abmessungen des Targetkerns abhängt, ist σ_ℓ unabhängig davon, hängt aber vom Bahndrehimpuls und von der de-Broglie-Wellenlänge der einfallenden Teilchen ab. Für kleine Geschwindigkeiten (niedrige Energien) ist $\lambdabar$ gross; σ_ℓ kann dann sehr viel grössere Werte als σ_g annehmen.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Bei niedrigen Energien ist} & \sigma_\ell \gg \sigma_g & \text{und} \\ \text{bei hohen Energien } (\sim \text{MeV}) & \sigma_\ell \approx \sigma_g & (\text{da } \lambdabar \approx R). \end{array}\right\} \qquad (9.50)$$

Die Energieabhängigkeit des Stossparameters ergibt sich zu

$$E = \frac{p^2}{2M_n} = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2M_n d^2} \, . \qquad (9.51)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei den geringen Energien thermischer Neutronen der Stossparameter d für $\ell \neq 0$ sehr gross wäre. Für $E = \frac{1}{40}$ eV und $\ell = 1$ wird beispielsweise $d \cong 4 \cdot 10^{-9}$ cm. Die P-Welle ist also gewissermassen schon so weit vom Kern entfernt, dass keine Wechselwirkung mit $\ell > 0$ stattfinden kann. Bei thermischen Neutronen tritt also praktisch nur S-Streuung ($\ell = 0$) auf.

10. BETA-ZERFALL

10.1 Einleitung

Die Erforschung des β-Zerfalls ist eines der wechselvollsten Kapitel der Physik, bei dem mehr als einmal an ihren Fundamenten gerüttelt wurde.

Anfangs war es das kontinuierliche Energiespektrum, das selbst bei hervorragenden Physikern ernste Zweifel an der Gültigkeit des Energiesatzes aufkommen liess. Nur die kühne Postulierung eines Teilchens, das sich der Messung entzieht, die Neutrinohypothese von Pauli, wies einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten. Die Formulierung der β-Theorie von Fermi mit Hilfe dieser Hypothese brachte glänzende Erfolge. Es folgten etwa 25 Jahre intensiver Bemühungen, um die Beteiligung der möglichen Wechselwirkungen aufzuklären.

Ein grosser Teil dieser Ergebnisse stellte sich jedoch in ganz neuem Licht dar, als sich auf die Anregung von Lee und Yang hin herausstellte, dass die Parität, d.h. die Invarianz gegenüber Raumspiegelung, beim β-Zerfall überraschenderweise gar nicht erfüllt ist, während man an dieses grundlegende Symmetriegesetz bisher fest geglaubt hatte. Damit wurden zugleich Fragen über die Verletzung weiterer Symmetriegesetze aufgeworfen.

Zweifellos hat die Paritätsverletzung ein tiefergehendes Verständnis für die β-Wechselwirkung eröffnet. Sie bedeutet eine wesentliche Zäsur in der Geschichte des β-Zerfalls. Angesichts dessen spricht man von der "vorparitätischen" als der klassichen Theorie.

10.1.1 Zerfallstypen

Unter dem Begriff β-Zerfall werden alle Kernzerfälle zusammengefasst, bei denen sich die Kernladung Z um eine Einheit ändert aber die Massenzahl A konstant bleibt. Dazu gehören β^--Zerfall, β^+-Zerfall und Elektroneinfang (Fig. 10.1).

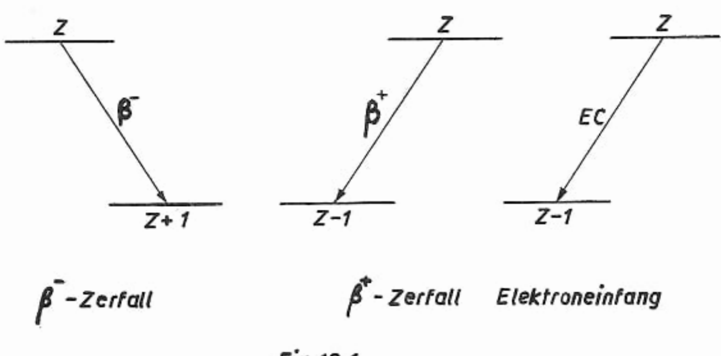


Fig.10.1

Beim β^--ZERFALL wird ein Elektron emittiert, die Kernladung ändert sich von Z in Z + 1. Das Element rückt im periodischen System eine Stelle nach rechts.

Beim β^+-ZERFALL wird ein Positron emittiert, die Kernladung ändert sich von Z in Z - 1. Das Element rückt im periodischen System eine Stelle nach links. Die Hülle gibt ein überschüssiges Elektron ab.

Beim ELEKTRONEINFANG wird vom Kern ein Elektron aus der Atomhülle absorbiert. Überwiegend werden dabei K-Elektronen eingefangen (K-Einfang), zu kleineren Anteilen aber auch L, M ... -Elektronen, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der K-Elektronen am Ort des Kerns grösser ist als die der anderen. Die Kernladung ändert sich von Z in Z - 1. Das Atom ist nach wie vor neutral, es befindet sich jedoch in einem angeregten Zustand, weil seine Elektronenhülle zunächst eine Lücke in einer der unteren Schalen enthält.

In vielen Fällen führt der Zerfall nicht direkt auf den Grundzustand, sondern auf ein angeregtes Niveau des Tochterkernes. Die Energie dieses angeregten Zustandes kann durch Emission entweder von γ-Quanten oder Konversionselektronen abgegeben werden.

Die beim Elektroneinfang oder durch Konversion entstandenen Lücken in den inneren Elektronenschalen haben die Emission von Auger-Elektronen oder charakteristischen Röntgenlinien des Tochterelements zur Folge.

Insgesamt erfährt die Elektronenhülle durch die plötzliche Änderung der Kernladung einen Stoss, wordurch es zu weiteren Ionisationen kommt.

Beim β-Zerfall treten also ausser den β-Teilchen, abgesehen von elektromagnetischer Strahlung, Auger-Elektronen und Konversionselektronen auf; deren Energie ist diskret.

Die Möglichkeit des β-Zerfalls hängt davon ab, ob die Bindungsenergie des Kernes im Endzustand grösser ist als die im Anfangszustand, wie es an den Parabeln für die isobaren Kerne in Abschnitt 1.6.7 diskutiert wurde. Die dort durchgeführten Rechnungen sind noch mit einer Korrektur zu versehen. Denn in den Gleichungen (1.49) bis (1.54) wurde mit den Massendifferenzen der neutralen Atome gerechnet; das gilt aber nur, wenn die Elektronenbilanz ausgeglichen ist, und diese Bedingung ist nicht bei allen β-Zerfällen erfüllt. Massgebend für die Zerfallsenergie ist die Massendifferenz der Kerne.

Dabei ergeben sich bei β^--, β^+-Zerfall und Elektroneinfang folgende unterschiedliche Ausdrücke für die Zerfallsenergie:

β^--Zerfall: Die Masse des Mutterkerns $M(Z,A) - Zm_e$ teilt sich in die Masse des Tochterkerns $M(Z+1, A) - (Z+1)m_e$ und die des β-Teilchens m_e; die Zerfallsenergie ist

$$\Delta E = \left\{ \left[M(Z,A) - Z \cdot m_e \right] - \left[M(Z+1,A) - (Z+1) m_e + m_e \right] \right\} c^2$$

$$\Delta E = \left\{ M(Z,A) - M(Z+1,A) \right\} c^2 . \qquad (10.1)$$

β^+-Zerfall: Die Masse des Mutterkerns $M(Z,A) - Zm_e$ teilt sich in die des Tochterkerns $M(Z - 1, A) - (Z - 1)m_e$ und die des Positrons; die Zerfallsenergie ist dann:

$$\Delta E = \{[M(Z,A) - Z \cdot m_e] - [M(Z-1,A) - (Z-1)m_e] - m_e\} c^2$$

$$\Delta E = \{M(Z,A) - M(Z-1,A) - 2m_e\} c^2 . \qquad (10.2)$$

Elektroneinfang: Die Masse des Mutterkerns $M(Z, A) - Zm_e$ und des eingefangenen Elektrons m_e geht über in die Masse des Tochterkerns $M(Z - 1, A)-(Z -1)m_e$; die Zerfallsenergie ist

$$\Delta E = \{[M(Z,A) - Z \cdot m_e] + m_e - [M(Z-1,A) - (Z-1)m_e]\} c^2$$

$$\Delta E = \{M(Z,A) - M(Z-1,A)\} c^2 . \qquad (10.3)$$

Damit diese Prozesse stattfinden, muss $\Delta E > 0$ sein. Aus der Gegenüberstellung der drei Fälle in dieser Form ist ersichtlich, dass beim β^--Zerfall und Elektroneinfang lediglich die Masse des Mutteratoms grösser sein muss als die des Tochteratoms. Beim β^+-Zerfall muss diese Differenz jedoch mindestens $2\,m_e$ betragen.

Da der β^+-Zerfall und der Elektroneinfang auf denselben Tochterkern führen, tritt der Elektroneinfang stets als Konkurrenzprozess zum β^+-Zerfall auf. Elektroneinfang findet nur dann allein statt, wenn die Massendifferenz $[M(Z,A) - M(Z - 1, A)]$ zwischen null und $2\,m_e$ liegt.

10.1.2 β-Spektrum

Das Energiespektrum der β-Teilchen zeigt einen kontinuierlichen Verlauf (Fig. 10.2). Auger-Elektronen und Konversionselektronen sind dem β-Kontinuum überlagert.

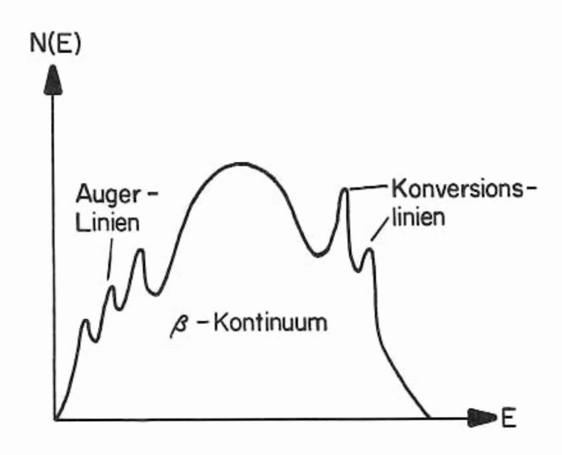


Fig. 10.2

Die Maximalenergie des Kontinuums E_{max} ist gleich der Zerfallsenergie, die durch die Massendifferenz der Kerne nach (10.1) bis (10.3) gegeben ist.

Der experimentelle Befund, dass die β-Teilchen nicht mit der diskreten Energie E_{max} sondern mit allen möglichen Energien darunter emittiert werden, bereitete grosse Schwierigkeiten für das Verständnis des Zerfallsprozesses. Diese Tatsache legte die Vermutung nahe, dass beim β-Zerfall der Energiesatz verletzt sei (Niels Bohr), da die Existenz definierter Energien für die Anfangs- und Endzustände der Kerne bei allen anderen bekannten Umwandlungen evident war. α-Teilchen und γ-Quanten werden mit diskreten Energien emittiert, die den Zerfallsenergien entsprechen.

Zugleich bietet der Prozess (10.4) ein Argument zugunsten der Energieerhaltung beim β-Zerfall:

$$ {}_{83}Bi^{212} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta^-} {}_{84}Po^{212} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\alpha} {}_{81}Tl^{208} \xrightarrow{\beta^- + \gamma} \end{array} {}_{82}Pb^{208} \quad . \qquad (10.4) $$

Die Summe der Zerfallsenergien für

$$ Bi^{212} \xrightarrow{\beta^-} Po^{212} \xrightarrow{\alpha} Pb^{208} $$

muss gleich der Summe der Zerfallsenergien für

$$ Bi^{212} \xrightarrow{\alpha} Tl^{208} \xrightarrow{\beta^- + \gamma} Pb^{208} $$

sein. Bei Einsetzen der Maximalenergien der β-Zerfälle ist die Energieerhaltung experimentell glänzend bestätigt. Bei Einsetzen der mittleren β-Energien gehen die Werte nicht auf. –

Die Vermutung, dass die β-Teilchen zwar mit diskreter Energie emittiert werden, dass aber ein Teil ihrer Energie im Präparat absorbiert wird, wurde jedoch durch kalorimetrische Messungen widerlegt. Das β-aktive Präparat befand sich dabei in einem Bleimantel, der die kinetische Energie der β-Teilchen vollständig absorbierte (Fig. 10.3). Die im Präparat und im Absorber entwickelte Wärmemenge Q entsprach der mittleren β-Energie. Würden alle β-Teilchen mit der Energie E_{max} emittiert, so wäre eine Wärmemenge zu erwarten, die in Fig. 10.4 dem angedeuteten Rechteck entspricht.

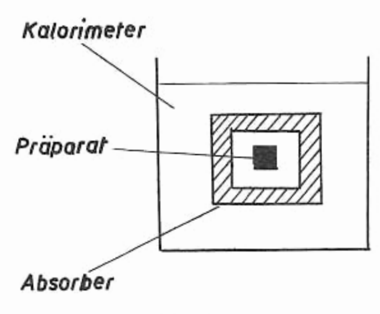


Fig. 10. 3

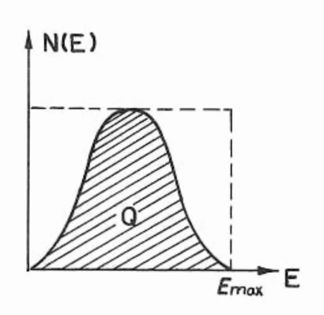


Fig. 10. 4

10.2 Das Neutrino

10.2.1 Neutrinohypothese

1930 schlug Pauli einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten vor, bei dem die Energie erhalten bleibt. Er postulierte, dass beim β-Zerfall ein weiteres Teilchen emittiert werde, das die vermisste Energie forträgt. Gemäss der Unbestimmtheit der Impulsaufteilung beim Dreikörperproblem kann sich dabei die Maximalenergie E_{max} ganz unterschiedlich auf die beiden emittierten Teilchen verteilen. Es gibt dann nur eine statistische Wahrscheinlichkeit für diese Energieaufteilung, und die beobachtete Energieverteilung der β-Teilchen entspricht tatsächlich dieser Wahrscheinlichkeit.

Da bei kalorimetrischen Experimenten und anderen Versuchen, die vermisste Energie nicht aufzufinden war, muss die Wechselwirkung dieses postulierten Teilchens beim Durchgang durch Materie verschwindend klein sein. Demzufolge darf es keine elektrische Ladung haben; ebenso müssen seine Masse und sein magnetisches Moment als null oder verschwindend klein angenommen werden. Das Teilchen erhielt den Namen NEUTRINO (ν).

Wenn das Neutrino die Ruhemasse $m_\nu = 0$ hat, dann muss es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, da sich aus der relativistischen Energiebeziehung

$$E = \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.5)$$

unmittelbar $v = c$ ergibt. Experimenten zufolge ist $m_\nu < 250$ eV, was etwa 0,5 ‰ der Elektronen-Ruhemasse entspricht; die Annahme $m_\nu \approx 0$ erscheint also gerechtfertigt.

Dem Neutrino müssen noch weitere Eigenschaften zugeschrieben werden, um auch die Erhaltung des Kernspins beim β-Zerfall zu retten. Denn die Geradzahligkeit oder Halbzahligkeit des Kernspins hängt nur von der Massenzahl ab; Kerne mit gerader Nukleonenzahl haben ganzzahligen Spin, Kerne mit ungerader Nukleonenzahl halbzahligen Spin. Nun bleibt beim β-Zerfall die Massenzahl des Kerns unverändert und damit die Gerad- oder Halbzahligkeit seines Spins erhalten, während das β-Teilchen den Spin $\frac{1}{2}$ forträgt. Das Neutrino muss also, wenn der Gesamtspin erhalten bleiben soll, halbzahligen Spin besitzen, z.B.:

$$C^{14} \longrightarrow N^{14} + \beta^- + \nu^-$$

Spin:	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Das Neutrino hat den Spin $\frac{1}{2}$, höhere Werte können ausgeschlossen werden.

Bezüglich Ladung, magnetischen Moments, Masse und Geschwindigkeit können Neutrino und Photon als gleich angesehen werden. Der entscheidende Unterschied zwischen beiden besteht in der Ganz- und Halbzahligkeit der Spins.

Zur näheren Unterscheidung wird das bei β^+-Zerfällen emittierte Teilchen NEUTRINO ($\nu+$) und das bei β^--Zerfällen emittierte Teilchen ANTINEUTRINO (ν^- oder $\bar{\nu}$) genannt.

10.2.2 Nachweis des Neutrinos

Entsprechend den postulierten Eigenschaften bereitete der experimentelle Nachweis des Neutrinos erhebliche Schwierigkeiten.

Die in grosser Zahl durchgeführten Experimente lassen sich in zwei Klassen einteilen:

1. Rückstoss des Kernes und der gegebenenfalls nachweisbaren übrigen Teilchen werden gemessen und daraus die Zusammensetzung der Impulse geprüft.

2. Das Neutrino löst an einem Kern einen inversen β -Zerfall aus, dessen Folgeerscheinungen beobachtet werden.

Die Rückstossexperimente lassen sich ihrerseits nach zwei Gruppen unterscheiden, und zwar, nach solchen, bei denen sich der Impuls nur auf zwei Teilchen, und solchen, bei denen er sich auf mehr als zwei Teilchen verteilt. Bei der ersten Gruppe, zu welcher der Elektroneinfang und der dazu ganz analoge μ -Mesoneinfang gehören, sind die Verhältnisse am einfachsten. Die Impuls- und Energieaufteilung auf nur zwei Teilchen ist eindeutig; die Neutrinos sind monochromatisch und die Rückstosskerne haben untereinander gleiche Energie. - Bei der zweiten Gruppe, zu welcher der β^+- und der β^--Zerfall gehören, sind die Verhältnisse komplizierter; die Energieverteilungen aller Partner sind hier kontinuierlich und ausserdem winkelabhängig.

Zur ersten Gruppe der Rückstossexperimente:

Die Rückstossenergie des Kernes beim Elektroneinfang errechnet sich folgendermassen: Der Impuls des Neutrinos ist $p_\nu = \frac{E}{c}$, und dieser ist gleich dem Impuls des Rückstosskernes. Dessen kinetische Energie ist dann

$$E_R = \frac{p_\nu^2}{2M} = \frac{E^2}{2Mc^2} , \qquad (10.6)$$

wobei M die Masse des Kernes und E die Zerfallsenergie ist. E_R ist also umso grösser, je leichter der Kern ist. Ein günstiger Fall eines K-Einfangs ist

$$_4Be^7 + e_K \longrightarrow {}_3Li^7 + \nu .$$

Die Zerfallsenergie ergibt sich aus den Massen

	Be^7	=	7,01916 A.M.E.
	Li^7	=	7,01824 A.M.E.
zu	E	=	0,00092 A.M.E. ≙ 0,86 MeV,

und die Rückstossenergie der Li^7-Ionen nach (10.6) zu E_R = 56 eV.

Allen benützte zum Nachweis dieser Rückstossionen folgende Versuchsanordnung (Fig. 10.5). Das Be^7-Präparat befindet sich als dünne Schicht auf dem Platinband A. Die Li^7-Atome werden als positive Ionen von der Schicht emittiert

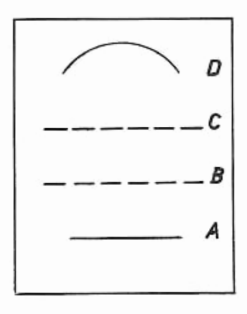


Fig. 10.5

und in einem Potential zwischen A und dem Gitter B beschleunigt. Am Gitter C liegt ein variables Bremspotential zur Energiebestimmung der Ionen. Diejenigen, die genügend Energie besitzen um C zu passieren, prallen auf die Antikathode D. Dort lösen sie Sekundärelektronen aus, die in einen Sekundärelektronenvervielfacher geleitet werden und einen makroskopisch registrierbaren Stromimpuls ergeben.

Grundsätzlich wird die Energieverteilung für Ionen, die aus Festkörpern oder aus Molekülen stammen, dadurch unübersichtlich, dass die Impulsaufteilung mit diesen Partnern und, wenn ein Molekül aufgebrochen wird, ihre Ladungsaufteilung recht kompliziert ist. Bei diesen sogenannten gebundenen Mutterkernen tritt stets eine breite Energieverschmierung der Rückstosskerne auf. Diese Störungen fallen bei den sogenannten freien Mutterkernen weg, diese sind aber auf die wenigen Fälle der Edelgase und des Neutrons beschränkt.

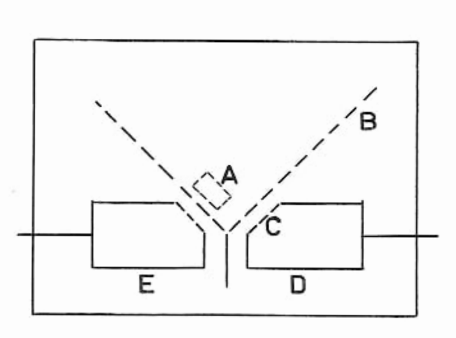


Fig. 10.6

Als ein solcher Fall eines K-Einfangs wurde von Rodeback und Allen die Umwandlung $A^{37} \xrightarrow[EC]{35\,d} Cl^{37}$ mit folgender Versuchsanordnung gemessen (Fig. 10.6). Die aus dem gasförmigen Präparat A herausgeschleuderten und durch Emission von Auger-Elektronen mehrfach geladenen Rückstossionen werden nach einer Beschleunigung zwischen den Gittern B und C in dem Detektor D registriert. Die Auger-Elektronen werden in dem Elektronendetektor E registriert. Die Rückstosskerne gelangen etwas später in den Detektor D als die Auger-Elektronen nach E. Da die Auger-Elektronen praktisch gleichzeitig mit dem Zerfall emittiert werden und relativ schnell sind, hängt diese Verzögerung nur von der Geschwindigkeit der Rückstosskerne ab. Die Messung verzögerter Koinzidenzen zwischen den Impulsen im Ionen- und im Elektronendetektor ergibt eine Spitze bei einer bestimmten Verzögerung (Delay), aus der sich dann die Geschwindigkeit der Rückstosskerne ermitteln lässt (Fig. 10.7).

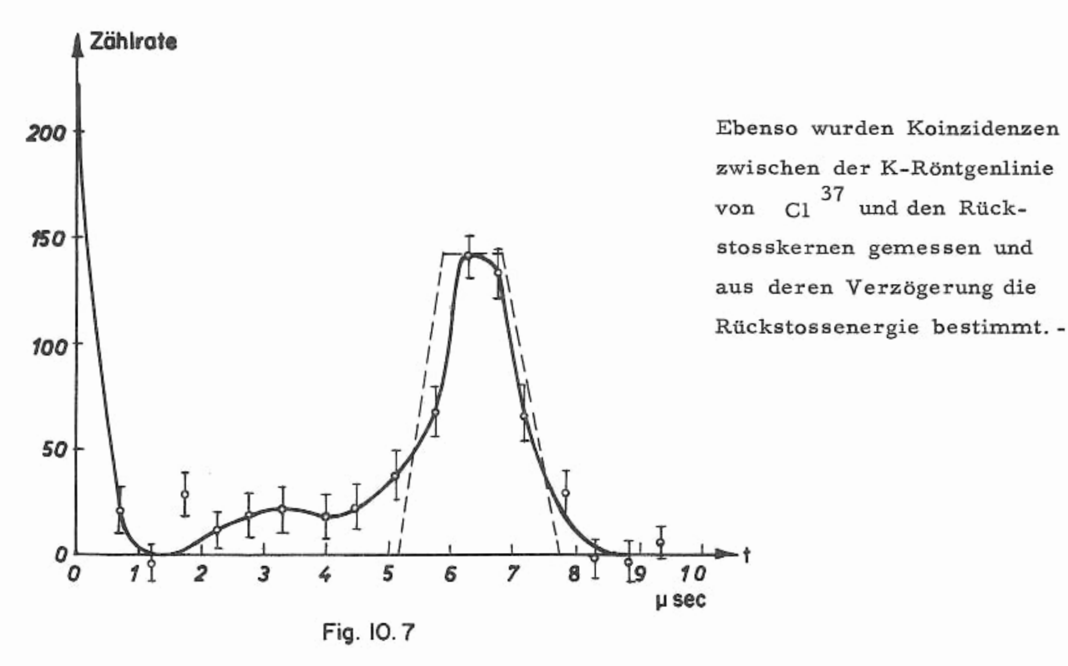


Fig. 10.7

Ebenso wurden Koinzidenzen zwischen der K-Röntgenlinie von Cl^{37} und den Rückstosskernen gemessen und aus deren Verzögerung die Rückstossenergie bestimmt. -

Nun zu der zweiten Gruppe der Rückstossexperimente:

Der Rückstoss beim β^--Zerfall wurde beispielsweise mit folgender Versuchsanordnung gemessen (Fig. 10.8):

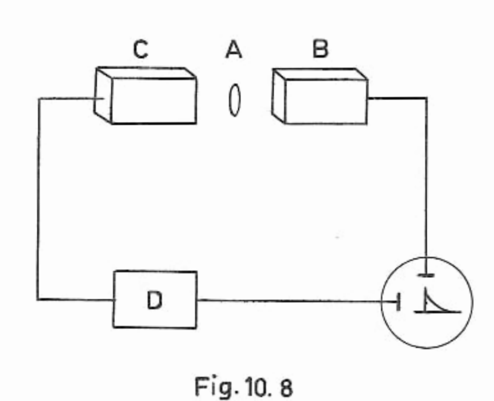


Fig. 10.8

Die aus dem β-aktiven Präparat A herausgeschleuderten Rückstosskerne werden in dem Ionendetektor B und die β-Teilchen in dem Geigerzähler C nachgewiesen. Der Impuls aus C löst über den Triggergenerator D die lineare Zeitablenkung auf dem Kathodenstrahl-Oszillographen aus, während der Impuls aus B direkt auf die vertikalen Platten gegeben wird. Aus der Lage dieses Impulses auf der horizontalen Achse lässt sich die Verzögerung des Impulses aus dem Ionendetektor B gegenüber dem Elektronendetektor C ablesen und daraus die Energie der Rückstosskerne ermitteln. Die so gewonnene Energieverteilung für die 180°-Stellung zwischen den beiden Detektoren fällt trotz gewisser Energieverluste der Rückstosskerne durch Bremsung in dem Präparat, wie aus Fig. 10.9 zu ersehen, deutlich zugunsten der Existenz des Neutrinos aus.

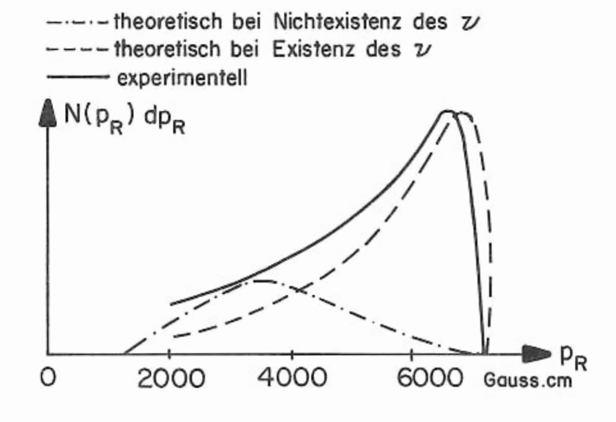


Fig. 10.9

Alle Messungen dieser Art fielen zugunsten der Existenz des Neutrinos aus. Bei allen Rückstossexperimenten erhält man jedoch nur Aussagen über die Impulsverteilung, während das Neutrino ursprünglich zur Erhaltung der Energie eingeführt wurde. Sie zeigen möglicherweise nur eine scheinbare Verletzung des Impulssatzes, aber noch nicht zwingend, dass ein Neutrino tatsächlich emittiert wird.

Um die Existenz eines Teilchens nachzuweisen, genügt es aber nicht, nur indirekte Effekte am Entstehungsort zu studieren, sondern es ist ausserdem notwendig, es auch im freien Zustand zu identifizieren. Alle Versuche zur direkten Beobachtung des freien Neutrinos sind 25 Jahre lang fehlgeschlagen. Der direkte Nachweis gelang mit Hilfe des inversen β-Zerfalls. Als Prototyp des β-Zerfalls kann die Umwandlung

$$n \rightarrow p + e^- + \nu^-$$

angesehen werden. Der dazu entgegengesetzt verlaufende Prozess

$$p + \nu^- \rightarrow n + e^+$$

heisst INVERSER β-ZERFALL.

Der inverse β-Zerfall ist die einzige direkte Reaktion, die das freie Antineutrino sicher erzeugen muss; der Wirkungsquerschnitt ist aber ausserordentlich klein; für Antineutrinos, die aus β-Zerfällen bei mittleren Zerfallsenergien stammen, ist $\sigma \sim 10^{-44}$ cm^2. Schon der Nachweis einer Reaktion mit einem Wirkungsquerschnitt von 10^{-30} cm^2 bereitet erhebliche experimentelle Schwierigkeiten. Versuche mit dem inversen β-Zerfall wurden also erst möglich, seit durch Kernreaktoren ein starker Antineutrinofluss ($\sim 10^{13}$ cm^{-2} sec^{-1} am Reaktor) verfügbar geworden ist. Reines und Cowan (Science 1956, 124, 103; Physics Today 1957, 10, No. 8, 12) gelang es am Reaktor der Savannah River mit folgender Versuchsanordnung, die Existenz des Antineutrinos nachzuweisen (Fig. 10.10):

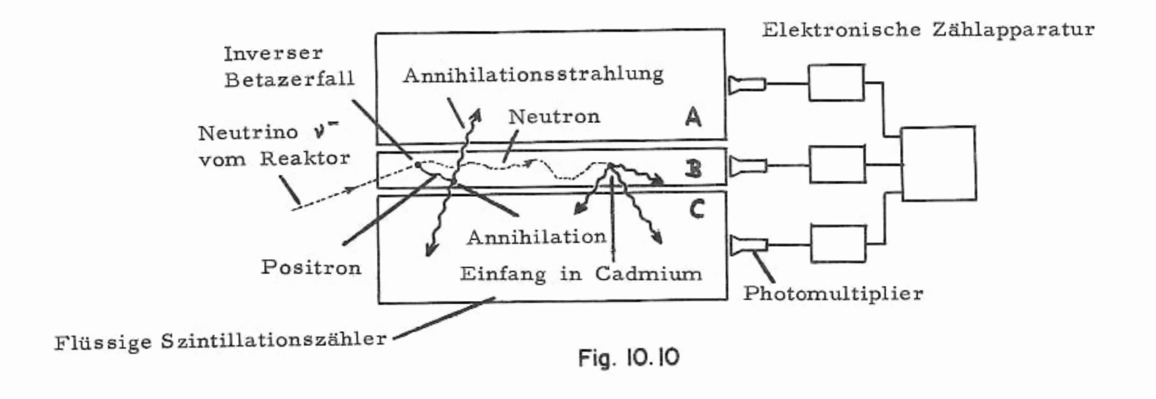


Fig. 10.10

Die Anordnung des Detektors besteht im Wesentlichen aus zwei sehr grossen, flüssigen Szintillationszählern A und C, die von 110 Elektronenvervielfachern beobachtet werden und einem Targettank B. Der mittlere Tank B ist mit Wasser und einem Zusatz gelöstem Cadmiumchlorid gefüllt. Die Protonen des Wassers dienen den Antineutrinos, die aus dem 15 m entfernten Reaktor einfallen, als Targetkerne für den Prozess

$$p + \nu^- \longrightarrow n + e^+ . \qquad (10.7)$$

Findet diese Reaktion statt, dann wird zunächst das entstandene Positron in B gegebremst, bis es den grössten Teil seiner Energie verloren hat. Es annihiliert dann mit einem Atomelektron und erzeugt zwei γ -Quanten von je 511 keV Energie als Annihilationsstrahlung, welche in entgegengesetzter Richtung emittiert werden. Gelangen diese in die Zähler A und C, so werden sie als Koinzidenzpulse registriert. - Das entstandene Neutron bewegt sich relativ langsam, ohne zu ionisieren. Es verliert allmählich seine Energie und wird im Mittel nach etwa 10 μsec von einem Cadmiumkern eingefangen; Cd wurde wegen des grossen Wirkungsquerschnitts für Einfang der thermischen Neutronen als Zusatz in B gewählt. Der Cd-Kern wird dabei hoch angeregt und emittiert anschliessend mehrere γ -Quanten von insgesamt 9,1 MeV, die in einem oder in beiden Tanks registriert werden. Die Reaktion (10.7) kann durch folgende Koinzidenzkombination identifiziert werden: zwei gleichzeitige 511-keV-Impulse in A und C, denen ein Impuls von insgesamt 9,1 MeV in beiden Zählern mit einer Verzögerung von 10 μsec folgt (Fig. 10.11).

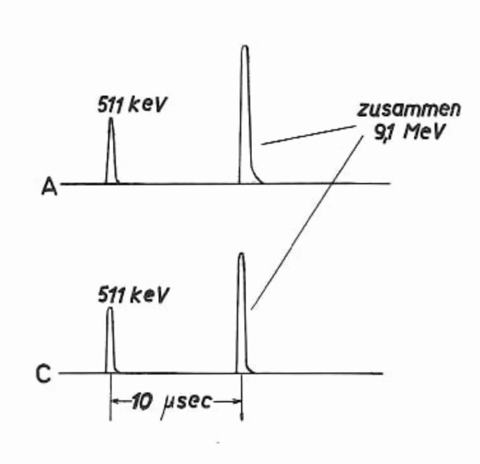


Fig.10.11

Der Detektor registriert, wegen seiner grossen Empfindlichkeit, auch andere Ereignisse, die die ausserordentlich seltenen Antineutrino-Signale (im Mittel etwa 3 pro Stunde, später nach Verbesserungen 44 pro Stunde!) ganz überdecken; diese werden jedoch mit Hilfe von zusätzlichen Antikoinzidenzschaltungen unterdrückt. Diese experimentelle Anordnung wurde später verbessert (PR 1959, <u>113</u>, 273 & 1960, <u>117</u>, 159).

Als Wirkungsquerschnitt für die Absorption eines Antineutrinos durch ein Proton erhielten Reines und Cowan

$$\sigma_{exp} = (11 \pm 2,6) \cdot 10^{-44} \ cm^2 \ .$$

Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem "besten" theoretischen Wert

$$\sigma_{theor} = 14 \cdot 10^{-44} cm^2 .$$

Die Bestimmung von σ_{theor} für den Prozess (10.7) ist für dieses Experiment insofern schwierig, als das σ von der Energie des Antineutrinos abhängt und man

diese nicht gut kennt. Die β-Zerfälle, die der Spaltung von U^{235} im Reaktor folgen, haben verschiedene Zerfallsenergien und schwer übersehbare Beteiligungsquoten. Es sind sehr sorgfältige Messungen der β-Zerfälle im Reaktor erforderlich, um die Energieverteilung der Antineutrinos abzuschätzen und einen geeigneten Mittelwert zu bilden. -

Nimmt man ausserdem an, dass das Antineutrino nur mit einer bestimmten Spinorientierung bezüglich seiner Impulsrichtung auftritt, dann ist die unterste sichere Grenze $\sigma > 7 . 10^{-44}\ cm^2$ und der "beste" Mittelwert $14 . 10^{-44} cm^2$. Nimmt man hingegen an, dass der Spin des Antineutrinos sowohl parallel als auch antiparallel zu seinem Impuls orientiert sein kann, dann sind die theoretischen Wirkungsquerschnitte nur halb so gross. Das Experiment entscheidet zugunsten der ersten Auffassung. -

Als Prototyp des inversen β-Zerfalls, der durch ein Neutrino ν^+ induziert wird, kann der Prozess

$$\nu^+ + n \rightarrow p + e^-$$

angesehen werden. Leider stehen keine irdischen Neutrinoquellen (ν^+) zur Verfügung, denn Reaktoren liefern nur Antineutrinos (ν^-). Wären aber ν^+ und ν^- identisch, dann würde die Reaktion

$$Cl^{37} + \nu^{(\pm)} \rightarrow A^{37} + e^-$$

erfolgen. Davis (PR 1955, 97, 766) bemühte sich, diese Reaktion als

$$Cl^{37} + \nu^- \rightarrow A^{37} + e^-$$

mit folgender Versuchsanordnung nachzuweisen. Ein mit ca. 4000 Liter CCl_4 gefüllter Tank wurde in der Nähe eines Reaktors der Bestrahlung durch Antineutrinos ausgesetzt. Das durch die Reaktion gegebenenfalls gebildete A^{37} wurde anschliessend mit Helium herausgespült und mit einem Geigerzähler geprüft, da A^{37} durch K-Einfang mit einer Halbwertszeit von 35 Tagen in Cl^{37} zerfällt. Es wurde jedoch nur eine verschwindend geringe Aktivität gemessen, die für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = (0,3 \pm 0,4) \ . \ 10^{-45}\ cm^2$$

ergibt. σ konnte also nicht als verschieden von null nachgewiesen werden. Dieser gemessene Wert lässt als obere Grenze $\sigma = 0,7 \ . \ 10^{-45}\ cm^2$ zu; das ist also mit Sicherheit um eine Grössenordnung kleiner, als bei Gleichheit des Verhaltens von Neutrino und Antineutrino hätte erwartet werden müssen.

10.3 Theorie des β-Zerfalls von Fermi

10.3.1 Zerfallswahrscheinlichkeit

Mit Hilfe der Neutrinohypothese von Pauli gelang es Fermi (Z. Phys. 1934, 88, 161), eine Theorie für die Form des β-Spektrums und die Lebensdauer von β-Zerfällen aufzustellen.

Auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation können die β-Teilchen vor der Emission im Kern nicht stationär existieren. Gerade 1932 war durch die Entdeckung des Neutrons bestätigt worden, dass sich die Kerne nur aus Protonen und Neutronen zusammensetzen. Der β-Prozess ist demnach im Prinzip als die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton

$$n \longrightarrow p + e^- + \nu^-$$

bzw. umgekehrt

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu^+$$

im Kern anzusehen. β-Teilchen und Neutrino heissen gemeinsam LEPTONEN; sie entstehen im Kern ganz ähnlich wie Photonen in der Hülle bei der Emission von Licht.

Fermi hat von dieser Analogie her die Berechnung des β-Zerfalls begonnen. Im Falle der Lichtemission besteht das Gesamtsystem, in dem Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten bleiben, im Anfangszustand i aus dem angeregten Atom und im Endzustand f aus dem weniger angeregten Atom und dem Photon. Beim β-Zerfall besteht das Gesamtsystem im Anfangszustand i aus dem Mutterkern und im Endzustand f aus dem Tochterkern und den Leptonen. Ebenso wie das Photon als elektromagnetisches Strahlungsfeld dargestellt werden kann, werden die Leptonen als Elektron-Neutrinofeld beschrieben.

Ganz analog zum Problem der Lichtemission lässt sich mit Hilfe der Störungstheorie die β-Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit von dem Zustand i in den Zustand f angeben:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |H_{if}|^2 \cdot \frac{dn}{dE_0} \quad . \qquad (10.8)$$

$|H_{if}|$ ist das Matrixelement für die Energie der als schwach vorausgesetzten Wechselwirkung zwischen den Zuständen i und f; $\frac{dn}{dE_0}$ ist die Dichte der Endzustände in dem Energieintervall dE_0. Hierbei ist der Endzustand f dadurch charakterisiert, dass das Elektron einen Impuls zwischen p und p + dp hat. Die in (10.8) angegebene Übergangswahrscheinlichkeit ist dann gleich der Wahrscheinlichkeit N(p)dp, dass pro Zeiteinheit ein β-Teilchen emittiert wird, dessen Impuls in diesem Intervall liegt:

$$N(p)\, dp = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |H_{if}|^2 \cdot \frac{dn}{dE_0} \quad . \qquad (10.9)$$

N(p)dp stellt das β-Spektrum dar. Seine Form ist hauptsächlich durch den statistischen Faktor $\frac{dn}{dE_0}$ bestimmt, während $|H_{if}|$ ein Mass für die Stärke der β-Wechselwirkung insgesamt ist. Im Folgenden werden diese beiden Faktoren einzeln diskutiert.

10.3.2 Statistischer Faktor

$\frac{dn}{dE_0}$ gibt die Dichte der möglichen Zustände im Phasenraum des Elektron-Neutrinofeldes an.

Infolge der Heisenbergschen Unschärferelation lässt sich der Zustand des Elektrons nicht auf eine kleinere Phasenfläche als $\Delta x . \Delta p_x \sim h$ in Fig. 10.12 einengen. Diese Beziehung gilt in gleicher Weise für die Koordinaten y und z. In dem

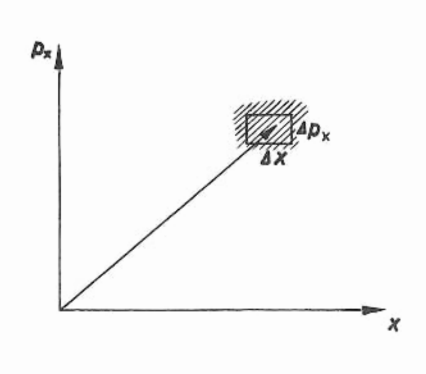


Fig. 10.12

sechsdimensionalen Phasenraum $\{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$ lässt sich also der Zustand des Elektrons nicht genauer festlegen, als dass die Spitze seines Zustandsvektors irgendwo in dem Volumenelement

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \approx h^3 \quad (10.10)$$

liegt. Auf diese Weise ist die Zahl der unterscheidbaren Zustände innerhalb eines gegebenen Phasenvolumens begrenzt.

Wie gross ist nun das Phasenvolumen eines Elektrons, das innerhalb des räumlichen Volumens V lokalisierbar ist und dessen Betrag des Impulses zwischen p und p + dp liegt? Im Impulsraum entspricht diese Impulsunschärfe einer Kugelschale, deren Volumen $4\pi p^2 dp$ ist. Das Phasenvolumen des Elektrons ist also $V \cdot 4\pi p^2 dp$. Da eine Zelle im Phasenraum das Volumen h^3 besitzt, ist die Zahl der Zustände des Elektrons im Phasenraum

$$dn_e = V \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \quad . \qquad (10.11)$$

dn_e ist gleich der Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Volumens V mit einem Impuls zwischen p und p + dp anzutreffen.

Für das Neutrino gilt dieselbe Überlegung:

$$dn_\nu = V \cdot \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3} \quad . \qquad (10.12)$$

Da das β-Teilchen und das Neutrino gleichzeitig emittiert werden, multiplizieren sich die Einzelwahrscheinlichkeiten zur Gesamtwahrscheinlichkeit

$$dn = dn_e \cdot dn_\nu \quad . \qquad (10.13)$$

dn ist die Zahl der Zustände im Phasenraum des Elektron-Neutrinofeldes, wenn das Elektron mit dem Impuls $p \rightarrow p + dp$ und das Neutrino mit dem Impuls $p_\nu \rightarrow p_\nu + dp_\nu$ innerhalb des räumlichen Volumens V anzutreffen sind.

Die Dichte der Zustände, bezogen auf das Energieintervall dE_o ist

$$\frac{dn}{dE_o} = \frac{16\pi^2 V^2}{h^6} \cdot p^2 p_\nu^2 \cdot \frac{dp_\nu}{dE_o} \cdot dp \quad . \qquad (10.14)$$

Hierin sind die Terme, die p_ν enthalten, zu eliminieren: Es ist

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \quad , \qquad (10.15)$$

und da die Masse des Kernes sehr gross gegenüber der der Leptonen ist, verteilt sich die gesamte Zerfallsenergie E_o auf die des Elektrons E und des Neutrinos E_ν:

$$E_o = E + E_\nu \qquad (10.16)$$

so dass

$$p_\nu = \frac{1}{c}(E_0 - E) \qquad (10.17)$$

und

$$p_\nu^2 \left(\frac{dp_\nu}{dE_0} \right) = \frac{1}{c^3}(E_0 - E)^2 . \qquad (10.18)$$

Dann ist

$$\frac{dw}{dE_0} = \frac{16\pi^2 V^2}{c^3 h^6} \cdot p^2 (E_0 - E)^2 dp . \qquad (10.19)$$

Die Beziehung zwischen Impuls und kinetischer Energie des Elektrons hierin lautet

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E(E + 2m_e c^2)} . \qquad (10.20)$$

Wenn $|H_{if}|$ unabhängig von E bzw. von p ist (erlaubte Übergänge und Z = 0), dann ist die Form des β -Spektrums allein durch den statistischen Faktor gegeben (Fig. 10.13):

$$N(p)\,dp = C \cdot p^2 (E_0 - E)^2 dp . \qquad (10.21)$$

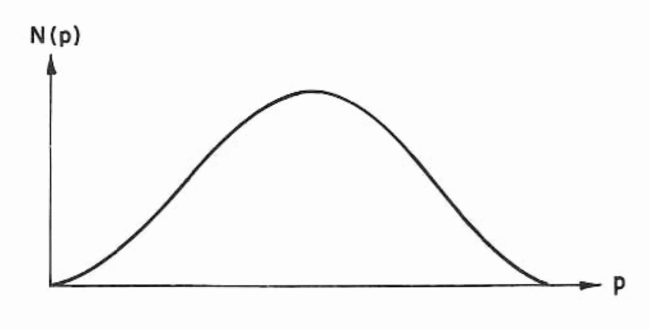


Fig. 10.13

10.3.3 Matrixelement

H_{if} ist eine abgekürzte Schreibweise für

$$H_{if} \equiv \int \Psi_f^* \mathcal{H} \Psi_i \, d\tau . \qquad (10.22)$$

Hierin ist $\mathcal{H}$ der Hamilton-Operator für die Wechselwirkungsenergie zwischen den Zuständen i und f, deren Wellenfunktionen Ψ_i und Ψ_f sind. Ψ_i ist durch die Wellenfunktionen ψ_i der Nukleonen im Ausgangskern gegeben, Ψ_f durch das Elektron-Neutrinofeld $\varphi_e(\vec{r}) \cdot \varphi_\nu(\vec{r})$ und die Wellenfunktionen ψ_f der

Nukleonen im Tochterkern.

$$H_{if} = g \int \left[\psi_f^* \, \varphi_e^*(\vec{r}) . \varphi_\nu^*(\vec{r}) \right] \mathcal{M} \, \psi_i \, d\tau \, . \qquad (10.23)$$

$g = 1,41 \, . \, 10^{-49}$ erg. cm^3 ist eine empirische Grundkonstante, die sogenannte FERMI-KONSTANTE, die die Stärke der β -Wechselwirkung angibt; sie ist von gleichem Charakter wie die Gravitationskonstante oder die elektrische Ladung. $\mathcal{M}$ ist der dimensionslos gemachte Hamilton-Operator.

Das Matrixelement lässt sich vereinfachen: Infolge der sehr schwachen Wechselwirkung zwischen Kern und Leptonen lassen sich die Felder für das Neutrino und das β -Teilchen als ebene Wellen ansetzen:

$$\varphi_\nu(\vec{r}) = N_\nu \, e^{i(\vec{k}_\nu . \vec{r})} \quad ; \quad \varphi_e(\vec{r}) = N_e \, e^{i(\vec{k}_e . \vec{r})} . \qquad (10.24)$$

Durch Normierung innerhalb des Volumens V, das gleich dem Volumen V in (10.14) ist,

$$\int_V \psi_\nu^* \, \psi_\nu \, d\tau = 1 \quad ; \quad \int_V \psi_e^* \, \psi_e \, d\tau = 1 \qquad (10.25)$$

werden die Konstanten

$$N_\nu = N_e = \frac{1}{\sqrt{V}} \, . \qquad (10.26)$$

Die Welle des β -Teilchens ist jedoch durch die elektrische Wechselwirkung mit der Kernladung deformiert. Dieser Effekt wird später als Korrektur angebracht (Abschnitt 10. 3. 4).

ψ_i und ψ_f sind nur innerhalb des Kernvolumens verschieden von null; infolgedessen erstreckt sich die Integration (10. 23) nur über V. Da die Ausdehnung des Kernes jedoch sehr klein ist gegenüber den Bereichen, in denen β -Teilchen und Neutrino lokalisierbar sind, lassen sich $\varphi_e(\vec{r})$ und $\varphi_\nu(\vec{r})$ als Reihen um den Nullpunkt $\vec{r} = 0$ entwickeln

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + i(\vec{k}_e . \vec{r}) + \dots \right] , \qquad (10.27)$$

$$\varphi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + i(\vec{k}_\nu . \vec{r}) + \dots \right] . \qquad (10.28)$$

In erster Näherung genügt es, in beiden Fällen nur den ersten konstanten Term aus der Reihe zu berücksichtigen (erlaubter Übergang und Z = 0), so dass

$$H_{if} = g \, \varphi_e^*(0) . \varphi_\nu^*(0) \int \psi_f^* \, \mathcal{M} \, \psi_i \, d\tau \qquad (10.29)$$

$$| H_{if} |^2 = g^2 \, | \varphi_e(0) |^2 . | \varphi_\nu(0) |^2 . | M_{if} |^2 . \qquad (10.30)$$

Die nur wenig genau bekannten Grössen ψ_i, ψ_f und $\mathfrak{M}$ sind jetzt in dem vereinfachten Matrixelement

$$M_{if} \equiv \int \psi_f^* \, \mathfrak{M} \, \psi_i \, d\tau \qquad (10.31)$$

zusammengefasst. $|M_{if}|$ kann dann als Grad der Überlappung der Wellenfunktionen der Nukleonen zwischen den Zuständen i und f verstanden werden. $|M_{if}|$ ist bei erlaubten Übergängen von der Grössenordnung 1, bei verbotenen Übergängen in dieser Näherung null. Bei erlaubten Übergängen ist das Matrixelement unabhängig von E. -

Durch Zusammenfügen von $\frac{dn}{dE_o}$ (10.19) und $|H_{if}|^2$ (10.30) ergibt sich für (10.9):

$$N(p)\,dp = \left(\frac{g^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}\right) \cdot |M_{if}|^2 \cdot p^2 (E_o - E)^2 \, dp. \qquad (10.32)$$

10.3.4 Coulomb-Korrekturfaktor

Infolge der Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung werden die emittierten Elektronen gebremst und die emittierten Positronen beschleunigt. Durch diesen Coulomb-Effekt wird die Zerfallswahrscheinlichkeit und die Form des β-Spektrums beeinflusst.

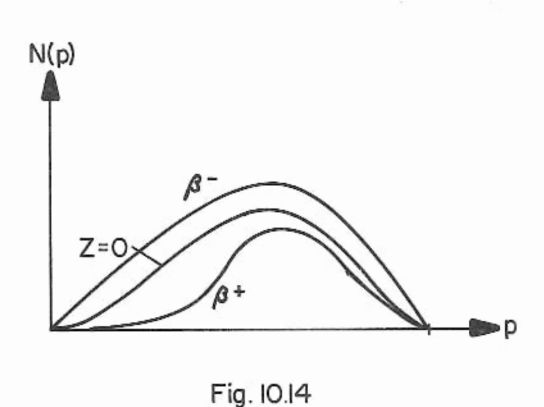


Fig. 10.14

Bei der Gegenüberstellung von β^-- und β^+-Zerfall bei gleicher Zerfallsenergie E_o erscheint es zunächst paradox, dass durch diese Coulomb-Wechselwirkung die Emission der Elektronen als stimuliert und die der Positronen als behindert erscheint (Fig. 10.14). Dieses Verhalten hat folgende Ursachen.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit N(p)dp ist proportional p^2dp. Dieses p wird in (10.32) als derjenige Impuls des β-Teilchens verstanden, der im Spektrometer, also weit vom Kern entfernt gemessen wird. Massgebend für die Zustandsdichte in dem statistischen Faktor (10.14) aus dem das p^2dp stammt, ist jedoch der Zustand des Elektrons <u>unmittelbar</u> nach seiner Entstehung, also am Ort des Kernes. Für den β^+-Zerfall ist nun der Impuls des Positrons am Ort des Kerns kleiner als in grosser Entfernung. Also ist der für die Zerfallswahrscheinlichkeit massgebliche statistische Faktor am Ort des Kernes kleiner als ohne Berücksichtigung der Coulomb-Abstossung, wenn man daran festhält, dass die Beschreibung des Spektrums mit dem im Spektrometer messbaren, also in grosser Entfernung vom Kern vorhandenen Impuls p erfolgt. - Das entgegengesetzte Verhalten gilt für den β^--Zerfall.

Klassisch dürften infolge der Beschleunigung keine Positronen unterhalb einer Energie von etwa $\frac{Ze^2}{R}$ auftreten, wenn R der Kernradius ist. Indessen treten experimentell im β^+-Spektrum durchaus Positronen mit Energien unterhalb dieses Wertes auf, wenn auch in verhältnismässig geringer Zahl; das β^+-Spektrum geht für $p \to 0$ exponentiell nach null. Die Emission dieser Positronen lässt sich quantenmechanisch mit Hilfe des Tunneleffektes verstehen.

Es ist noch darauf hinzuweisen, dass sich die obere Grenze des Spektrums E_o durch die Coulomb-Einwirkung nicht verschiebt, da diese Coulomb-Energie bereits in den Bindungsenergien der Kerne berücksichtigt ist. Denn die Bindungsenergie bezieht sich definitionsgemäss auf die Zerlegung des Kernes in freie Teilchen, was also dem Zustand der Leptonen in weiter Entfernung vom Kern entspricht.

Die Änderung des Impulses im Coulomb-Feld ist umso stärker je langsamer das β-Teilchen ist. Die Störung ist dementsprechend am unteren Ende des Spektrums am stärksten; das Spektrum wird also in sich verformt.

Die Störung lässt sich an (10.30) auch als Deformation der Welle $\varphi_e(\vec{r})$ beschreiben, wodurch sich die unter Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung gerechnete Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons am Ort des Kernes $|\varphi_e(0)|^2$ in $|\varphi_e(0)|^2_Z$ ändert. Berücksichtigt man dies durch den Faktor

$$F(E, Z) = \frac{|\varphi_e(0)|^2_Z}{|\varphi_e(0)|^2} , \qquad (10.33)$$

dann hat das β-Spektrum die Form

$$N(p)\,dp = \frac{g^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |M_{if}|^2 \cdot F(E, Z) \cdot p^2 (E_o - E)^2 \, dp . \qquad (10.34)$$

F(E, Z) heisst die FERMI-FUNKTION. Für Z = 0 ist F(E, Z) = 1. Für β^--Emission ist stets $F(E,Z) \geq 1$, für β^+-Emission stets $F(E,Z) \leq 1$. Der Verlauf von F(E, Z) ist in Fig. 10.15 und 10.16 wiedergegeben.

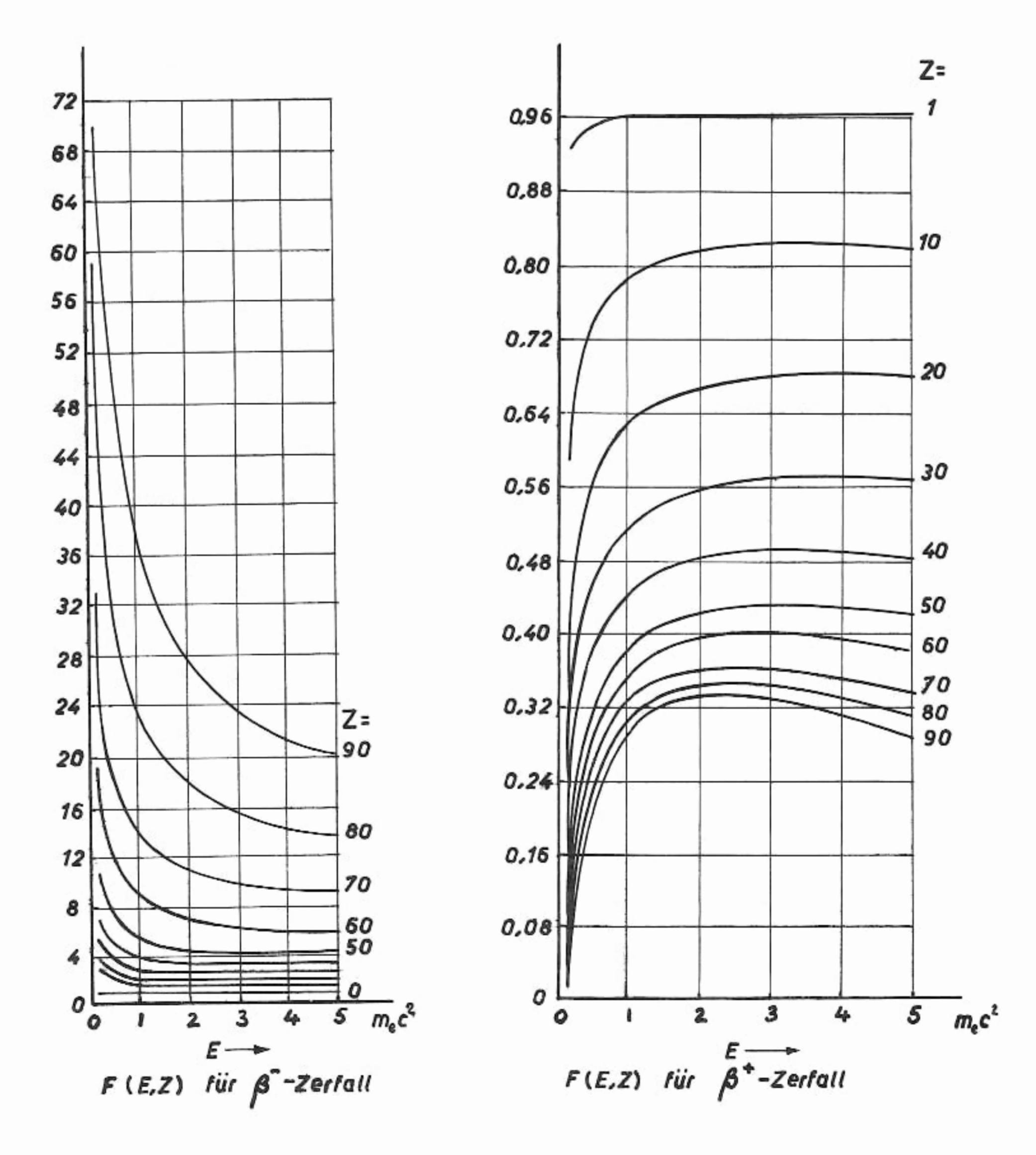


Fig. 10.15 Fig. 10.16

F(E, Z) muss relativistisch berechnet werden. Dabei ergeben sich recht komplizierte Funktionen, deren numerische Werte in Tabellen zur Verfügung stehen.*)

In nicht-relativistischer Näherung ist

$$F\,(E,Z) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \qquad (10.35)$$

mit

$$x \equiv \pm \frac{2\pi Z}{137\,\beta} \qquad \left[\beta \equiv \frac{v}{c} \sim p\right]. \quad (10.36)$$

Für den β^--Zerfall ist Z positiv und für den β^+-Zerfall negativ zu nehmen. Hieran lässt sich der Einfluss der Coulomb-Korrektur auf die Form des Impulsspektrums besonders am unteren Ende erörtern, wo infolge $x \gg 1$

---

*) Rose et al. : Oak Ridge Nat. Lab. Report ORNL 1222 (1952)

Siegbahn : Beta- and Gamma-Spectroscopy, App. II (1955)

Nat. Bur. Stand. : Tables for the Analysis of Beta Spectra, Appl. Math. Ser. 13, (1952)

$$F \approx x \sim 1/p \qquad \text{für den } \beta^-\text{-Zerfall} \qquad (10.37)$$

$$F \approx |x| e^{-|x|} \sim \frac{1}{p} e^{-c/p} \qquad \text{für den } \beta^+\text{-Zerfall} \qquad (10.38)$$

ist.

Während das Impulsspektrum dort für Z = 0 parabolisch ($N(p) \sim p^2$) verläuft, steigt es beim β^--Zerfall linear ($N(p) \sim p$) an und wird beim β^+-Zerfall exponentiell ($N(p) \sim pe^{-c/p}$) geschwächt (Fig. 10.14).

Die Hüllenelektronen bewirken für die emittierten β-Teilchen eine Abschirmung der Kernladung, die in F(E, Z) nicht berücksichtigt wird. Diese zusätzliche Korrektur ist der der Fermi-Funktion entgegengesetzt und erreicht grössenordnungsmässig einige Prozent von ihr.

10.3.5 Kurie-Diagramm (Kurie Plot)

Bildet man aus (10.34)

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F(E,Z)}} = C \cdot (E_0 - E), \qquad (10.39)$$

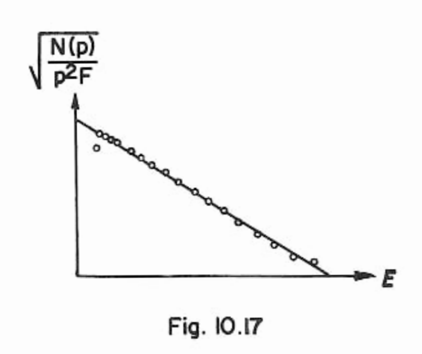


Fig. 10.17

und ist das in C enthaltene Matrixelement $|M_{if}|$ (10.31) energieunabhängig (erlaubte Übergänge), so liefert die graphische Darstellung eine Gerade (Fig. 10.17). Dieses Diagramm heisst KURIE-DIAGRAMM.

Diese Darstellung bietet eine Reihe von Vorteilen:
Sie ermöglicht, die Übereinstimmung gemessener β-Spektren mit der von der Fermischen Theorie vorausgesagten Form zu prüfen und Abweichungen festzustellen.

Ist das Spektrum aus mehreren Zerfällen zusammengesetzt, führt z.B. der Zerfall parallel über einen angeregten Zustand (Fig. 10.18), so erscheint im Kurie-Diagramm ein Knick und die einzelnen Komponenten lassen sich einigermassen trennen (Fig. 10.19), während in der Darstellung N(p) keine deutliche Abweichung zu bemerken ist.

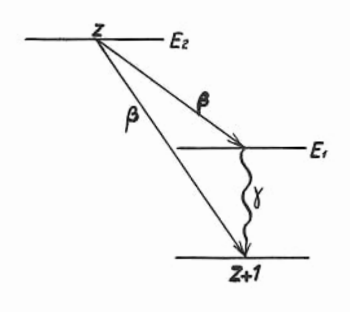


Fig. 10. 18

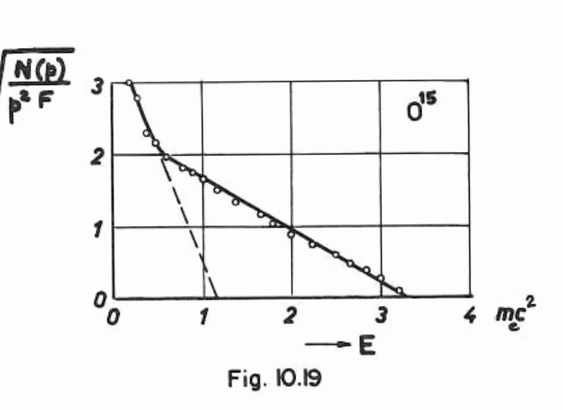


Fig. 10.19

In der Darstellung N(p) ist die genaue Bestimmung der Zerfallsenergie E_0 recht schwierig, weil das Spektrum N(p) bei E_0 parabolisch nach null geht. Hingegen im Kurie-Diagramm lässt sich E_0 sehr genau extrapolieren.

10.3.6 Kurie-Diagramm und Bestimmung der Neutrinomasse

Mit Hilfe des Kurie-Diagramms ist auch eine genauere Bestimmung der Neutrinomasse m_ν möglich. Die Form des β-Spektrums wurde bisher unter der Annahme $m_\nu = 0$ bzw. $m_\nu c^2 \ll E_0$ berechnet. Ist hingegen $m_\nu \neq 0$, dann wird das Spektrum dort beeinflusst, wo $E_\nu \approx m_\nu c^2$ ist. Das ist bei kleinen E_ν, also am oberen Ende des Elektronenspektrums der Fall. Für $m_\nu \ll m_e$ ist diese Verformung gering und gegebenenfalls nur mit Hilfe des Kurie-Diagramms erkennbar, das dann in der Nähe von $E \approx E_0 - m_\nu c^2$ von der Geraden nach unten abweichen müsste: Die Zerfallsenergie E_0 muss dann auch die Ruheenergie $m_\nu c^2$ aufbringen

$$E_0 = E + E_\nu + m_\nu c^2 , \qquad (10.40)$$

so dass das β-Spektrum bereits bei

$$E_{max} = E_0 - m_\nu c^2 \qquad (10.41)$$

endet (Fig. 10.20).

Fig. 10.20

Die Verformung des Spektrums rührt daher, dass sich in dem statistischen Faktor (10.12)

$$\frac{dw}{dE_0} = \frac{16\pi^2 V^2}{h^6} \cdot p^2 \cdot p_\nu^2 \left(\frac{dp_\nu}{dE_0} \right) dp \qquad (10.42)$$

die Terme mit p_ν ändern. Während bisher aus

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \qquad (10.43)$$

$$p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c^3} (E_0 - E)^2 \qquad (10.44)$$

folgte, ergibt sich bei

$$p_\nu = \frac{1}{c} \sqrt{E_\nu (E_\nu + 2 m_\nu c^2)} \qquad (10.45)$$

jetzt

$$p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c^3} \left(E_\nu + m_\nu c^2 \right) \sqrt{E_\nu (E_\nu + 2 m_\nu c^2)} \qquad (10.46)$$

und nach Ersetzen von E_ν durch E gemäss (10.40)

$$p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c^3} (E_0 - E)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E} \right)^2} \; . \qquad (10.47)$$

Die Wurzel hierin ist der Term, der die Verformung des Spektrums beschreibt. Für das Kurie-Diagramm erhält man dann anstelle von (10.39)

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F(E,Z)}} = \text{const.}\ (E_0 - E)\left[1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E}\right)^2\right]^{1/4} . \qquad (10.48)$$

Das Kurie-Diagramm ist also durch einen Korrekturfaktor erweitert worden, der nur am oberen Ende des Spektrums merklich von eins abweicht; bei $E = E_0 - m_\nu c^2$ wird er null und seine Ableitung an dieser Stelle unendlich. Also mündet das Kurie-Diagramm senkrecht auf die Abszisse.

Um die Neutrinomasse zu bestimmen, ist eine sehr sorgfältige Aufnahme des Kurie-Diagramms am obersten Ende des Spektrums erforderlich. Die kleinste der Messung zugängliche Neutrinomasse entspricht dabei etwa der Auflösung Δ p des Spektrometers. Nun ist jedoch allen Spektrometern $\Delta p \sim p$ eigentümlich. Deswegen sind Zerfälle mit kleinem E_0 für solche Messungen am geeignetsten. Ausserdem ist es günstig, wenn die Verzerrung der Elektronenwelle φ_e infolge kleinen Z gering ist. Ein besonders geeigneter Zerfall in dieser Hinsicht ist der von H^3 mit $E_0 = 18$ keV. Man hat daraus

$$m_\nu < 5 \cdot 10^{-4}\, m_e$$

bestimmt (Langer & Moffat PR 1952, 88, 689).

10.3.7 Lebensdauer

N(p)dp ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass ein β-Teilchen mit dem Impuls zwischen p und p + dp emittiert wird. Dann ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass ein β-Teilchen mit beliebigem Impuls emittiert wird, gleich der Zerfallskonstanten

$$\lambda = \int_0^{E_0} N(p)\, dp . \qquad (10.49)$$

$$\lambda = \frac{g^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |M_{if}|^2 \int_0^{E_0} F(E,Z) \cdot p^2 (E_0 - E)^2\, dp . \qquad (10.50)$$

Ausgedrückt durch die auf $m_e c^2$ bezogene totale Energie

$$W \equiv \frac{E + m_e c^2}{m_e c^2} \qquad (10.51)$$

lautet (10.50)

$$\lambda = \left(\frac{g^2}{2\pi^3} \cdot \frac{m_e^5 c^4}{\hbar^7}\right) \cdot |M_{if}|^2 \int_1^{W_0} F(W,Z)\sqrt{W^2-1}\,(W_0 - W)^2\, W\, dW \quad (10.52)$$

$$\lambda = \frac{|M_{if}|^2}{\tau_0} \cdot f(W_0, Z) . \qquad (10.53)$$

Hierin ist

$$\tau_0 \equiv \frac{2\pi^3}{g^2} \cdot \frac{\hbar^7}{m_e^5 c^4} \sim 10^4 \text{ sec} \qquad (10.54)$$

eine Zeitkonstante, die als interessierende Grösse die Kopplungskonstante g enthält. τ_0 heisst die UNIVERSELLE ZEITKONSTANTE des β-Zerfalls. $f(W_0, Z)$ heisst das FERMI-INTEGRAL. Es lässt sich analytisch nur für Z = 0 berechnen, wo $F(W, 0) = 1$ ist. Feenberg und Trigg (RMP, 1950, 22, 399) haben $f(W_0, Z)$ für verschiedene Z numerisch berechnet (Fig. 10.21).

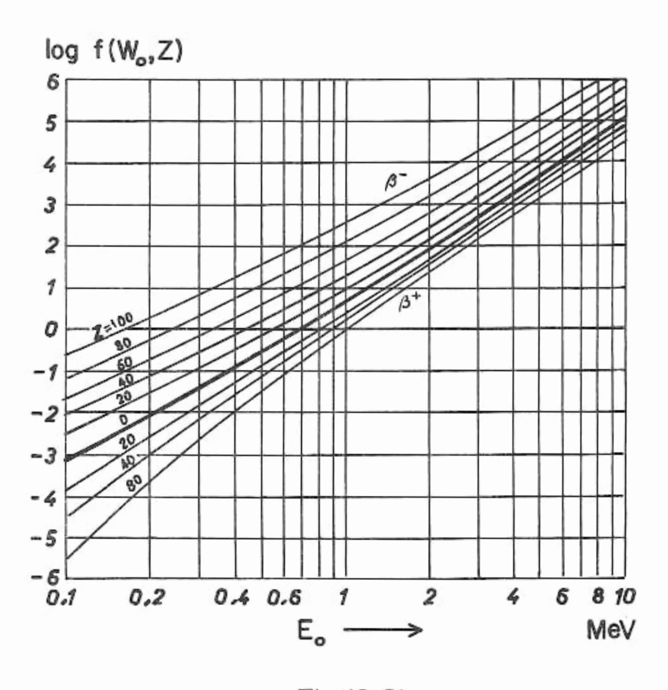


Fig. 10.21

Für grosse Energien W_0 gilt näherungsweise

$$f(W_0, Z) \sim W_0^5 \, . \qquad (10.55)$$

Zerfallskonstante λ und Halbwertszeit $T_{1/2}$ sind also stark von der Zerfallsenergie E_0 abhängig.

10.3.8. ft-Werte

Die Grösse

$$f(W_0, Z)\, T_{1/2} = \frac{\tau_0 \ln 2}{|M_{if}|^2} \qquad (10.56)$$

heisst ft-WERT; sie ist nur noch vom Betrag des Matrixelementes abhängig. Die zur Berechnung von $|M_{if}|$ erforderlichen Funktionen sind zwar nur sehr wenig bekannt. Für erlaubte Übergänge können jedoch die Matrixelemente, also auch die ft-Werte als grössenordnungsmässig übereinstimmend angesehen werden.

Die ft-Werte bieten eine Möglichkeit zur Unterscheidung zwischen ERLAUBTEN und VERBOTENEN ÜBERGÄNGEN.

Bei den erlaubten Übergängen wurde für die Matrixelemente vereinfachend der Kernradius R = 0 gesetzt. Ist in dieser nullten Näherung $|H_{if}| = 0$, dann muss die endliche Ausdehnung des Kerns ($R \neq 0$) berücksichtigt werden. Dabei gewinnen zwei Effekte an Bedeutung:

a) Die Amplitude des Leptonenfeldes ist nicht mehr innerhalb des Kernvolumens konstant.

b) Die Eigenbewegungen der Nukleonen geben Anlass zu einem relativistischen Zusatzterm.

Der erste Einfluss lässt als eine Reihenentwicklung nach Potenzen von (kR) anschreiben. Ist es erforderlich, n Terme aus dieser Entwicklung heranzuziehen, bis $|H_{if}| \neq 0$ wird, so ist das Matrixelement grössenordnungsmässig um den Faktor $(kR)^n$ kleiner.

Der relativistische Zusatzterm ist grössenordnungsmässig um den Faktor $\frac{v}{c}$ kleiner als das jeweilige nicht-relativistische Matrixelement. v sei dabei die mittlere Geschwindigkeit der Nukleonen im Kern.

(kR) und (v/c) sind von gleicher Grössenordnung. Je nachdem wie viele solcher Terme insgesamt hinzugezogen werden müssen, werden diese Übergänge als EINFACH, ZWEIFACH, ... VERBOTEN bezeichnet (FIRST, SECOND, ... FORBIDDEN TRANSITIONS).

Mehrfach verbotene Übergänge kommen bei β -Zerfällen wesentlich häufiger vor als in der optischen Spektroskopie. In den Matrixelementen für optische Übergänge beträgt grössenordnungsmässig $\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}} \sim \frac{10^{-8}\,cm}{10^{-5}\,cm} \sim 10^{-3}$ so dass die verbotenen Übergänge etwa 10^6-fach seltener sind als die erlaubten. Beim β -Zerfall ist grössenordnungsmässig $\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}} \sim \frac{10^{-11}\,cm}{10^{-10}\,cm} \sim \frac{1}{10}$, und die ft-Werte liegen je Verbotenheitsgrad nur um etwa 10^2 auseinander. Es gilt folgende empirische Klassifizierung:

ft	=	1000	-	5000	übererlaubt (super-allowed)
ft	=	10^4	-	10^5	erlaubt (allowed)
ft	=	10^6	-	10^8	einfach verboten (first forbidden)
ft	=	10^8	-	10^{10}	zweifach verboten (second forbidden) u. s. w.

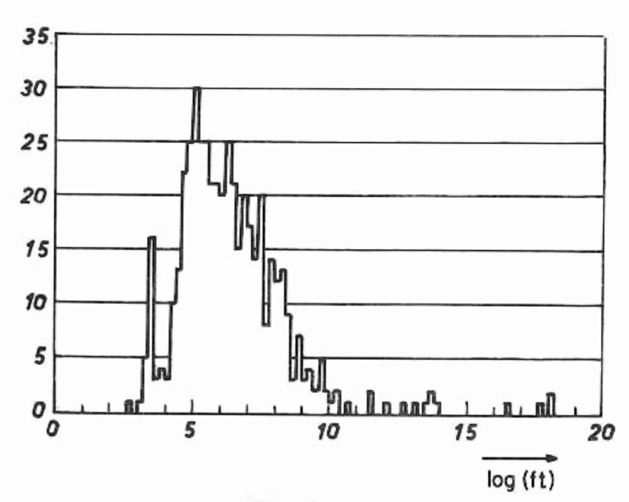


Fig. 10.22

Fig. 10.22 zeigt, mit welcher Häufigkeit sich die bekannten β -Zerfälle auf die ft-Werte verteilen. Die Gruppierungen sind jedoch keineswegs so deutlich ausgeprägt. Der Schritt von jeweils 10^2 ist der Streuung der Matrixelemente in den einzelnen Gruppen grössenordnungsmässig nicht überlegen. Aus den ft-Werten allein kann der Verbotenheitsgrad meistens nicht eindeutig bestimmt werden.

10.4 Erlaubte und verbotene Übergänge

10.4.1 Übererlaubte Übergänge

Innerhalb der Klasse der erlaubten Übergänge gibt es eine Gruppe sogenannter übererlaubter (super-allowed) Übergänge. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sich die Wellenfunktionen des Kerns im Anfangs- und Endzustand sehr ähnlich sind. Dann liegt das Matrixelement in dem Bereich der grössten möglichen Werte, und die Übergangswahrscheinlichkeit ist besonders gross.

Vollkommene Überlappung entspricht dem Maximalwert von $|M_{if}|$. Starke Überlappung der Wellenfunktionen ist zwischen Spiegelkernen vorhanden, wie sich an folgendem stark vereinfachten Bild anschaulich machen lässt: Gemäss dem Schalenmodell werden die Niveaux der Protonen und die der Neutronen, bei den tiefsten beginnend, der Reihe nach besetzt. Jedes Niveau kann nicht mehr als zwei Teilchen mit entgegengesetztem Spin aufnehmen. Unter der Annahme, dass die Kernkräfte unabhängig davon sind, ob sie auf Proton oder Neutron wirken, sind die Wellenfunktionen und die Energien der Protonen und Neutronen in gleichen Quantenzuständen bis auf eine kleine Coulomb-Störung gleich. Der β-Zerfall zwischen Spiegelkernen bedeutet insofern den Wechsel eines Nukleons zwischen zwei gleichen Quantenzuständen (Fig. 10.23).

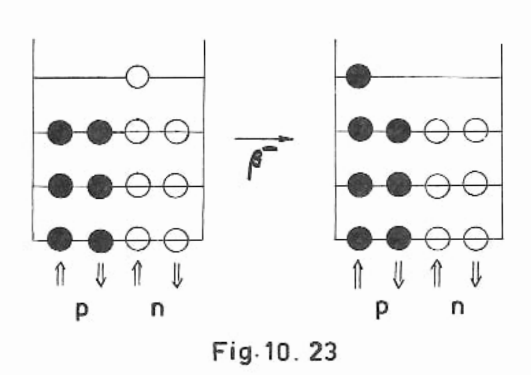


Fig. 10. 23

10.4.2 Erlaubte Übergänge

Für den β-Zerfall, bei dem keiner der Terme (kR) oder (v/c) hinzugezogen werden muss, damit $|H_{if}| \neq 0$ wird, der aber nicht zwischen Spiegelkernen stattfindet, führt die Umbesetzung eines Nukleons $n \rightarrow p$ auf einen Zustand, dessen Wellenfunktion deutlich von der des Ausgangszustandes verschieden ist. (Fig. 10.24). Das Matrixelement ist infolge der geringeren Überlappung um eine Grössenordnung kleiner. Das ist die Gruppe der normalen Übergänge, und ihre ft-Werte sind etwa um einen Faktor 10^2 grösser als die der übererlaubten Übergänge.

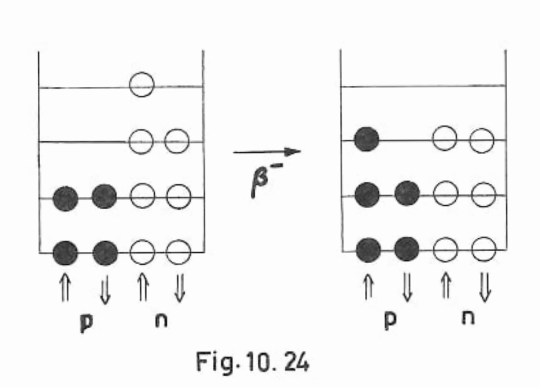


Fig. 10. 24

10.4.3 Verbotene Übergänge

Für Übergänge, bei denen Terme (kR) oder (v/c) hinzugezogen werden müssen, ist $|M_{if}|$ jeweils um entsprechende Grössenordnungen kleiner als bei normal erlaubten Übergängen. Die Überlappung der Wellenfunktionen ist dann vergleichsweise gering. Die Quantenzahlen im Anfangs- und Endzustand sind umso stärker voneinander verschieden. Wo also mit dem Übergang eine grosse Änderung des Kernspins verknüpft ist, handelt es sich um verbotene β -Zerfälle.

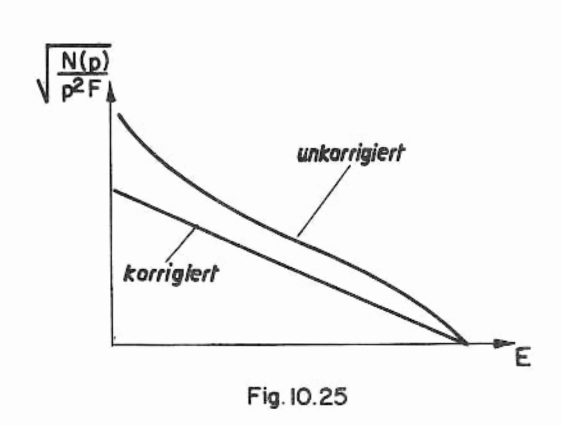


Fig. 10.25

Aus dem Auftreten des Faktors (kR), der durch k den Elektronenimpuls enthält, lässt sich erkennen, dass dann die Matrixelemente von der Energie des Elektrons abhängig sind. Die Form des Spektrums ist also für erlaubte und verbotene Übergänge verschieden. Das Kurie-Diagramm liefert zumeist keine Gerade mehr (Fig. 10.25). In gewissen Fällen lässt sich die Kurve durch eine geeignete Korrekturfunktion begradigen.

10.5. Elektroneinfang

10.5.1 Zerfallskonstante und ft-Werte

Der Elektroneinfang lässt sich als ein zur β^+-Emission analoger Prozess beschreiben:

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu^+. \qquad (10.57)$$

Die emittierten Neutrinos sind hierbei monochromatisch; ihre Energie ist

$$E_\nu = E_o + m_e c^2 - E_B \qquad (10.58)$$

wobei E_o die aus der Massendifferenz der Kerne verfügbare Zerfallsenergie und E_B die Bindungsenergie des Elektrons in seiner betreffenden Schale vor dem Einfang ist. Die Rückstossenergie des Kernes ist dabei vernachlässigt. Tritt gleichzeitig Elektroneinfang aus mehreren Schalen auf, dann besteht das Energiespektrum der Neutrinos aus mehreren diskreten Linien (Fig. 10.26).

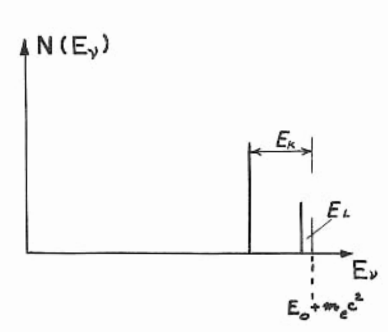


Fig. 10. 26

Eine Berechnung des β -Spektrums ist beim reinen Elektroneinfang gegenstandslos. Die Zerfallskonstante bzw. die Lebensdauer lässt sich jedoch in der gleichen Weise wie bei den anderen

β -Zerfällen berechnen:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \, | H_{if} |^2 \, \frac{dn}{dE_\nu} \, . \qquad (10.59)$$

Hierin ist jedoch jetzt der statistische Faktor allein durch den Impuls des Neutrinos bestimmt, da sich das Elektron vor dem Zerfall in einem definierten Zustand befindet (vgl. (10.11)):

$$dn = dn_\nu = V \, . \, \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3} \, . \qquad (10.60)$$

Mit $p_\nu = E_\nu / c$ ist dann

$$\frac{dn}{dE_\nu} = \frac{V \, . \, E_\nu}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} \, . \qquad (10.61)$$

Das Matrixelement lautet ebenso wie (10.25). Für erlaubte Übergänge ist wiederum

$$| H_{if} |^2 = g^2 \, | \varphi_e(0) |^2 . \, | \varphi_\nu(0) |^2 . \, | M_{if} |^2 \, . \qquad (10.62)$$

Das Neutrino lässt sich nach wie vor als ebene Welle ansetzen, so dass

$$| \varphi_\nu(0) |^2 = \frac{1}{V} \, . \qquad (10.63)$$

Indessen ist die Wellenfunktion des K-Elektrons jetzt durch den Zustand in der betreffenden Schale vorgegeben; sie lautet für das K-Elektron:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} . \, e^{-\frac{Z}{a_0} \cdot r} \qquad (10.64)$$

worin $$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \qquad (10.65)$$

der Bohrsche Bahnradius ist, so dass

$$| \varphi_e(0) |^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z m_e e^2}{\hbar^2} \right)^3 \, . \qquad (10.66)$$

Dann ist

$$| H_{if} |^2 = g^2 . \, \frac{1}{V} . \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z m_e e^2}{\hbar^2} \right)^3 . \, | M_{if} |^2 \qquad (10.67)$$

und die Zerfallskonstante

$$\lambda = g^2 \, \frac{(Ze^2)^3 \, m_e^3}{\pi^2 \hbar^{10} \, c^3} \, . \, | M_{if} |^2 . \, E_\nu^2 \, . \qquad (10.68)$$

Drückt man die Neutrinoenergie (10.58) in relativistischen Einheiten

$$W_0 \equiv \frac{E_0 + m_e c^2}{m_e c^2} \quad ; \quad \varepsilon_B \equiv \frac{E_B}{m_e c^2} \qquad (10.69)$$

aus, und setzt man wie oben die universelle Zeitkonstante (10.54) ein, dann erhält man

$$\lambda = \frac{| M_{if} |^2}{\tau_0} . \, 2\pi . \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^3 (W_0 - \varepsilon_B)^2 \, . \qquad (10.70)$$

Der Elektroneinfang ist bei schweren Kernen wesentlich stärker als bei leichten, denn die Überlappung des Elektronenzustandes mit dem Kernvolumen nimmt aus zwei Gründen bei schweren Kernen zu: Die Elektronenbahnen werden mit zunehmendem Z kleiner (gemäss (10.70) ist $\lambda \sim Z^3$) und der Kernradius wächst proportional $A^{1/3}$.

Definiert man die Fermi-Funktion für den K-Einfang f_{oK} wie in (10.53)

$$\lambda = \frac{|M_{if}|^2}{\tau_0} \cdot f_{oK} \qquad (10.71)$$

dann ist

$$f_{oK} = 2\pi \left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^3 \cdot (W_0 - \varepsilon_B)^2 . \qquad (10.72)$$

Setzt man noch die Bindungsenergie des K-Elektrons

$$\varepsilon_K = \frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^2 = \frac{1}{2}(\alpha Z)^2 \qquad (10.73)$$

ein, wobei α die Feinstrukturkonstante ist, dann erhält man

$$f_{oK} = 2\pi (\alpha Z)^3 \left(W_0 - \tfrac{1}{2}(\alpha Z)^2\right)^2 . \qquad (10.74)$$

Dieses "Fermi-Integral" ist noch durch zwei Korrekturen zu ergänzen, die für schwere Kerne von Bedeutung sind: relativistische Effekte und elektrostatische Abschirmung. Der Verlauf der relativistisch korrigierten Funktion f_{oK} ist in Fig. 10.27 wiedergegeben. An die Stelle der Coulomb-Verzerrung der Elektronenwelle durch das Kernfeld tritt beim Elektroneinfang die Abschirmung der Kernladung in der betreffenden Schale durch die übrigen Elektronen. f_{oK} wird nach diesen Korrekturen f_K genannt. Für K-Elektronen erhält man eine gute Näherung, indem man Z durch die EFFEKTIVE KERNLADUNG $Z' = Z - 0,3$ ersetzt.

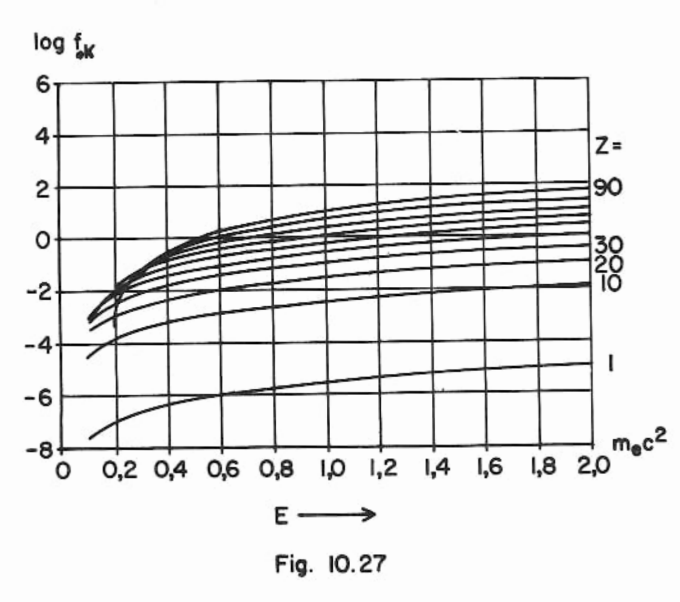


Fig. 10.27

Die mit f_K gebildeten ft-Werte

$$f_K T_{1/2} = \frac{\tau_0 \ln 2}{|M_{if}|^2} \qquad (10.75)$$

stimmen mit denen der übrigen β-Zerfälle überein. Es gibt hier ebenfalls Übergänge verschiedenen Verbotenheitsgrades, die durch die Grössenordnung der Kern-Matrixelemente bestimmt sind. Allerdings sind experimentell fast nur erlaubte und übererlaubte Übergänge bekannt.

Es gibt jedoch insofern noch eine weitere Mannigfaltigkeit, als das Elektron aus verschiedenen Schalen eingefangen werden kann. Dabei tritt anstelle von f_K die Funktion f_L etc., aber der ft-Wert bleibt unverändert. Zumeist ist der K-Einfang allein massgebend. Lediglich bei sehr schweren Atomen ist die Beteiligung der nächsten Schalen nicht mehr ganz zu vernachlässigen (Fig. 10.28). Für den Einfang aus diesen anderen Schalen ist jedoch die Korrektur für die Abschirmung des Kernfeldes durch die anderen Elektronen sehr wesentlich.

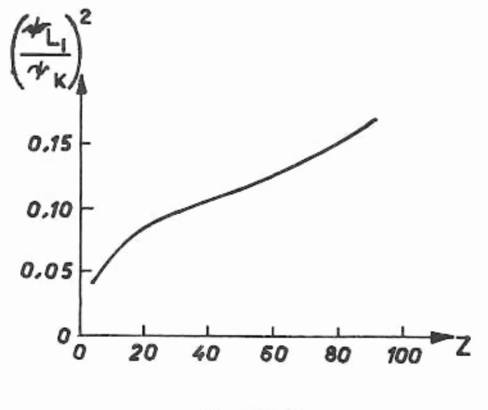


Fig. 10.28

Da die Lebensdauer des Prozesses von der Wellenfunktion des Elektrons vor dem Einfang abhängt, lässt sich die Zerfallskonstante durch chemische Bindungseffekte beeinflussen. Das liess sich durch unterschiedliche Zerfallszeiten des L-Einfangs an Be^7 in BeF_2 und metallischem Be zeigen. Ferner ist das Verzweigungsverhältnis zwischen K-Einfang und β^+-Zerfall von Wichtigkeit, weil das Verhältnis $(f_K/f_{\beta+})$ für erlaubte Übergänge vom Kern-Matrixelement unabhängig ist. In Fig. 10.29 ist $(f_K/f_{\beta+})_o$ dargestellt, das aber noch der Coulomb-Korrektur bedarf, wodurch die Werte im Mittel um etwa 10% niedriger zu nehmen sind.

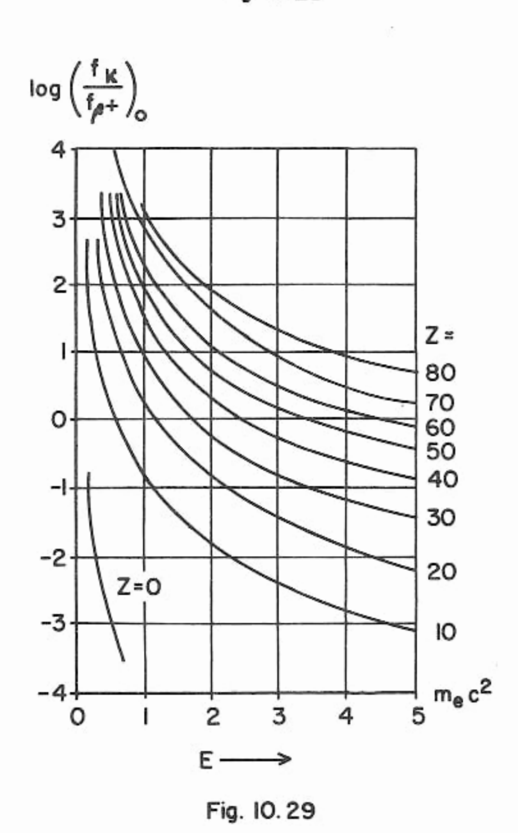


Fig. 10.29

10.5.2 Experimenteller Nachweis des Elektroneinfangs

Nach dem K-Einfang streben Kern und Hülle ihren Grundzuständen zu, der Kern durch γ-Emission und die Hülle durch Emission charakteristischer Röntgenstrahlung oder Auger-Elektronen. Während das Atom unmittelbar nach dem Zerfall neutral ist, wird es durch die Emission von Auger-Elektronen in der Regel mehrfach ionisiert.

Diese Prozesse in der Hülle lassen sich kurz wie folgt beschreiben: Das eingefangene Elektron hinterlässt in einer der innersten Schalen eine Lücke; diese wird dadurch aufgefüllt, dass Elektronen aus den äusseren Schalen unter Emission

von Röntgenstrahlung in sie hineinfallen; dieser Vorgang spielt sich kaskadenartig ab. Dabei wandert die Lücke von innen nach aussen, und zwar anfangs sehr rasch ($\tau \sim 10^{-15} - 10^{-17}$ sec) und dann zunehmend langsamer, weil die Übergangswahrscheinlichkeit proportional $(\Delta E)^{-3}$ ist. Aussen erreicht die Lebensdauer der Zustände die der optischen Übergänge. - Die Übergangswahrscheinlichkeit für Auger-Prozesse ist indessen vergleichsweise nur wenig energieabhängig; diese werden also anteilmässig bedeutsamer, je weiter die Lücke nach aussen gelangt. Zumeist überwiegt der Auger-Effekt bereits ausserhalb der K-Schale. Es werden also mehr und mehr Löcher gebildet, die ihrerseits alle nach aussen wandern. Die Geschwindigkeit wird dabei im Wesentlichen durch den Auger-Effekt bestimmt. Man kann also die ersten charakteristischen Röntgen-Linien des Tochterelementes beobachten.

Da der Tochterkern durch die Emission des Neutrinos einen Rückstoss erleidet, kann der Elektroneinfang durch Rückstossexperimente nachgewiesen werden. Die nichteindeutige Ionisierung der Tochteratome bereitet dabei gewisse Schwierigkeiten.

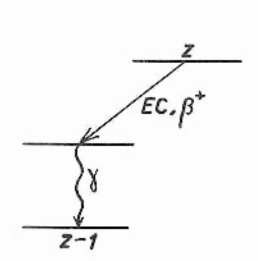


Fig. 10. 30

Das Verzweigungsverhältnis zwischen Elektroneinfang und β^+-Emission lässt sich experimentell dadurch bestimmen, dass man die totale Zahl der Zerfälle beispielsweise durch nachfolgende γ-Strahlung der Tochteraktivität misst und diese mit der Zahl der Positronen vergleicht (Fig. 10.30).

Eine Zusammenfassung der neueren experimentellen Ergebnisse befindet sich in Robinson & Fink, RMP 1960, 32, 117.

10.5.3 Bestimmung der Zerfallsenergie

Da beim Elektroneinfang nur das Neutrino emittiert wird, das sich aber kaum nachweisen lässt, bereitet die direkte Messung der Zerfallsenergie gewisse Schwierigkeiten. Ihre Bestimmung durch Rückstossexperimente liefert jedoch keine guten Werte. Auf indirekte Weise lässt sie sich aus der Energieschwelle der umgekehrten (p, n)-Reaktion bestimmen. Eine andere Methode bedient sich der inneren Bremsstrahlung.

INNERE BREMSSTRAHLUNG tritt sowohl bei normalem β-Zerfall als auch beim Elektroneinfang auf. Sie ist eine nichtmonochromatische γ-Strahlung, die dadurch verursacht wird, dass sich bei der Emission das geladene β-Teilchen mit grosser Beschleunigung von der Kernladung löst. Beim Elektroneinfang tritt sie durch die plötzliche Verlagerung der Elektronladung in den Kern auf; sie ist hierbei zwar viel geringer als bei den anderen β-Prozessen; dafür ist sie aber nicht von äusserer Bremsstrahlung überlagert, weil keine Elektronen nach aussen

emittiert werden. Die ÄUSSERE BREMSSTRAHLUNG entsteht durch Ablenkung des β-Teilchens im Coulomb-Feld eines anderen Kernes.

Die Messung der inneren Bremsstrahlung beim β^+- oder β^--Zerfall bereitet insofern experimentelle Schwierigkeiten, als man die äussere durch Verwendung dünner Präparate möglichst gering halten muss. Man kann den Anteil der inneren dadurch bestimmen, dass man die gesamte Bremsstrahlung bei Präparaten verschiedener Dicke misst und auf Präparatdicke null extrapoliert.

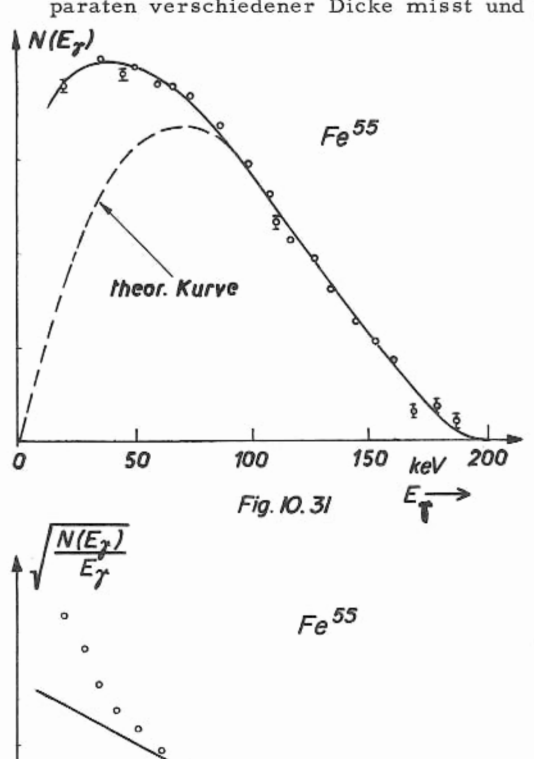


Fig. 10.31

Fig. 10.32

Für erlaubte Übergänge beim K-Einfang lässt sich das Energiespektrum (Fig. 10.31) vereinfacht als

$$N(E_\gamma)\,dE_\gamma = f(E_\gamma)\cdot E_\gamma\left[(E_0 - E_K) - E_\gamma\right]^2 dE_\gamma \qquad (10.76)$$

ausdrücken, wobei sich $f(E_\gamma)$ nur wenig mit der Photonenenergie E_γ ändert. Dann lässt sich das Bremsspektrum gewissermassen in Form eines "Kurie-Diagramms" aufnehmen:

$$\sqrt{\frac{N(E_\gamma)}{f(E_\gamma)\,E_\gamma}} = \text{const.}\left[(E_0 - E_K) - E_\gamma\right] \qquad (10.77)$$

aus dem sich die Zerfallsenergie des Elektroneinfangs gut bestimmen lässt Fig. 10.32).

10.6 Doppelter β-Zerfall

Als DOPPELTE β-ZERFÄLLE werden Prozesse bezeichnet, bei denen sich die Kernladung unter Emission leichter Teilchen um zwei Einheiten ändert. Es werden also gleichzeitig zwei Elektronen oder zwei Positronen emittiert, indem sich zwei Nukleonen im Kern umwandeln.

Der doppelte β-Zerfall lässt sich als ein zweistufiger Prozess auffassen, der über einen virtuellen Zwischenzustand führt, wobei sich im ersten Schritt beispielsweise zunächst ein Proton unter Emission eines e^+ und eines ν^+ in ein Neutron umwandelt

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu^+ \;. \qquad (10.78)$$

Für den weiteren Verlauf gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder wandelt sich das zweite Proton in gleicher Weise

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu^+ \qquad (10.79)$$

oder durch Absorption des zuerst gebildeten Neutrinos um (unter der Annahme $\nu^+ \equiv \nu^-$):

$$p + \nu^- \longrightarrow n + e^+ . \qquad (10.80)$$

Die beiden Zerfallstypen unterscheiden sich dadurch, dass insgesamt zwei Neutrinos oder keines emittiert werden.

Sie unterscheiden sich auch deutlich in der Lebensdauer. Beim neutrinolosen Zerfall ist die Energie des Neutrinos in weiten Grenzen beliebig; infolgedessen ist sein verfügbarer Phasenraum und damit sein statistischer Faktor sehr gross. Im anderen Fall gilt für die Neutrinos der normale Phasenraum. Infolgedessen ist die Halbwertszeit des neutrinolosen Zerfalls um mehrere Grössenordnungen kürzer als im anderen Fall. - Grundsätzlich gehört der β-Zerfall zu den langsamen Kernprozessen, was sich durch seine sehr grosse universelle Zeitkonstante ($\tau_o \sim 10^4$ sec) ausdrückt. Für den doppelten β-Zerfall ergeben sich dementsprechend sehr lange Zerfallszeiten. Die Halbwertszeiten für normale Energien E_o liegen bei dem neutrinolosen Zerfall zwischen 10^{15} und 10^{18} Jahren und bei dem anderen Zerfallstyp zwischen 10^{18} und 10^{22} Jahren (Fig. 10.33).

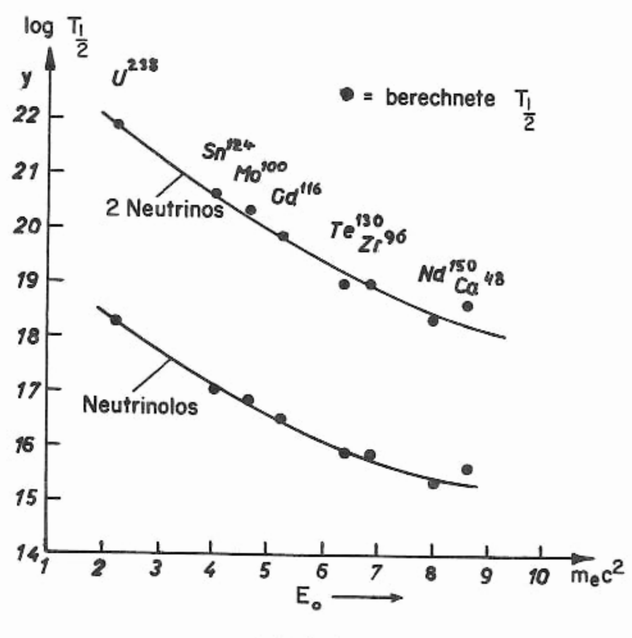


Fig. 10.33

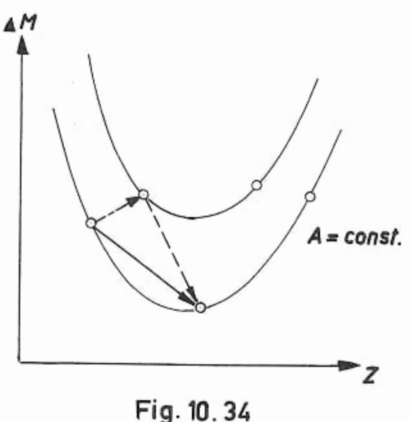


Fig. 10.34

Infolgedessen ist der doppelte β-Zerfall nur bei Abwesenheit einer konkurrierenden Kaskade von zwei einfachen β-Zerfällen nachweisbar; denn diese sind in jedem Fall wesentlich schneller und würden ihn verdecken. Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn die Masse des "Zwischenkernes" grösser ist als die des Mutterkernes, so dass der Mutterkern gegen einfachen β-Zerfall stabil ist (Fig. 10.34). - Für den doppelten β^+-Zerfall muss die Massendifferenz der beiden Kerne mindestens $4\, m_e c^2$ betragen.

Infolge der ausserordentlich kleinen Zerfallskonstanten ist der experimentelle Nachweis des doppelten β-Zerfalls recht schwierig. Der Nachweis des neutrinolosen ist nicht nur wegen seiner kürzeren Zerfallszeit, sondern auch insofern günstiger, als die Energiesumme beider β-Teilchen vorgegeben ist. Denn bei Messung der Energiesumme der beiden β-Teilchen durch Koinzidenz müsste sich in diesem Energiespektrum eine Linie bei E_o ergeben. - Bei dem anderen Zerfallstyp ist die Energiesumme der β-Teilchen nicht festgelegt.

Die bisherigen experimentellen Ergebnisse sind keineswegs einhellig, aber sie scheinen die Nichtexistenz des neutrinolosen β-Zerfalls zu bestätigen.

Der doppelte β-Zerfall ist für die Frage der Unterscheidbarkeit von Neutrino und Antineutrino von Interesse. Sind ν^- und ν^+ identisch, dann ist die Absorption des virtuellen Neutrinos und damit der neutrinolose Zerfall begünstigt. Bei dessen Nichtexistenz hingegen müssen ν^- und ν^+ verschieden sein. Die Experimente sprechen somit dafür, dass

$$\nu^- \neq \nu^+ .$$

10.7 Arten der β-Wechselwirkung

Die Art der β-Wechselwirkung, d.h. die Form der Kopplung zwischen den beteiligten Nukleonen und Leptonen ist zunächst unbekannt. Angesichts dessen war die in Abschnitt 10.3 angegebene Berechnung von H_{if} in Analogie zu optischen Übergängen ein gelungener erster Versuch. Dieser Ansatz ist nun zu verbessern. -

Zunächst wird der β^--Prozess auf die Wechselwirkung zwischen vier Teilchen

$$n \rightarrow p + e^- + \nu^- \qquad (10.81)$$

beschränkt. Von der Gegenwart des übrigen Kernes wird auf diese Weise abstrahiert.

Der Prozess (10.81) wird symmetrisch aufgefasst

$$n + \nu^+ \rightarrow p + e^- \qquad (10.82)$$

als die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton unter gleichzeitiger Vernichtung eines Neutrinos und Entstehung eines Elektrons. Diese simultane Nukleonen- und Leptonenumwandlung kann symbolisch in der Form

$$(pn)\ (e^- \ \nu^+)$$

geschrieben werden. Diese gleichzeitige Beteiligung von vier Partnern ist ein Charakteristikum der β-Wechselwirkung als schwacher Wechselwirkung. Anstelle von (10.23) bzw. (10.29) hat jetzt der Operator für die Wechselwirkungs-Energiedichte die Gestalt

$$\mathcal{H}_i^{(\beta^-)} = g\,(\psi_p^* \, O_i \, \psi_n)(\psi_e^* \, O_i \, \psi_\nu) . \qquad (10.83)$$

Der Operator 0_i beschreibt die Form der Wechselwirkung, die bei Anwendung auf das Neutrino die Umwandlung in ein Elektron und bei Anwendung auf das Neutron die Umwandlung in ein Proton bewirkt. Es ist zu beachten, dass der Operator in der ersten Klammer nur auf die Variablen der Nukleonen und in der zweiten Klammer nur auf die der Leptonen wirkt.

Der β^+-Zerfall wird als inverser Prozess

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu^+ \tag{10.84}$$

zu (10.82) aufgefasst; der zugehörige Hamilton-Operator ist dann einfach der zu (10.83) konjugiert komplexe Term

$$\mathcal{H}_i^{(\beta^+)} = g\,(\psi_n^*\, O_i\, \psi_p)(\psi_\nu^*\, O_i\, \psi_e)\,. \tag{10.85}$$

β^+- und β^--Zerfall lassen sich also gemeinsam durch

$$\mathcal{H}_i = g\,(\psi_p^*\, O_i\, \psi_n)(\psi_e^*\, O_i\, \psi_\nu) + \text{Konj. Kompl.} \tag{10.86}$$

beschreiben.

Da sich die Leptonen mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen, ist für die Behandlung des Problems die Dirac-Gleichung verbindlich (Anh. C). Die Diracsche Theorie gibt insgesamt fünf voneinander unabhängige Formen der Wechselwirkung an (Tab. C. 1); diese werden als

skalar	(S)
vektoriell	(V)
tensoriell	(T)
achsialvektoriell	(A)
pseudoskalar	(P)

bezeichnet. Der Hamilton-Operator (10.86) gilt für diese Wechselwirkungen einzeln, wobei sich die Operatoren 0_i durch γ-Matrizen in der Form

$$\left.\begin{aligned} 0_S &= 1 \\ 0_V &= \gamma^\mu \\ 0_T &= i\,\gamma^\mu\gamma^\nu \\ 0_A &= i\,\gamma_5\gamma^\mu \\ 0_P &= \gamma_5 \end{aligned}\right\} \tag{10.87}$$

darstellen lassen.

Es lässt sich theoretisch nicht von vornherein entscheiden, welche von diesen fünf Wechselwirkungen sich am β-Zerfall beteiligen. Formal müssen also alle fünf zugelassen werden. Der vollständige Hamilton-Operator für den β-Zerfall ist dann eine lineare Kombination der $\mathcal{H}_i$:

$$\mathcal{H} = C_S\,\mathcal{H}_S + C_V\,\mathcal{H}_V + C_T\,\mathcal{H}_T + C_A\,\mathcal{H}_A + C_P\,\mathcal{H}_P \tag{10.88}$$

$$\mathcal{H} = g\sum_i C_i\,(\psi_p^*\, O_i\, \psi_n)(\psi_e^*\, O_i\, \psi_\nu) + \text{Konj. Kompl.} \tag{10.89}$$

Die Kopplungskonstanten C_i definieren die entsprechende Beteiligung jeder der fünf Wechselwirkungen.

Von zentraler Bedeutung für das Verständnis des β-Zerfalls ist die Klärung der Frage, in welcher Weise diese einzelnen Kopplungen beteiligt sind. Eine Entscheidung darin kann nur durch das Experiment getroffen werden.

Die Wechselwirkungen S und V entsprechen der Emission der Leptonen im Singulettzustand (antiparallele Spins); sie werden zusammenfassend als FERMI-WECHSELWIRKUNG (F) bezeichnet. Analog entsprechen T und A der Emission der Leptonen im Triplettzustand (parallele Spins); sie werden gemeinsam als GAMOW-TELLER-WECHSELWIRKUNG (GT) bezeichnet (Fig. 10.35).

e,ν Fermi S,V — e,ν Gamow-Teller T,A

Fig. 10.35

Der hier behandelte Hamilton-Operator (10.89) bezieht sich nur auf einen Prozess, bei dem die Parität erhalten bleibt. Die Modifikation, die der Verletzung der Parität beim β-Zerfall Rechnung trägt, wird in Abschnitt 10.10.2 durchgeführt werden.

10.8 Auswahlregeln

Der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}, \qquad (10.90)$$

der vom Leptonenfeld fortgetragen wird, setzt sich vektoriell aus dem Bahndrehimpuls $\vec{\ell}$ und dem Spin $\vec{s}$ des Elektron-Neutrino-Paars zusammen. Der Spin kann die Werte $\vec{s} = 0$ oder 1 annehmen.

Werden Elektron und Neutrino mit antiparallelen Spins emittiert, dann hat $j = \ell$ einen eindeutigen Wert (Singulett). Werden die Leptonen mit parallelen Spins emittiert, so kann j die drei Werte $\ell-1, \ell, \ell+1$ annehmen (Triplett).

Bleibt der Gesamtdrehimpuls des ganzen Systems erhalten, so gilt für die Kernspins im Anfangs- und Endzustand

$$\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{j}\,. \qquad (10.91)$$

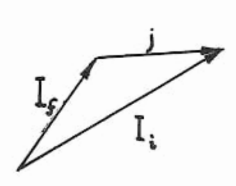


Fig. 10.36

Bei vorgegebenem I_i und I_f kann j nur die Werte

$$|I_i - I_f| \leq j \leq I_i + I_f \qquad (10.92)$$

annehmen. Für ein vorgegebenes j kann sich der Kernspin nur um

$$|\Delta I| \leq j \qquad (10.93)$$

ändern. Also ist

$\Delta I \leq \ell$ im Singulett-Zustand, d.h. bei FERMI-WECHSELWIRKUNG (10.94)

$\Delta I \leq \ell+1$ im Triplett-Zustand, d.h. bei GAMOW-TELLER-WECHSELWIRKUNG. (10.95)

Bei erlaubten Übergängen ist $\ell = 0$; dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta I &= 0 && \text{für FERMI-KOPPLUNG} \\ \Delta I &= 0{,}1 && \text{für GAMOW-TELLER-KOPPLUNG} \end{aligned} \qquad (10.96)$$

Ferner ändert sich die Parität bei erlaubten Übergängen nicht:

$$\Delta \pi = no \,. \qquad (10.97)$$

Für den Fall $\Delta I = 1$, $\Delta \pi = no$ ist also nur GT-Kopplung möglich; solche Übergänge heissen UNIQUE.

Für $\Delta I = 0$, $\Delta \pi = no$ treten F- und GT-Kopplung gemeinsam auf.

Bei $0 \to 0$ Übergängen, $\Delta \pi = no$, ist wegen $j = 0$ keine GT-Kopplung möglich; in diesen Fällen findet reine F-Wechselwirkung statt, z.B. bei C^{10}, 0^{14}, Cl^{36} ...

P-Wechselwirkung tritt bei erlaubten Übergängen nicht auf.

Bei verbotenen Übergängen ist $\ell \neq 0$; die Änderung des Kernspins ist $\Delta I \geq 1$.

Für den Fall $\Delta I = 1$ ändert sich bei verbotenen Übergängen die Parität des Kernes im Gegensatz zu erlaubten Übergängen.

Im Einzelnen sind die Auswahlregeln bei verbotenen Übergängen infolge der komplizierten Gestalt der Matrixelemente verhältnismässig kompliziert. Der Paritätscharakter des Übergangs wechselt mit den Verbotenheitsgraden. -

Alle folgenden Betrachtungen seien nur auf erlaubte Übergänge beschränkt.

10.9 Beteiligung der verschiedenen Wechselwirkungen

Durch die Auswahlregeln für Spin und Parität lassen sich F- und GT-Kopplungen unterscheiden. P-Wechselwirkung hingegen tritt bei erlaubten Übergängen nicht auf.

Es ist nun von Interesse, einerseits die relative Stärke von F- und GT-Wechselwirkung zu bestimmen und ausserdem zu erfahren, wie die Beteiligung von S und V bei F-Kopplung und von T und A bei GT-Kopplung ist.

10.9.1 ft-Werte und Kern-Matrixelemente

ft-Wert und Kern-Matrixelement hängen, wenn nur eine Form der Wechselwirkung beteiligt ist, auf einfache Weise miteinander zusammen (vgl. (10.56)):

$$\frac{1}{ft} = \frac{g^2}{2\pi^3} \cdot \frac{m_e^5 c^4}{\hbar^7 \ln 2} \cdot |M_{if}|^2 \,. \qquad (10.98)$$

Solche Fälle sind für reine GT-Wechselwirkung bei den Übergängen $\Delta I = 1$ und für reine F-Wechselwirkung bei $(0 \to 0)$-Übergängen gegeben. Dann lässt sich, wenn das Kern-Matrixelement bekannt ist, die Fermi-Konstante unmittelbar aus (10.98) bestimmen.

Bei Übergängen Δ I = 0 treten beide Wechselwirkungen nebeneinander auf. Da sich die Zerfallswahrscheinlichkeiten addieren, setzt sich der ft-Wert folgendermassen zusammen:

$$\frac{1}{ft} = \frac{1}{(ft)_F} + \frac{1}{(ft)_{GT}} \qquad (10.99)$$

$$\frac{1}{ft} = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2} \cdot g^2 \left(C_F^2 \, |M_F|^2 + C_{GT}^2 \, |M_{GT}|^2 \right). \qquad (10.100)$$

Man schreibt dies gewöhnlich in der Form

$$\frac{1}{ft} = \frac{(1-x)\,|M_F|^2 + x\,|M_{GT}|^2}{\mathcal{B}} \qquad (10.101)$$

mit

$$x = \frac{C_{GT}^2}{C_F^2 + C_{GT}^2} \qquad (10.102)$$

und

$$\mathcal{B} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 \cdot g^2} \cdot \frac{1}{C_F^2 + C_{GT}^2} \quad . \qquad (10.103)$$

Wenn einerseits ft durch Messung bekannt ist und die Kern-Matrixelemente berechnet werden können, dann ist durch (10.101) eine lineare Beziehung zwischen B und x gegeben:

$$\mathcal{B} = ft \left[(1-x)\,|M_F|^2 + x\,|M_{GT}|^2 \right] . \qquad (10.104)$$

Trägt man B gegen x für mehrere Zerfälle auf, deren ft-Werte und Kern-Matrixelemente bekannt sind, dann ergibt sich aus dem gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden ein Wert für B und für x, die unmittelbar g und C_{GT}/C_F liefern.

Grundsätzlich ist dafür also die Kenntnis der Kern-Matrixelemente notwendig; diese aber sind weitgehend von Kernmodellen abhängig und lassen sich infolgedessen gegenwärtig noch nicht genau berechnen. Nur in wenigen Fällen sind mehr oder minder gute Näherungen möglich.

Für Spiegelübergänge können die Wellenfunktionen des Kernes im Anfangs- und Endzustand als gleich angenommen werden. Das setzt Ladungsunabhängigkeit des Kernzustandes bzw. Vernachlässigbarkeit der Coulomb-Einwirkung voraus, es findet also nur für leichte Kerne Anwendung. Ausserdem muss das Ein-Teilchen-Modell gut gelten, d.h. die Eigenschaften des Kernes müssen im Wesentlichen durch den Quantenzustand eines einzelnen Nukleons bestimmt sein, an dem übrigens die β -Wechselwirkung stattfindet. Mit Hilfe dieses Modells gilt dann

$$|M_F|^2 = 1 \quad ; \quad |M_{GT}|^2 = \begin{cases} \dfrac{I}{I+1} & \text{für } I = \ell - \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{I+1}{I} & \text{für } I = \ell + \frac{1}{2} \end{cases} \quad . \qquad (10.105)$$

Zuverlässig genug sind diese Werte aber nur für Kerne, bei denen dieses ausgezeichnete Teilchen besonders lose Kopplung mit dem übrigen Kern besitzt. Das sind Kerne

mit abgeschlossenen Schalen plus oder minus einem Nukleon, z.B.: n, He^3, 0^{15}, F^{17}, Ca^{39}, Sc^{41}. Trägt man diese besonders ausgewählten Spiegelübergänge im Diagramm B gegen x auf, so ergibt sich mit etwa $\pm$ 10% Genauigkeit ein gemeinsamer Schnittpunkt für x (Fig. 10.37). Trägt man indessen die anderen Spiegelkerne in der gleichen Weise auf, so ergibt sich nicht im Entferntesten ein gemeinsamer Schnittpunkt (Fig. 10.38). Hieran zeigt sich die Unzulänglichkeit des Kernmodells für Aussagen über Kern-Matrixelemente. Man führt die Diskrepanzen in Fig. 10.37 und 10.38 hauptsächlich auf die Ungenauigkeit von $|M_{GT}|^2$ zurück, während $|M_F|^2$ zuverlässiger ist. Wie man aus (10.105) sieht, hängt die Genauigkeit des Wertes für $|M_{GT}|^2$ davon ab, wieweit die im Schalenmodell angenommenen Kopplungen erfüllt sind.

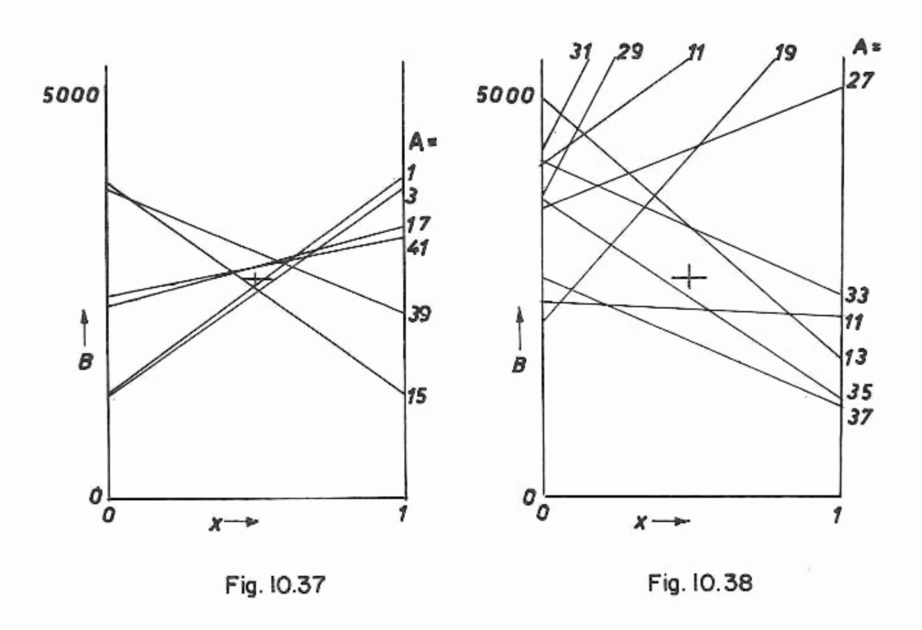


Fig. 10.37 Fig. 10.38

Parallel dazu zeigt sich, dass die nach dem Ein-Teilchen-Modell berechneten magnetischen Momente für Kerne mit abgeschlossenen Schalen plus oder minus einem Nukleon dicht bei den Schmidtschen Linien liegen, die übrigen hingegen nicht. Es lässt sich eine halbempirische Beziehung für $|M_{GT}|^2$ als Funktion des magnetischen Momentes aufstellen. Benutzt man die daraus berechneten Kern-Matrixelemente, dann ergibt sich bereits eine wesentlich bessere Übereinstimmung der Schnittpunkte als in Fig. 10.38.

Am zuverlässigsten kennt man die Matrixelemente von n und 0^{14}: Das Neutron zerfällt mit einem gemischten Übergang; seine Matrixelemente sind gemäss (10.105):

$$|M_F|^2 = 1 \quad ; \quad |M_{GT}|^2 = 3.$$

Das 0^{14} zerfällt durch reinen Fermi-Übergang $0 \longrightarrow 0$; sein Matrixelement ist

$$|M_F|^2 = 2$$

und zwar weil zwei Protonen, die für den β-Zerfall in Frage kommen, in gleichen Zuständen vorhanden sind.

Aus diesen beiden Zerfällen leitet sich der heute als zuverlässigster geltende Wert

$$\boxed{\left|\frac{C_{GT}}{C_F}\right|^2 = 1,47 \pm 0,06} \qquad (10.106)$$

her. Aus O^{14} ergibt sich ausserdem

$$\boxed{g_F = (1,41 \pm 0,01) \, . \, 10^{-49} \mathrm{erg.cm}^3} \, . \qquad (10.107)$$

Die Fermi-Konstante wird hier als g_F bezeichnet, weil sie über die Fermi-Kopplung bestimmt ist. Die Fermi-Kopplung eignet sich am besten zur Bestimmung von g, da die Matrixelemente $|M_F|$ zuverlässiger als die $|M_{GT}|$ sind.

10.9.2 Fierz-Interferenzterm

Fierz hat darauf hingewiesen, dass bei F-Wechselwirkungen durch Interferenz zwischen S und V und bei GT-Wechselwirkungen durch Interferenz zwischen T und A Kreuzterme der Art $2C_SC_V$ und $2C_TC_A$ zu erwarten sind, die zu einem energieabhängigen Zusatzterm b/E Anlass geben.

Das früher berechnete Energiespektrum ist dann mit einem Faktor $(1 + \frac{b}{E})$ zu multiplizieren, wobei der Koeffizient

$$b = \frac{C_S C_V \, |M_F|^2 + C_T C_A \, |M_{GT}|^2}{(C_S^2 + C_V^2)|M_F|^2 + (C_T^2 + C_A^2)|M_{GT}|^2} \qquad (10.108)$$

die erwähnten Kreuzterme enthält.

Möglichkeiten zur experimentellen Bestimmung des FIERZ-TERMES b/E sind also durch seinen Einfluss auf die Form des Energiespektrums, den ft-Wert und das Verzweigungsverhältnis β^+/K-Einfang gegeben.

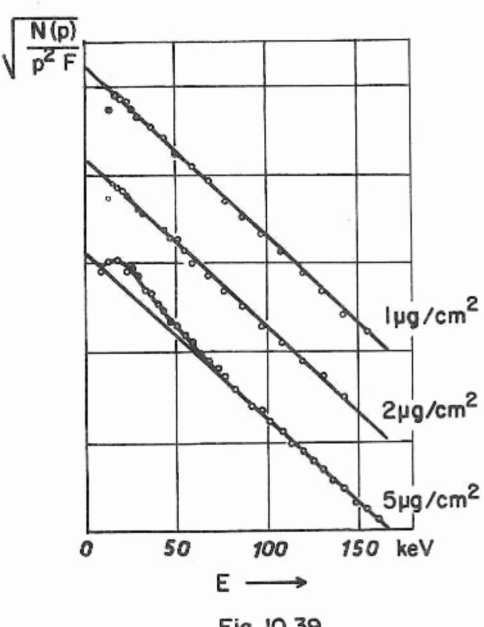


Fig. 10.39

Der Term b/E muss im Spektrum bei kleinen Energien am stärksten hervortreten, und zwar durch eine Abweichung von der Linearität im Kurie-Diagramm nach oben. Tatsächlich fand man anfänglich einen solchen Elektronenüberschuss bei kleinen Energien, zu dem diese Theorie eventuell zu passen schien, bis sich herausstellte, dass der Überschuss der langsamen Elektronen durch Energieverluste bei der Streuung in der Quelle verursacht war (Fig. 10.39). Diese Energieverluste lassen sich durch Verwendung genügend dünner Präparate (~ 1 mg/cm^2) vermeiden; die Abweichung vom linearen Kurie-Diagramm verschwindet auf diese Weise (Fig. 10.39). Der

Intensitätsabfall bei kleinsten Energien ist durch Absorption im Zählrohrfenster bedingt.

In allen Messungen erwies sich der Fierz-Term als verschwindend klein. Das bedeutet, solange die Koeffizienten C_i reel sind, dass sowohl bei F- als auch bei GT-Kopplung nur je eine von beiden Wechselwirkungen auftritt: Wegen $C_S C_V = 0$ kann nur S oder V und wegen $C_T C_A = 0$ kann nur T oder A beteiligt sein.

Durch die Paritätsverletzung wurde das System der Kopplungskonstanten jedoch komplizierter, welches zur Folge hatte, dass diese Schlüsse nicht mehr so eindeutig aus dem Verschwinden des Fierz-Termes gezogen werden konnten.

10.9.3 Elektron-Neutrino-Winkelkorrelation

Die Winkelverteilung zwischen emittiertem Elektron und Neutrino ist von der Form

$$N(E, \vartheta)\, dE = N(E)\left[1 + a\, (\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu)\right] dE, \qquad (10.109)$$

wobei der Anisotropiekoeffizient a von der Stärke der beteiligten Wechselwirkungen abhängt. Drückt man die auf relativistische Einheiten reduzierten Impulsvektoren in der Form

$$p_e \longrightarrow \frac{p_e}{\gamma m_e c} = \beta \equiv \frac{v}{c} \quad ; \quad p_\nu \longrightarrow 1 \qquad (10.110)$$

aus, dann ist

$$N(E, \vartheta)\, dE = N(E)\left[1 + a \frac{v}{c} \cos \vartheta\right] dE \qquad (10.111)$$

wobei v die Elektronengeschwindigkeit und ϑ der Emissionswinkel zwischen Elektron und Neutrino ist.

Für reine Fermi-Kopplung lautet der Anisotropiekoeffizient

$$a_F = \frac{C_V^2 - C_S^2}{C_V^2 + C_S^2} \qquad (10.112)$$

und für reine GT-Kopplung

$$a_{GT} = \frac{1}{3} \frac{C_T^2 - C_A^2}{C_T^2 + C_A^2} . \qquad (10.113)$$

Der Faktor $\frac{1}{3}$ in a_{GT} rührt von den drei Orientierungsmöglichkeiten beim Triplettzustand her, wodurch die Winkelverteilung entsprechend verwischt wird.

Für die einzelnen Wechselwirkungen ist dann gemäss (10.112) und (10.113)

$$a = \begin{cases} -1 & \text{bei S} \\ +1 & \text{bei V} \\ +1/3 & \text{bei T} \\ -1/3 & \text{bei A} \\ -1 & \text{bei P} \end{cases} \qquad (10.114)$$

Durch die experimentelle Bestimmung des Anisotropiekoeffizienten a lässt sich also im einzelnen ermitteln, welche Kopplung beteiligt ist. -

Da sich das Neutrino der Messung entzieht, wird ersatzweise der Rückstoss des Kernes bestimmt. Werden nun Elektron und Neutrino in gleicher Richtung emittiert, dann ist der Rückstoss des Kernes gross; das ist für V und T der Fall ($a > 0$). Werden andererseits Elektron und Neutrino in entgegengesetzter Richtung emittiert, dann kommt nur ein kleiner Rückstoss auf den Kern; das ist für S, A und P der Fall ($a < 0$).

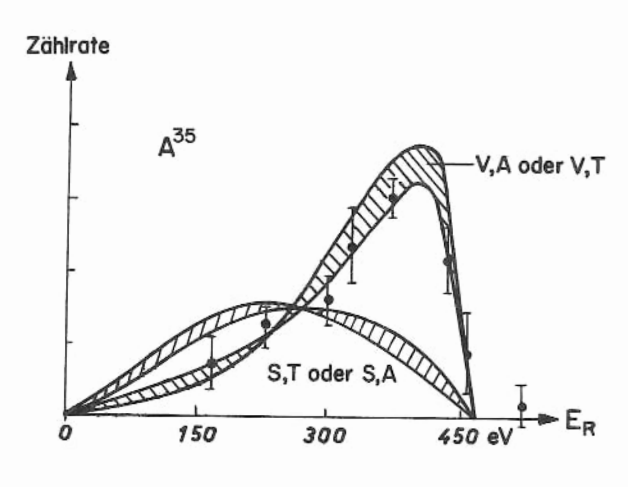


Fig. 10.40

Die experimentelle Bestimmung von a ist auf zweierlei Weise möglich:

1. Durch Messung der Winkelverteilung zwischen Elektronen und Rückstosskernen bei festen Energien.
2. Durch die Messung des Energiespektrums der Rückstosskerne, da je nach Grösse und Vorzeichen von a hohe oder niedrige Rückstossenergien E_R bevorzugt sind (Fig. 10.40).

Für erlaubte Übergänge mit beliebiger Mischung von F- und GT-Kopplung ist

$$a = (1-x)\,a_F + x \cdot a_{GT} \qquad (10.115)$$

wobei x der GT-Anteil ist. Trägt man die gemessenen Anisotropiewerte in ein Diagramm a gegen x ein, dann lässt sich eine gewisse Aussage über die Beteiligung der einzelnen Wechselwirkungen gewinnen (Fig. 10.41).

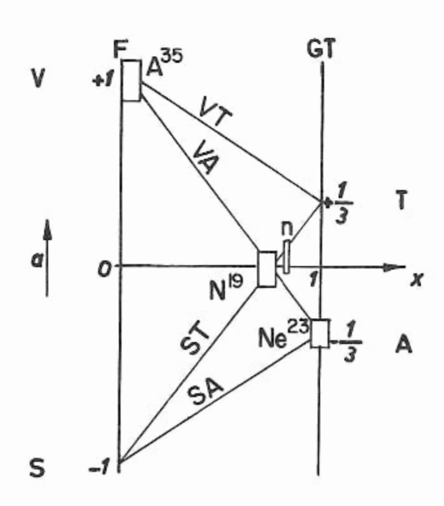


Fig. 10.41

Bei reiner F-Kopplung ($x = 0$) existiert demzufolge nur V und bei reiner GT-Kopplung ($x = 1$) nur A. Bei den gemischten Übergängen steht, wenn man als Mischungsverhältnis den aus dem B-x-Diagramm gewonnen Wert (10.106) benutzt, die Kombinationen ST oder VA zur Wahl. Während frühere Experimente eher die Kopplung ST zu bestätigen schienen, haben erst neuere Experimente zugunsten der VA-Kopplung entschieden.

10.10 Nichterhaltung der Parität

10.10.1 Einleitung

Es war das sogenannte θ-τ-Rätsel, das die Aufmerksamkeit auf die Frage lenkte, ob die Paritätserhaltung, an der zuvor nicht gezweifelt worden war, bei schwachen Wechselwirkungen überhaupt erfüllt sei.

Bei dem θ-τ-Rätsel handelt es sich um zwei Zerfallsweisen des K-Mesons, das die Masse 966 m_e besitzt. Das K-Meson zerfällt durch schwache Wechselwirkungen einmal in zwei und ein anderes Mal in drei π-Mesonen; daneben gibt es noch andere Zerfallsweisen, aber nur diese beiden sind hier von Interesse. In dem einen Fall wird das K-Meson als θ-Teilchen, im anderen Fall als τ-Teilchen bezeichnet:

$$K^+ : \begin{cases} \theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ \tau^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- . \end{cases}$$

Als Spin und Parität ergibt sich experimentell für das τ^+-Teilchen 0- und theoretisch für das θ^+-Teilchen 0+, 2+, 4+, ..., also Zustände, die in der Parität nicht übereinstimmen. Andererseits sind alle anderen Eigenschaften beider Teilchen so genau einander gleich, dass es naheliegt, sie als identische Teilchen anzusehen.

Aus dieser widerspruchsvollen Situation gibt es zwei Auswege: Entweder man nimmt θ^+ und τ^+ als zwei verschiedene Teilchen an, - das wäre ein Fall von Entartung - oder θ^+ und τ^+ sind identische Teilchen, bei deren Zerfall die Parität nicht erhalten bleibt. Die erste dieser beiden Möglichkeiten ist weniger revolutionär und erscheint deshalb zunächst annehmbarer. Indessen zeigte eine Untersuchung von Lee und Yang, dass die Paritätserhaltung bei schwachen Wechselwirkungen, wie beim β-Zerfall, nie ernsthaft geprüft worden war. Sie schlugen daraufhin mehrere Experimente vor, die eine Entscheidung hierin treffen könnten, und diese Experimente ergaben eindeutig, dass die Parität beim β-Zerfall nicht erhalten ist.

10.10.2 Hamilton-Operator bei Nichterhaltung der Parität

Skalare Grössen behalten bei Raumspiegelung ihr Vorzeichen bei; pseudoskalare Grössen kehren bei Raumspiegelung ihr Vorzeichen um. Also sind pseudoskalare Messgrössen paritätsempfindlich.

Der Hamilton-Operator (10.86) ist ein reiner Skalar, er hat also gerade Parität und wird hier als $\mathcal{H}^+$ bezeichnet. Um der Paritätsempfindlichkeit Rechnung zu tragen, ist es notwendig, ihn durch Hinzufügen eines pseudoskalaren Anteils $\mathcal{H}^-$ zu

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ + \mathcal{H}^- \qquad (10.116)$$

zu verallgemeinern, da in physikalischen Messgrössen stets das Quadrat des Hamilton-Operators eingeht. Denn erst dann ergibt sich in dem $|\mathcal{H}|^2$ ein pseudoskalarer Anteil:

$$|\mathcal{H}|^2 = |\mathcal{H}^+|^2 + 2|\mathcal{H}^+||\mathcal{H}^-| + |\mathcal{H}^-|^2 . \qquad (10.117)$$

Die paritätsempfindliche Grösse hierin ist der Kreuzterm $|\mathcal{H}^+||\mathcal{H}^-|$. Für die Paritätsverletzung ist es also wesentlich, dass der Hamilton-Operator sowohl einen paritätsgeraden als auch einen paritätsungeraden Term enthält.

Das paritätsungerade Matrixelement lässt sich ganz analog zu dem paritätsgeraden (10.86) aufstellen, indem lediglich in der Leptonenklammer der Operator O_i durch $O_i \gamma_5$ ersetzt wird:

$$\mathcal{H}^- = g\,(\psi_p^*\, O_i\, \psi_n)(\psi_e^*\, O_i\, \gamma_5\, \psi_\nu)\,. \qquad (10.118)$$

Denn das hinzugefügte γ_5 vertauscht die Transformationseigenschaft jeder einzelnen Wechselwirkung in die ihrer "Pseudo"-Wechselwirkung:

$$S \longleftrightarrow P\;;\quad V \longleftrightarrow A\;;\quad T \longleftrightarrow T$$

$$1 \longleftrightarrow \gamma_5\;;\quad \gamma^\mu \longleftrightarrow \gamma^\mu\gamma_5\;;\quad \gamma^\mu\gamma^\nu \longleftrightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 = \gamma^\mu\gamma^\nu\,.$$

Dabei bleibt zunächst offen, mit welcher Stärke die paritätsgeraden und die paritätsungeraden Kopplungen beteiligt sind, so dass der vollständige Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = g \sum_i \left(C_i\, \mathcal{H}^+ + C_i'\, \mathcal{H}^-\right) \qquad (10.119)$$

lautet. Die C_i und C_i' sind dabei voneinander unabhängige Konstanten. Es sind also insgesamt zehn Konstanten durch Messungen zu bestimmen. Es ist also

$$\mathcal{H} = g \sum_i (\psi_p^*\, O_i\, \psi_n)(\psi_e^*\, O_i\, [C_i + C_i'\gamma_5]\, \psi_\nu) + \text{Konj. Kompl.} \qquad (10.120)$$

Infolge des PCT-Theorems (p. 138) muss bei Verletzung der Parität notwendigerweise die Invarianz gegen Ladungskonjugation oder gegen Zeitumkehr auch verletzt sein. Wenn die Invarianz gegen Zeitumkehr verletzt wäre, dann müssten die C_i und C_i' imaginäre Anteile enthalten. Denn die komplex konjugierten Terme in (10.120) stellen die inversen Prozesse dar. In diesen Termen ist ψ_p mit ψ_n und ψ_e mit ψ_ν vertauscht; ebenso sind die C_i und C_i' durch ihre konjugiert Komplexen ersetzt. Verhalten sich beide Prozesse gleich, so ist

$$C_i = C_i^* \quad \text{und} \quad C_i' = C_i'^*. \qquad (10.121)$$

Dann gibt es also zehn reelle Kopplungskonstanten. Im anderen Fall besteht die Gleichheit (10.121) nicht; dann wären 20 Kopplungskonstanten zu bestimmen.

10.10.3 Paritätsverletzung und Rechts-Links-Asymmetrie

In Ergänzung zu diesem formalen Aspekt soll nun gezeigt werden, dass Links- und Rechtsdrehsinn physikalisch nicht gleichberechtigt sind, wenn bei Spiegelung aller Raumkoordinaten an einem Punkt eine Verletzung der Invarianz auftritt.

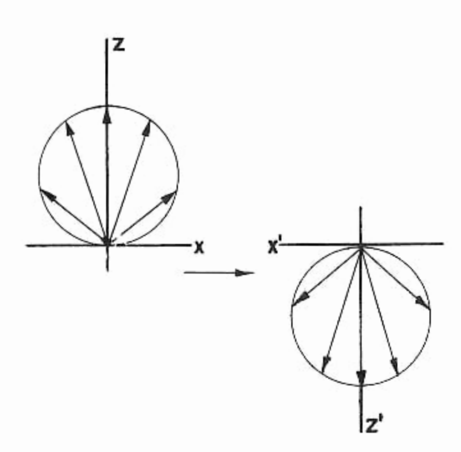


Fig. 10.42

Als Beispiel eines solchen nicht spiegelinvarianten Prozesses werde die Emission von Elektronen mit asymmetrischer Intensitätsverteilung betrachtet (Fig. 10.42). Diese Winkelverteilung werde in einem rechtshändigen Koordinatensystem x, y, z beschrieben; dieses geht bei der Spiegelung $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ in ein linkshändiges $(x', y', z') = (-x, -y, -z)$ über (Fig. 10.43).

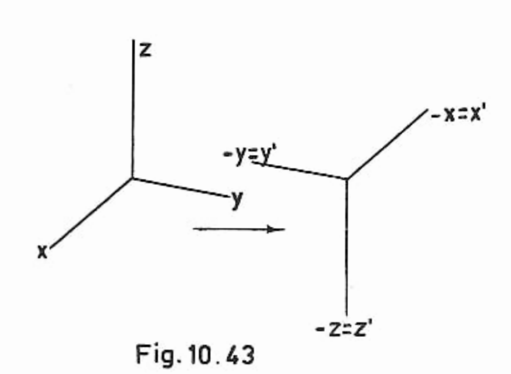


Fig. 10.43

Damit eine solche Asymmetrie indessen physikalisch auftreten kann, muss eine Richtung auch physikalisch ausgezeichnet sein. Diese sei beispielsweise durch die Richtung eines Drehimpulsvektors gegeben. Dieser Drehimpuls lässt sich beispielsweise durch eine Rechtsschraube definieren. Bei Raumspiegelung, also im linkshändigen Koordinatensystem, behält er seine Richtung bei, wenn er weiterhin durch eine Rechtsschraube definiert bleibt (Fig. 10.44). Die Richtung des Drehimpulsvektors ist also unabhängig davon, ob er in einem links- oder rechtshändigen Koordinatensystem beschrieben wird.

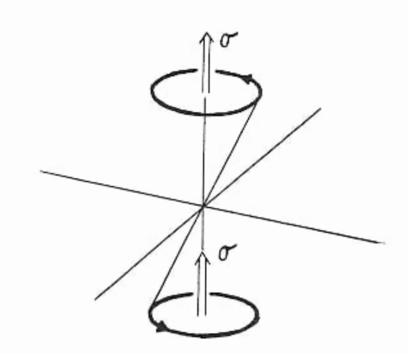


Fig. 10.44

Sind nun asymmetrische Winkelverteilung und Spinrichtung einander zugeordnet, dann ist dieses physikalische System gegenüber Raumspiegelung nicht invariant. Ist beispielsweise σ der Spin der emittierten Elektronen, dann müssten diese Elektronen verschieden,

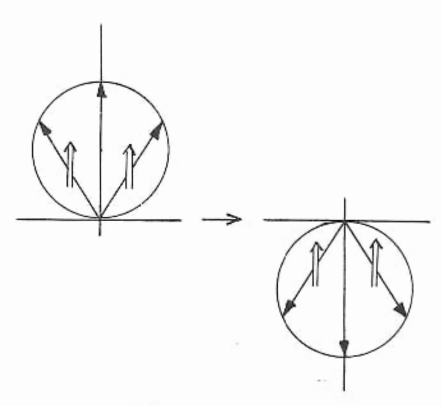


Fig. 10.45

und zwar entweder links-, oder rechtspolarisiert sein, je nachdem, ob die Beschreibung in dem ursprünglichen oder in dem gespiegelten System erfolgt (Fig. 10.45). Beides kann aber hier nicht gleichzeitig der Fall sein. Demzufolge ist, wenn die Spiegelinvarianz verletzt ist, der links- oder rechtshändige Schraubensinn bevorzugt. -

Hier ist noch eine Bemerkung über den Unterschied zwischen der Richtungsdefinition eines Achsialvektors und seiner Invarianz bei Beschreibung in links- oder rechtshändigen Koordinatensystem anzufügen. Natürlich bleibt die Richtung des Drehimpulsvektors insofern willkürlich, als sie durch Verabredung mit Hilfe einer Rechts- oder Linksschraube definiert werden kann. Diese Festlegung geschieht unabhängig von der Art des Koordinatensystems und ist rein formaler Natur; physikalisch von Belang ist die Drehung selbst, aber nicht die Richtungszuordnung des Achsialvektors, und die Drehung bleibt bei Raumspiegelung invariant.

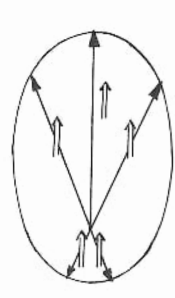


Fig. 10.46

Bei der Symmetrie in Fig. 10.45 ist also nur ein einziger Schraubensinn ausgeprägt, der entgegengesetzte kommt gar nicht vor. Dann ist die Paritätsverletzung maximal. - Es ist aber auch denkbar, dass in einem physikalischen Prozess rechts- und linkshändiger Schraubensinn gleichzeitig mit verschiedenem Grad auftreten. Dann ist die Asymmetrie nicht mehr so scharf ausgeprägt (Fig. 10.46). - Ist die Winkelverteilung symmetrisch, so treten links- und rechtspolarisierte Elektronen in gleicher Menge auf. Dann sind links- und rechtshändiger Drehsinn physikalisch gleichberechtigt. Die Parität ist in diesem Fall erhalten. - Ob die Parität verletzt ist oder nicht oder bis zu welchem Grade, lässt sich experimentell durch solche Asymmetrien nachprüfen.

Bei maximaler Paritätsverletzung ist $C_i = C_i'$;

bei teilweiser Paritätsverletzung ist $C_i \neq C_i' \neq 0$;

bei Paritätserhaltung ist $C_i = 0$ oder $C_i' = 0$.

Die Experimente ergeben, dass die Parität maximal verletzt ist. Mit der gegenwärtigen Messgenauigkeit ist $C_i = C_i'$.

10.10.4 Paritätsempfindliche Messgrössen

Es soll im Folgenden gezeigt werden, welche physikalischen Grössen beim β -Zerfall unabhängig von Paritätsfragen sind und in der bisherigen Darstellung unangetastet bleiben, und welche paritätsempfindlich sind.

Im Experiment werden nur Intensitäten gemessen; diese aber können nur skalare oder pseudoskalare Grössen sein. Also müssen zum Nachweis der Erhaltung oder Nichterhaltung der Parität pseudoskalare Intensitätsgrössen gemessen werden. Treten solche pseudoskalaren Grössen auf, so ist dies als ein Beweis für die Verletzung der Parität anzusehen.

Wie können nun pseudoskalare, für die Messung geeignete Grössen aus Vektoren zusammengesetzt werden? Zunächst die Eigenschaften der Vektoren selbst: POLARVEKTOREN wechseln ihr Vorzeichen bei Raumspiegelung, beispielsweise der Ortsvektor $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ oder der Impulsvektor $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. Ein ACHSIALVEKTOR indessen behält sein Vorzeichen bei, wie sich beispielsweise am Drehimpulsvektor leicht sehen lässt: $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [-\vec{r} \times -\vec{p}]$.

Die Produkte zwischen Achsialvektoren oder zwischen zwei Polarvektoren sind reine Skalare. - Das Produkt aus einem Achsialvektor und einem Polarvektor ist ein Pseudoskalar, im einfachsten Fall also das Produkt aus einem Spin und einem Impuls $(\vec{I}.\vec{p}.)$. Es lassen sich mit einer grösseren Zahl von Faktoren beliebig viele solcher Produkte bilden, beispielsweise bei drei Faktoren $\vec{p}_1 [\vec{p}_2 \times \vec{p}_3]$. Man wird sich aber aus experimentellen Gründen auf Korrelationen zwischen möglichst wenigen Grössen beschränken. -

Es ist noch zu betonen, dass die Existenz von Pseudoskalaren eine zwar notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für das Zutagetreten der Paritätsverletzung ist. Denn ein solches Produkt kann auch aus anderen Gründen null sein. Beispielsweise ist die Korrelation $\vec{p}_e [\vec{p}_\nu \times \vec{p}_R]$ zwischen den Emissionsrichtungen von Elektron, Neutrino und Rückstosskern ein Pseudoskalar, aber vom Betrage null, weil die drei Vektoren komplanar sind. -

Damit lässt sich folgende Bestandaufnahme machen. Von der Paritätserhaltung unabhängige Grössen sind:

(a) die Form des Energiespektrums,

(b) alle Grössen über Zerfallswahrscheinlichkeiten, wie ft-Werte, β^+/β^--Verzweigungsverhältnisse, doppelter β-Zerfall etc.

(c) die Elektron-Neutrino-Winkelkorrelation.

Paritätsempfindliche Grössen (Pseudoskalare) sind Korrelationen von der Form $(\vec{I}.\vec{p})$. Als $\vec{I}$ stehen der Spin des Kerns, des Elektrons, des Neutrinos und beteiligter γ -Strahlung, als Impulse die des Elektrons, des Neutrinos (bzw. des Rückstosskerns) und der beteiligten γ -Strahlung zur Verfügung.

Zwischen diesen Spins und Impulsen lassen sich verschiedene Kombinationen bilden. Die Winkelverteilung der γ -Strahlung ist allerdings symmetrisch; bei elektromagnetischen Wechselwirkungen ist die Parität nicht verletzt. Dennoch kann die Polarisation der γ -Strahlung als Hilfsmittel für die Orientierungsbestimmung des Kernspins dienen. Unter Einbeziehung dieses Hilfsmittels sind die Paritätsexperimente im Wesent-

lichen auf die Messung der asymmetrischen Winkelverteilung der β -Teilchen gegenüber dem Kernspin oder ihrem eigenen Spin (Elektronenpolarisation) eingerichtet. Die markantesten werden im Folgenden dargestellt. Mit ihnen wurde überzeugend die Paritätsverletzung nachgewiesen. In allen Fällen zeigte sich, dass die Parität maximal verletzt ist.

10.11 Experimente zur Paritätsverletzung

10.11.1 Experiment von Wu et al. ($p_e \cdot I$-Korrelation)

Die Paritätsverletzung wurde zuerst experimentell von Wu et al. durch die "Nord-Süd"-Asymmetrie der β -Emission an ausgerichteten Kernen nachgewiesen.

Für die Auswahl eines geeigneten Kernes waren bezüglich reiner F-, reiner GT- oder gemischter Wechselwirkung folgende Gesichtspunkte ausschlaggebend: Reine F-Wechselwirkung existiert bei einfach verbotenen Übergängen $0 \rightarrow 0$; diese Kerne besitzen jedoch gar keine innere Vorzugsrichtung, sind also grundsätzlich nicht geeignet. Bei gemischten Übergängen lassen sich die Kerne zwar ausrichten, aber der Ausdruck für den Asymmetriekoeffizienten ist kompliziert, so dass einerseits eine quantitative Analyse daraus mancherlei Schwierigkeiten bietet und andererseits die Asymmetrie durch Kopplung beider Wechselwirkungen sogar verschwinden kann. Einfach und übersichtlich sind die Verhältnisse nur bei reinen GT-Übergängen, d.h. ein erlaubter Übergang $\Delta I = 1, \Delta\pi = no$ ist am geeignetsten; als solcher wurde der β^--Zerfall $Co^{60} \rightarrow Ni^{60}$, gewählt (Fig. 10.47).

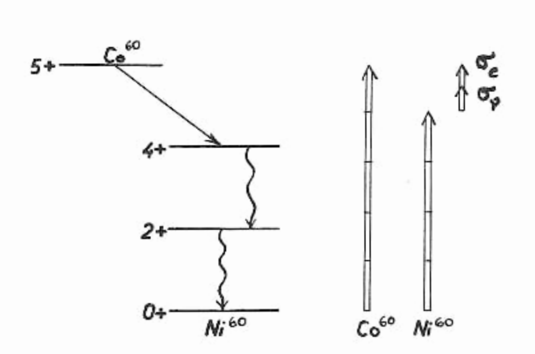


Fig. 10.47

Diese Spinänderung wird allein durch die Spins von Elektron und Antineutrino fortgetragen, die bei GT-Wechselwirkung parallel zueinander und hier gleichzeitig parallel zum Spin des Co^{60}-Kernes sein müssen. Besteht eine asymmetrische Zuordnung zwischen dem Impuls der Leptonen und diesen Spins, so ist eine "Nord-Süd"-Asymmetrie ihrer Winkelverteilung die Folge, über deren Vorzeichen allerdings die Theorie keine Voraussagen machen kann. Das Experiment entschied, dass die Elektronen bevorzugt entgegengesetzt zum Kernspin des Co^{60} emittiert werden (Fig. 10.48).

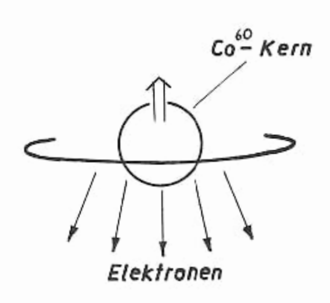


Fig. 10.48

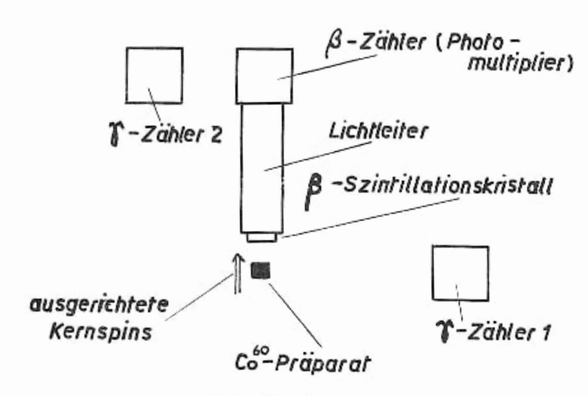


Fig. 10.49

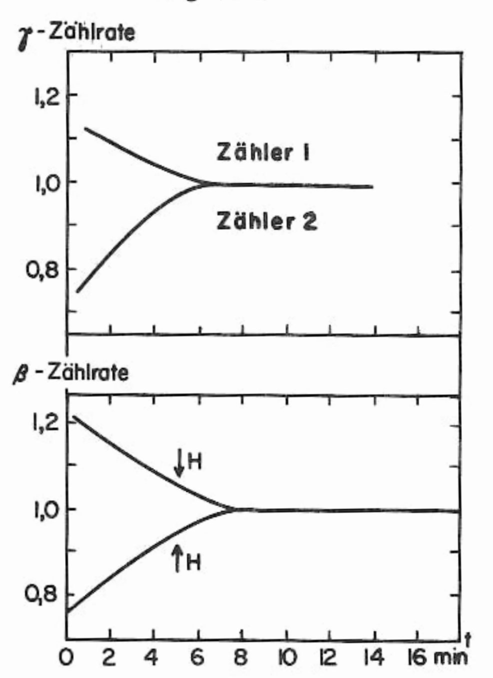


Fig. 10.50

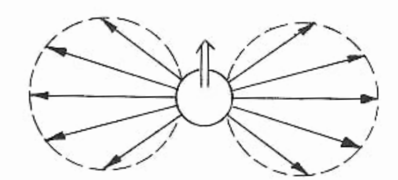


Fig. 10. 51

Wu et al. benutzten folgende prinzipielle Messanordnung (Fig. 10.49). Der β-Zähler ist in Richtung der Polarisationsachse der Co^{60}-Kerne aufgebaut. Da die Ausrichtung der Kerne bei tiefen Temperaturen durch ein starkes Magnetfeld erzeugt wird, muss der Photomultiplier ausserhalb des Bereiches aufgestellt werden, indem er durch das Magnetfeld gestört würde. Das ist deshalb von Bedeutung, weil die "Nord-Süd"-Asymmetrie aus der Änderung der β-Zählrate bei Umkehrung des Magnetfeldes, das die Ausrichtung der Kerne verursacht, bestimmt wird; nach der Feldumkehr weisen die Kernspins nach unten. Der β-Szintillationskristall muss möglichst nahe am Präparat sein; infolgedessen wird er mit dem Photomultiplier durch einen Lichtleiter verbunden.

Die Ausrichtung der Kerne wird durch zwei γ-Zähler kontrolliert, die die Anisotropie der nachfolgenden γ-Strahlung in der Äquatorebene (Zähler 1) und in Polnähe (Zähler 2) messen. In der langsam sich erwärmenden Probe nimmt die Ausrichtung der Kerne ab; das zeigt sich an einer Abnahme der γ-Anisotropie (Fig. 10.50) . Es zeigt sich, dass die β-Asymmetrie synchron dazu abnimmt. Es ist noch zu bemerken, dass die γ-Strahlung zwar anisotrop aber nicht asymmetrisch ist (Fig. 10.51).

10.11.2 Longitudinale Elektronenpolarisation ($p_e \cdot \sigma_e$-Korrelation)

Aus der Asymmetrie der β-Emission folgt unmittelbar, dass die emittierten Elektronen bevorzugt longitudinal polarisiert sind. Der Spin der Elektronen ist parallel zum Spin des Co^{60}-Kernes, die bevorzugte Emissionsrichtung aber antiparallel dazu; also haben die Elektronen Linksdrall.

Entsprechend haben Positronen aus β^+-Zerfällen Rechtsdrall.

Ähnlich wie bei der Elektron-Neutrino-Winkelkorrelation (10.111) ist auch der Grad der longitudinalen Elektronenpolarisation durch den maximalen Wert $\frac{v}{c}$ gegeben, wenn die Paritätsverletzung maximal ist.

Die Polarisation der Elektronen und Positronen lässt sich durch folgende Methoden nachweisen; alle Experimente zeigen maximale Paritätsverletzung.

a) Mott-Streuung

Bei der Streuung von transversal polarisierten Elektronen im Coulomb-Feld eines Kernes treten Kräfte auf, die von der Spin-Bahn-Kopplung abhängig sind. Ist der Spin σ des Elektrons zu seinem Bahndrehimpuls ℓ bezüglich des streuenden Kernes antiparallel, so wirkt diese Kopplung abstossend, sind σ und ℓ parallel, so wirkt sie anziehend.

Das lässt sich auf folgende Weise leicht einsehen: σ und ℓ seien antiparallel (Fig. 10.52). Einem Beobachter im Ruhesystem des Elektrons erscheint die Relativbewegung des Kernes als ein Kreisstrom der Ladung +Ze, dem ein magnetisches Moment μ_ℓ parallel zu ℓ äquivalent ist (Fig. 10.53). Da Spin und magnetisches Moment des Elektrons einander entgegengesetzt sind, weisen μ_ℓ und μ_e in dieselbe Richtung, d.h. die Spin-Bahn-Kopplung wirkt abstossend; ist andererseits σ parallel zu ℓ, dann ist μ_e entgegengesetzt zu μ_ℓ und die Kopplung wirkt anziehend. Der Effekt ist um so stärker, je grösser Z ist.

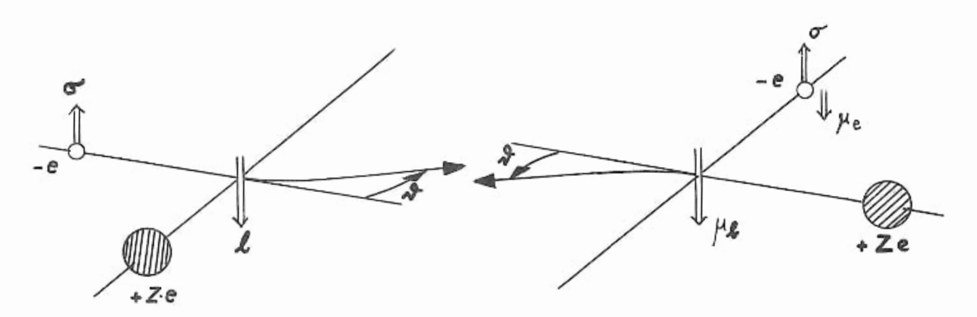


Fig. 10.52 Fig. 10.53

Werden transversal polarisierte Elektronen an schweren Kernen in einer Folie gestreut, so ist die Winkelverteilung der gestreuten Elektronen asymmetrisch bezüglich $+\vartheta$ und $-\vartheta$ (Fig. 10.54).

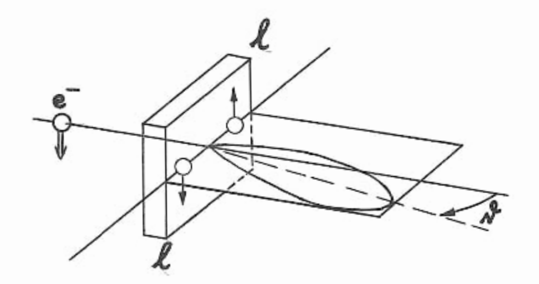


Fig. 10. 54

Die beim β-Zerfall emittierten Elektronen sind jedoch longitudinal polarisiert; man muss sie also vorher transversal machen.

Das lässt sich, wie es Frauenfelder et al. getan haben, durch Umlenken in einem elektrischen Feld erreichen (Fig. 10.55); das elektrische Feld ändert in erster Näherung nur die Richtung des Impulses aber nicht die des Spins.

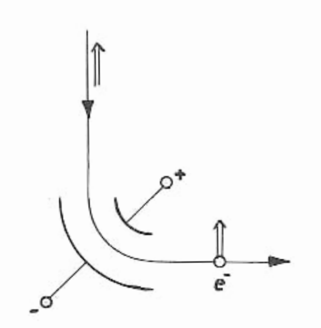


Fig. 10.55

Eine andere Methode wurde von de-Shalit et al. ausgearbeitet (Fig. 10.56). Die aus der Quelle emittierten β-Teilchen werden zunächst an leichten Kernen (Aluminiumfolie, als Thaleskreis angeordnet) seitlich gestreut. Die dann zu der Goldfolie gelangenden Elektronen sind bevorzugt transversal polarisiert. Ihre Asymmetrie durch Mott-Streuung an den Kernen in der Goldfolie wird mit den beiden Zählern Z_1 und Z_2 gemessen.

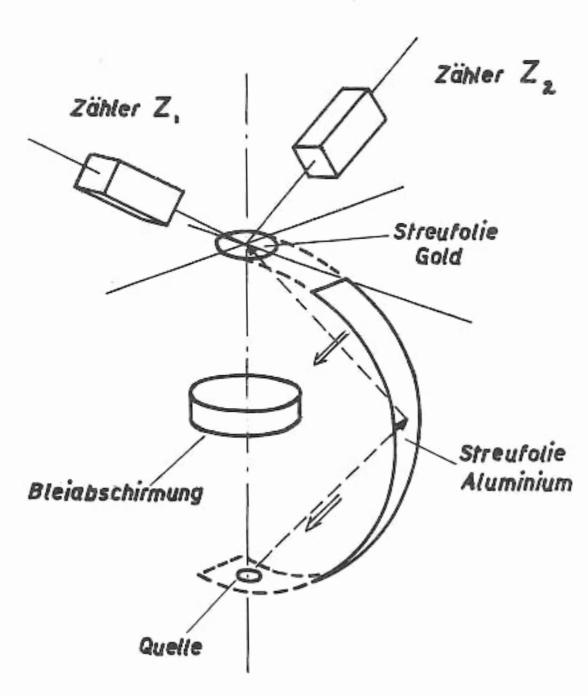


Fig. 10.56

b) Møller-Streuung

Die Streuung relativistischer Elektronen an ausgerichteten Elektronen ist von der gegenseitigen Spinorientierung abhängig; sie ist stärker bei antiparalleler Stellung der Spins als bei paralleler. Der Effekt der Spinabhängigkeit ist am stärksten, wenn beide Elektronen nach dem Stoss gleiche Energie besitzen.

Zum Nachweis der Elektronenpolarisation beim β-Zerfall haben Frauenfelder et al. die Møller-Streuung in folgender Anordnung benutzt. Die Streuung findet an ausgerichteten Elektronen in einer magnetisierten Eisenfolie statt (Elektronenpolarisation im Eisen $\approx$ 8%). Am günstigsten wäre es, die Elektronen in der Folie in der Einfallsrichtung zu polarisieren. Da sich Folien jedoch nur längs ihrer eigenen Ebene magnetisieren lassen, wird die Streufolie schräg zur Strahlrichtung gestellt (Fig. 10.57). - Da die Streuung an Kernen (Rutherford-Streuung) viel häufiger ist als an Elektronen, müssen gestreutes Elektron und Rückstosselektron durch Koinzidenzen und Energiediskriminierung ausgewählt werden. Die Polarisation der einfallenden Elektronen wird aus der Änderung der Koinzidenzrate bei Ummagnetisieren der Eisenfolie bestimmt.

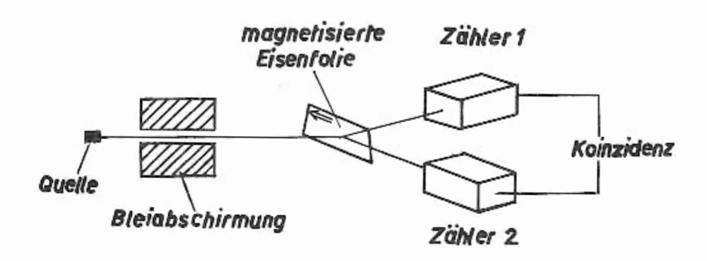


Fig. 10.57

c) Zirkular polarisierte Bremsstrahlung

Die Bremsstrahlung schneller Elektronen mit longitudinal ausgerichtetem Spin ist zirkular polarisiert, und zwar im gleichen Drehsinn wie der Spin des Elektrons. In ähnlicher Weise ist auch die Annihilationsstrahlung schneller Positronen mit longitudinal ausgerichtetem Spin zirkular polarisiert.

Wenn man in der Lage ist, die zirkulare Polarisation dieser γ-Quanten zu messen, so lässt sich dadurch die longitudinale Polarisation der beim β-Zerfall emittierten Elektronen und Positronen bestimmen.

Die zirkulare γ-Polarisation lässt sich durch Streuung an ausgerichteten Elektronen, beispielsweise in magnetisiertem Eisen, bestimmen, da der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung von Spin- und Polarisationsrichtung abhängig ist. Anschaulich lässt sich dieser Effekt bei der Streuung, wie folgt beschreiben: Treffen Spin vom γ-Quant und vom Elektron antiparallel aufeinander, so kann das γ-Quant durch die zusätzliche Möglichkeit, den Spin des Elektrons umzuklappen, leichter Energie

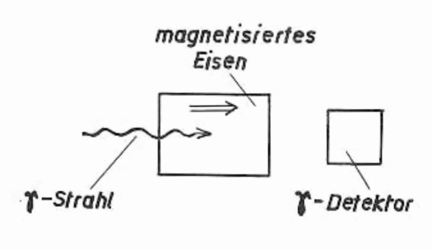


Fig. 10. 58

abgeben, also ist die Streuung in diesem Fall stärker als wenn die Spins ursprünglich parallel zueinander stehen. Dann durchdringen die γ -Quanten das Eisen leichter ohne Streuung, wenn ihr Spin zu dem der Elektronen parallel ist, d.h. der Transmissionsgrad des Eisens ändert sich bei Umkehren der Magnetisierung, wenn die γ -Quanten zirkular polarisiert sind (Fig. 10. 58). -

Für den Nachweis der longitudinalen Polarisation an Positronen bietet die Ausnutzung der Annihilationsstrahlung noch einige weitere Messmethoden. Je nachdem, ob die Annihilation aus dem Singulett- oder Triplettzustand des Elektron-Positron-Paares stattfindet, ergeben sich dabei unterschiedliche Koinzidenzraten bei Messung unter 180°.

10.11.3 β γ -Korrelationen (Zirkularpolarisation)

Die Paritätsuntersuchungen an ausgerichteten Kernen wie beispielsweise beim Wu-Experiment sind stets mit grossen experimentellen Schwierigkeiten verbunden, weil tiefe Temperaturen, Magnetfelder und Lichtleiteranordnungen erforderlich sind. Dieser Aufwand lässt sich jedoch vermeiden, indem man die Richtung des betreffenden Kernes, dessen β -Teilchen man registriert, durch die zirkulare Polarisation der nachfolgenden γ -Strahlung identifiziert.

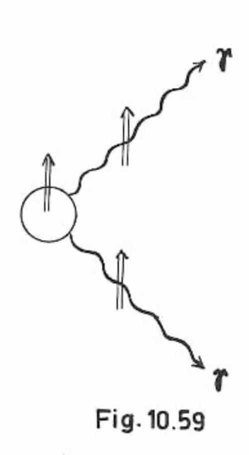


Fig. 10.59

Dass die γ -Strahlung, die nicht in Richtung des "Äquators" emittiert wird, teilweise zirkular polarisiert ist, lässt sich anhand von Fig. 10. 59 leicht einsehen. Wenn der Spin, der durch das γ -Quant fortgetragen wird, eine eindeutige Zuordnung zu dem Kernspin besitzt, dann ist nach Fig. 10. 59 das γ -Quant teilweise rechtspolarisiert, wenn es in die obere Hemisphäre gerichtet ist und linkspolarisiert, wenn in die untere Hemisphäre. Damit die Zuordnung der Spins eindeutig ist, muss

$$|I_i - I_f| = I_\gamma = I_i + I_f \quad (10.122)$$

sein, was verlangt dass entweder I_i oder I_f null ist.

Misst man also die Zirkularpolarisation solcher γ -Übergänge in Koinzidenz mit dem zuvor emittierten β -Teilchen, so lässt sich bei der Ausmessung der Winkelverteilung zwischen diesen β und γ dieselbe "Nord-Süd"-Asymmetrie wie im Wu-Experiment bestimmen.

Es sind zahlreiche verschiedene Experimente dieser Art ausgeführt worden. Eine Anordnung nach Boehm und Wapstra zeigt Fig. 10.60. Die Polarisation der γ -Strahlung an der diese "Nord-Süd"-Asymmetrie auftritt, wird wieder durch Compton-Streuung und Änderung der Koinzidenzrate bei Umkehren des Magnetfeldes bestimmt.

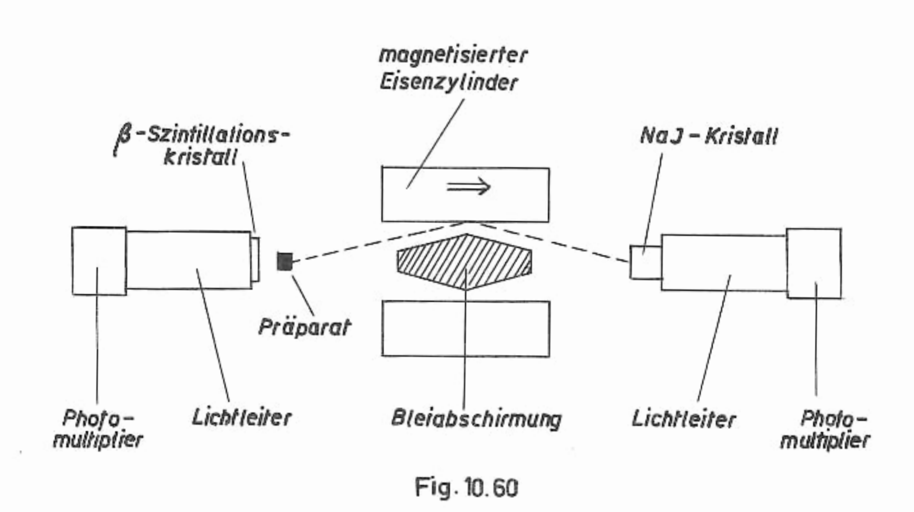


Fig. 10.60

10.11.4 Neutrinopolarisation

Durch die obigen Experimente liessen sich nur Emissions- und Polarisationsrichtung der Elektronen und Positronen messen. Um die Polarisation der Neutrinos zu bestimmen, kann man folgende Korrelationen zusammenfügen:

$$
\begin{array}{ccc}
(p_e\,\sigma_e) & \longrightarrow & (\sigma_e\,\sigma_\nu) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(p_e\,p_\nu) & \longrightarrow & (p_\nu\,\sigma_\nu)
\end{array}
$$

Die Elektronen sind longitudinal, und zwar links polarisiert $(p_e\,\sigma_e)$; die Spins von Elektron und Neutrinos sind gemäss den Auswahlregeln für F- oder GT-Wechselwirkungen miteinander gekoppelt ($\sigma_e\;\sigma_\nu$); fügt man die Winkelkorrelation $(p_e p_\nu)$ aus Rückstossexperimenten hinzu, dann lassen sich p_ν und σ_ν einander zuordnen. - Um die Neutrinopolarisation zu bestimmen, sind also die obigen Paritätsexperimente im Wesentlichen durch Rückstossexperimente zu ergänzen.

Für die einzelnen Wechselwirkungsarten ergeben sich dabei im Detail folgende Zuordnungen (Fig. 10.61). Bei F-Kopplung (S, V) sind die Spins von e^- und ν^- entgegengesetzt, bei GT-Kopplung (T, A) parallel. Das Elektron besitzt stets Linksdrall. Gemäss der Elektron-Neutrino-Winkelkorrelation (10.111) werden e^- und ν^- bei S und T in dieselbe Richtung emittiert,

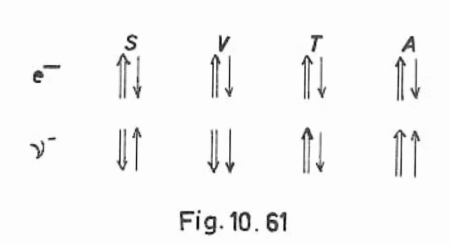


Fig. 10.61

bei V und A entgegengesetzt zueinander. Dann zeigt sich, dass die ν^- bei ST-Kopplung linkshändig und bei VA-Kopplung rechtshändig sind.

Da die Winkelkorrelationsexperimente zugunsten der VA-Kopplung entschieden haben, ist für Antineutrinos ν^- auf einen Rechtsdrall zu schliessen. - Entsprechend ergibt sich für Neutrinos ν^+ ein Linksdrall, da die Polarisation der Positronen entgegengesetzt zu der der Elektronen ist und alle anderen Beziehungen unverändert bleiben.

a) Experiment von Goldhaber et al.

Die Polarisation des Neutrinos liess sich durch ein Experiment von Goldhaber et al. sehr elegant bestimmen. Es handelt sich dabei um eine Art modernen Rückstossexperiments, das in Anbetracht der Schwierigkeiten bei früheren Rückstossexperimenten sehr willkommen ist. Anstatt die langsamen Rückstosskerne in Detektoren aufzufangen, gelingt es, ihre Bewegungsrichtung aus der nachfolgenden γ-Strahlung zu bestimmen, und zwar durch einfache Messung der Zirkularpolarisation dieser γ-Strahlung. -

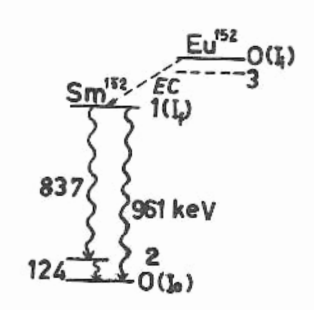


Fig. 10.62

Das Experiment wurde mit einem Isomer von Eu^{152} ausgeführt, das durch reine GT-Wechselwirkung unter K-Einfang in Sm^{152} zerfällt (Fig. 10.62). Der Drehimpuls, der sich vor dem Zerfall aus dem Spin $\frac{1}{2}$ des Elektrons, das eingefangen wird, und $I_i = 0$ zusammensetzt, muss sich nach dem Zerfall aus dem Spin $\frac{1}{2}$ des Neutrinos und $I_f = 1$ ebenfalls zu $\frac{1}{2}$ addieren. Wie aus Fig. 10.63 ersichtlich, ist demzufolge der Spin des Neutrinos zu dem des Rückstosskernes entgegengesetzt. Ebenso die Impulse.

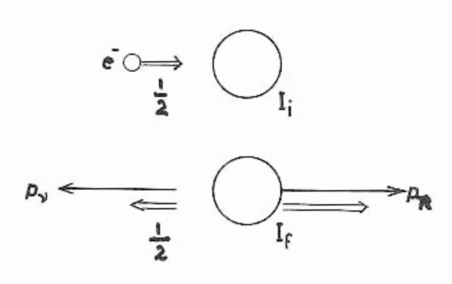


Fig. 10.63

Diese antiparallelen Spins und antiparallelen Impulse von Neutrino und Rückstosskern lassen sich auf zweierlei Weise zuordnen (Fig. 10.64): Ist das Neutrino rechtspolarisiert, dann sind auch beim Rückstosskern Spin und Impuls gleichgerichtet; dieser Fall entspricht tensorieller Wechselwirkung. Ist das Neutrino hingegen linkspolarisiert, dann sind Spin und Impuls beim Rückstosskern entgegengesetzt; dieser Fall entspricht achsialvektorieller Kopplung.

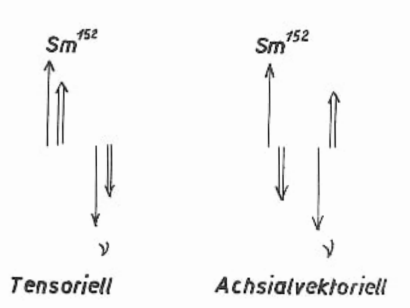


Fig. 10.64

Bei dem Zerfall von I_f nach I_o wird der Spin 1, den der Kern unmittelbar nach dem β-Zerfall besitzt, von dem γ-Quant fortgetragen. Wird das γ-Quant in Richtung des Rückstosskernimpulses, also nach "vorwärts" emittiert, dann ist er bei T-Kopplung rechtspolarisiert bzw. bei A-Kopplung linkspolarisiert (Fig. 10.65).

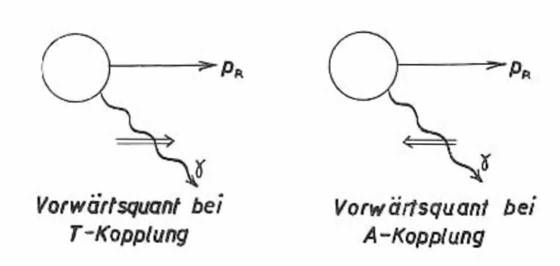


Fig. 10.65

Um die Neutrinohelizität zu bestimmen, was hierbei gleichbedeutend mit der Entscheidung zwischen T- oder A-Kopplung ist, muss man experimentell erstens die vorwärts von den rückwärts emittierten γ-Quanten unterscheiden und zweitens, beispielsweise bei den vorwärts emittierten, die Zirkularpolarisation bestimmen.

Das erste dieser beiden Probleme lässt sich mit Hilfe der Kernresonanzstreuung lösen: Treffen die emittierten γ-Quanten auf ein Target aus Sm^{152} (Fig. 10.66), so können sie nur dann Resonanzstreuung erleiden, wenn ihre Energie sehr genau mit der Resonanzenergie übereinstimmt, die zur Anregung des Kernes von I_o auf I_f erforderlich ist; dabei wird das γ-Quant vom Targetkern absorbiert und wieder emittiert, so dass in der resonanzgestreuten Strahlung neben der 961-keV-Linie auch die 837-keV-Linie auftritt. -

Nun ist die Energie des emittierten γ-Quants durch den Rückstoss, den der Kern dabei aufnimmt, etwas kleiner als die Resonanzenergie; ebenso wäre es auch bei idealer Resonanzabsorption nötig, dass das γ-Quant eine etwas grössere Energie besitzt, da ein Teil dessen vom Targetkern als Rückstoss aufgenommen wird. Die Vorwärtsquanten sind nun etwas energiereicher als die Rückwärtsquanten; bei ihnen ist gerade dieses Defizit grössenordnungsmässig kompensiert. Die Kernresonanzstreuung wird also überwiegend von Vorwärtsquanten verursacht. Die Impulsrichtung der Rückstosskerne lässt sich auf diese Weise identifizieren, ohne dass es nötig wäre, sie selbst in einem Detektor aufzufangen.

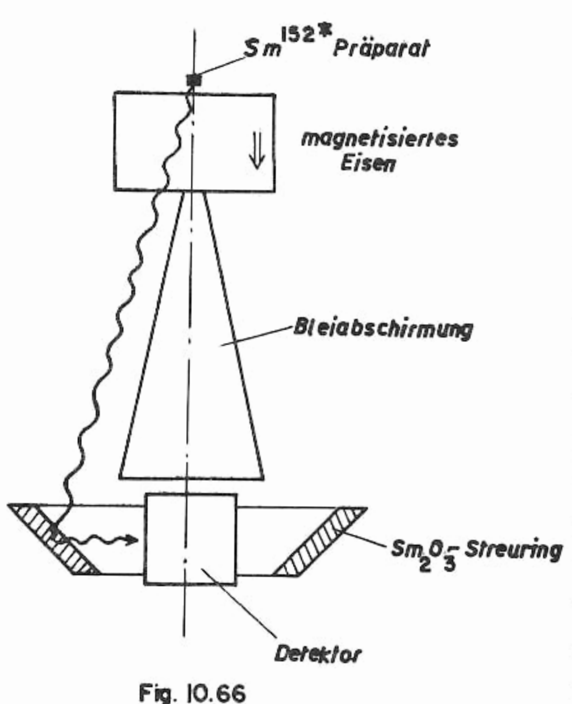


Fig. 10.66

Das zweite Problem, die Bestimmung der Polarisationsrichtung dieser Vorwärtsquanten wird wieder durch Compton-Streuung in magnetisiertem Eisen gelöst (Fig. 10.66). Das Experiment ergab, dass die Vorwärtsquanten linkspolarisiert sind, dass also A-Kopplung besteht. Demzufolge besitzt das Neutrino ν^+ Linkshelizität.

10.12 Unterscheidung Neutrino-Antineutrino

Der β -Zerfall wurde als gleichzeitige Wechselwirkung der vier Fermionen

(pn) (e ν)

behandelt. Dabei wurden, was die Leptonen anbelangt, in den inversen Prozessen e und ν durch ihre "Antiteilchen" ersetzt. *) Es lag nahe, das ν ebenso wie das e als normales Dirac-Teilchen zu behandeln.

Gemäss der Diracschen Theorie unterscheiden sich Teilchen und Antiteilchen dadurch, dass sich das DIRAC-TEILCHEN in Zuständen positiver oder negativer Energie befinden kann. Die Antiteilchen können dabei modellmässig als Löcher aufgefasst werden. Teilchen und Antiteilchen erscheinen dann als "ladungskonjugiert". Bei Verallgemeinerung des Begriffes Ladung lässt sich diese Ladungskonjugation innerhalb der Diracschen Theorie zwanglos auch auf elektrisch neutrale Teilchen anwenden.

Dadurch dass das ν weder Masse noch elektrische Ladung besitzt, ist es allerdings schwierig, einen physikalisch evidenten Unterschied zwischen Teilchen und Antiteilchen zu erkennen. Dann hat man die Freiheit, die beiden ladungskonjugierten Zustände als identisch zu erklären: $\nu^- \equiv \nu^+$. Teilchen dieser Art werden als MAJORANA-TEILCHEN bezeichnet und besitzen nur Zustände positiver Energie. -

Teilchen und Antiteilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ haben je zwei mögliche Zustände. Demzufolge besitzt das Dirac-Teilchen insgesamt vier mögliche und das Majorana-Teilchen zwei mögliche Zustände. Ihr wesentlicher Unterschied liegt in der Existenz oder Nichtexistenz eines Antiteilchens.

Der doppelte β -Zerfall und die Experimente von Reines und Cowan sowie von Davis über den ν -Einfang zeigen, dass sich ν^- und ν^+ verschieden verhalten. Damit schien zugunsten der Dirac-Theorie und gegen die Majorana-Theorie entschieden zu sein.

Infolge der maximalen Paritätsverletzung erscheint diese Frage jedoch in ganz anderem Licht. Gemäss experimentellem Befund unterscheiden sich ν^- und ν^+ dadurch, dass ihr Spin parallel oder antiparallel zum Impuls ausgerichtet ist. Die Nichtexistenz des neutrinolosen doppelten β -Zerfalls und das Ausbleiben der Reaktion im Davis-Experiment lässt sich dann einfach darauf zurückführen, dass nur ein ν mit dem "richtigen" Drehsinn wieder absorbiert werden kann und dass in diesen Fällen das ν den "falschen" Drehsinn hat. Dann ist die Majorana-Theorie insofern vorzuziehen, weil sie im Gegensatz zur Dirac-Theorie nur die zwei erforderlichen Zustände ergibt. ν^- und ν^+ unterscheiden sich dann einfach durch diese beiden Spinzustände des Teilchens.

Indessen ist die Alternative zwischen Dirac- und Majorana-Theorie nicht so einfach, wenn man das Prinzip der Leptonenerhaltung in Betracht zieht: Die Emission von e^-, ν^- kann als Absorption eines ν^+ und Emission eines e^- aufgefasst werden; entsprechend die Emission von e^+, ν^+ als Absorption eines ν^- und Emission eines e^+.

---

*) Aus weiter unten ersichtlichen Gründen wird hier die Bezeichnung Neutrino oder Antineutrino bewusst vermieden; statt dessen wird die Unterscheidung durch ν^-, ν^+ gekennzeichnet.

Charakteristisch ist dabei, dass ein Lepton vernichtet und durch ein anderes ersetzt wird:

$$\nu^{+} \longrightarrow e^{-} \qquad (10.123)$$

$$\nu^{-} \longrightarrow e^{+}. \qquad (10.124)$$

Bei der bisherigen Behandlung des β-Zerfalls wurde also die Erhaltung der Leptonen stillschweigend vorausgesetzt.

Die leptonenerhaltenden Beziehungen (10.123) und (10.124) seien nun bezüglich ihres Teilchen-Antiteilchen-Charakters verglichen: e^{-} und e^{+} stellen zwar je ein "Teilchen" dar, die aber durch Annihilation gemeinsam verschwinden können. Man kann infolgedessen formal dem Elektron die Quantenzahl +1 und dem Positron die Quantenzahl -1 zuordnen; diese beschreibt dann die Teilchenerhaltung. Hält man auf dieser Basis an dem Prinzip der LEPTONENERHALTUNG für (10.123) und (10.124) einzeln fest, so müssen ν^{+} und e^{-} gemeinsam -1, ebenso ν^{-} und e^{+} gemeinsam +1, also ν^{+} und ν^{-} entgegengesetzte Quantenzahlen zugeordnet werden. Bei Leptonenerhaltung sind also ν^{+} und ν^{-} Dirac-Teilchen.

Ist hingegen $\nu^{-} \equiv \nu^{+}$, dann treten sie nach Belieben in beiden Prozessen auf ohne Rücksicht auf diese Quantenzahl. Die Majorana-Theorie bedeutet also maximale Verletzung der Leptonenerhaltung.

Es ist im Prinzip denkbar, dass die Leptonenerhaltung nur teilweise verletzt ist; insofern sind Dirac- und Majorana-Theorie nur die zwei möglichen Extremfälle. Welcher Fall dann vorliegt, ist nur durch das Experiment zu entscheiden.

Es zeigt sich nun, dass sich die Wechselwirkungen in der β-Theorie ohne Schwierigkeit für den Fall der Leptonen-Nichterhaltung umformulieren lassen. Physikalisch ergeben sich dabei an einstufigen β-Prozessen keine neuen Aussagen, und zwar sowohl für paritätsunabhängige als für paritätsempfindliche Grössen. Bei zweistufigen β-Prozessen hingegen treten Grössen auf, die gegen Leptonen-Nichterhaltung empfindlich sind. Der neutrinolose doppelte β-Zerfall und das Davis-Experiment ergeben allerdings insofern nichts Neues, weil diese Prozesse allein wegen des "falschen" Dralls nicht auftreten. Nur beim ν-Einfang mit "richtigem" Drall ergibt sich folgende Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes vom Grad der Leptonen-Nichterhaltung (Fig. 10.67). Die Bestimmung des absoluten Wirkungsquerschnittes im Experiment von Reines und Cowan müsste also wesentlich erhöht werden. Aber selbst dann könnte man nur eine zweideutige Aussage gewinnen. Zwischen den beiden Extremfällen kann beispielsweise hiermit nicht unterschieden werden.

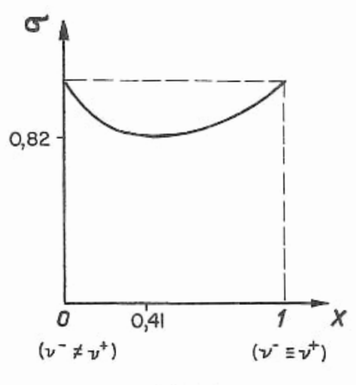


Fig. 10.67

Nun noch eine Bemerkung zur 2-Komponenten-Theorie. Sie folgt unmittelbar aus der Weyl-Gleichung (Anh. C.4). Sie ergibt für das Teil-

chen insgesamt zwei Zustände, die durch parallele und antiparallele Orientierung des Spins zum Impuls charakterisiert sind. Die Unterscheidung nach Teilchen-Antiteilchen ist hier gegenstandslos. Die Weyl-Gleichung setzt maximale Paritätsverletzung voraus und beschreibt entsprechend unserer gegenwärtigen Kenntnis alle β -Prozesse zufriedenstellend und auf eine sehr einfache Weise. Ihr zufolge rührt die Paritätsverletzung von der Natur des Neutrinos her. Indessen hat sich herausgestellt, dass die Paritätsverletzung unabhängig von der 2-Komponententheorie ist, wenn die Leptonenerhaltung verletzt ist. Ausserdem enthält sie nicht den paritätsverletzenden Zerfall des K-Mesons, weil dort kein Neutrino beteiligt ist.

Sie kann also nicht als "natürliche" Erklärung der Paritätsverletzung, wie es anfangs schien, dennoch aber als eine einfache und nützliche Formulierung der bisherigen Befunde angesehen werden.

10.13 Invarianz bei Zeitumkehr

Die Frage, ob die Invarianz bei Zeitumkehr erfüllt ist, lässt sich mit Hilfe skalarer Messgrössen prüfen, die bei Zeitumkehr das Vorzeichen wechseln eindeutigkeitshalber aber von Raumspiegelung unabhängig sind.

Auf welche Weise eine solche Messgrösse zusammenzusetzen ist, lässt sich ganz analog zu den obigen Überlegungen finden. Zunächst die Vektoren: Sowohl Impuls- als auch Drehimpulsvektor wechseln bei Zeitumkehr ihr Vorzeichen. Aus ihnen lässt sich also kein zeitumkehr-empfindliches Zweierprodukt bilden; erst das Produkt zwischen drei solchen Vektoren liefert zeitumkehr-empfindliche Grössen. Unter Ausschluss paritätsungerader Grössen gibt es dabei nur die zwei Möglichkeiten:

$$\vec{I}_1 \cdot [\vec{I}_2 \times \vec{I}_3] \qquad \text{oder} \qquad \vec{I}\,[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2] .$$

Die erste davon scheidet hier aus, weil die Drehimpulse bereits unabhängig davon untereinander gekoppelt sind. Es bleibt nur das zweite Spatprodukt, wobei es gleichgültig ist, in welcher Form die drei Vektoren multipliziert werden, um einen Skalar zu ergeben. Sie dürfen nur nicht komplanar sein.

Durch Einsetzen verschiedener Impulsvektoren und Spins ergeben sich auch hier mehrere Kombinationsmöglichkeiten für Experimente. Im Folgenden wird ein solches für die $\beta\gamma$-Korrelation an ausgerichteten Kernen und etwas später an dem Zerfall polarisierter Neutronen beschrieben. Die Experimente bestätigen die Invarianz bei Zeitumkehr.

Dann sind also im Zusammenhang mit dem PCT-Theorem nur die Parität und die Ladungskonjugation verletzt, und zwar beide maximal. Das kommt darin zum Ausdruck, dass bei den Leptonen Teilchen und Antiteilchen, wie die Experimente zeigen, mit entgegengesetzter Polarisation emittiert werden. Die Naturgesetze sind also in einer gespiegelten Antiwelt die gleichen, aber nicht in einer gespiegelten Welt oder in einer Welt aus Antiteilchen.

10.13.1 $\beta\gamma$-Korrelation an ausgerichteten Kernen

Ob die Kopplungskonstanten reell oder komplex sind, ist bei Beteiligung einer einzigen Wechselwirkung irrelevant. Diese Frage kann also nur sinnvoll gestellt werden, wenn mehrere Wechselwirkungen gleichzeitig teilnehmen. Unter der Annahme, dass beim β-Zerfall nur V- und A-Kopplung existieren, was durch andere Experimente gerechtfertigt ist, kann die Frage nach der Invarianz bei Zeitumkehr nur an Übergängen mit gemischter F- und GT-Kopplung, also bei erlaubten Übergängen an solchen mit $\Delta I = 0$ geprüft werden.

Unter der Annahme, dass die Parität verletzt ist und infolgedessen die Leptonen longitudinal polarisiert emittiert werden, ergeben sich dabei folgende Verhältnisse:

Bei F-Kopplung setzt sich der Spin der Leptonen zu null zusammen und die Emission der Leptonen ist gegenüber der Richtung des Kernspins unempfindlich. - Bei GT-Kopplung setzt sich der Spin der Leptonen zu eins zusammen. Da die Spins des Kernes im Anfangs- und Endzustand zusammen mit dem der Leptonen ein geschlossenes Vektordreieck bilden müssen, gibt es bei $\Delta I = 0$ nur folgende zwei Möglichkeiten: Ist $I = \frac{1}{2}$, dann ist die Zuordnung folgendermassen

$$\Uparrow \longrightarrow \Downarrow + \Uparrow + \Uparrow$$
$$I = \tfrac{1}{2} \qquad I' = \tfrac{1}{2} \quad \sigma_e \quad \sigma_\nu$$

Dieser Fall wird beim Neutronenzerfall näher behandelt werden. Ist aber $I \neq \frac{1}{2}$, dann kann der Spin der Leptonen nur senkrecht zu I stehen. Dann werden auch die Elektronen bevorzugt senkrecht zu I emittiert.

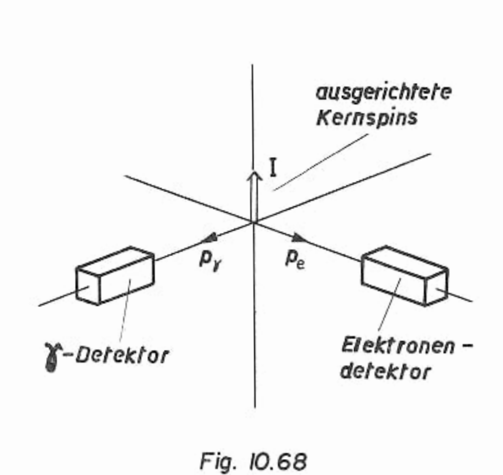


Fig. 10.68

Eine Korrelation der Form $\vec{I}[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2]$ lässt sich dann durch gleichzeitige Messung der senkrecht zu $\vec{I}$ und $\vec{p}_e$ emittierten, nachfolgenden γ-Strahlung bestimmen ($p_1 \equiv p_e$, $p_2 \equiv p_\gamma$). Im Experiment misst man dazu die Koinzidenz zwischen e und γ an Kernen, die wie beim Wu-Experiment ausgerichtet sein müssen (Fig. 10.68). Die Umkehr des Spinvektors bedeutet, wie oben erwähnt wurde, Zeitumkehr ohne Raumspiegelung, so dass eine Änderung der Koinzidenzrate bei Umkehren von $\vec{I}$ die Verletzung der Invarianz gegen Zeitumkehr anzeigen würde.

In den ausgeführten Experimenten ergab sich keine solche Asymmetrie. Die Invarianz gegen Zeitumkehr ist damit innerhalb der Messgenauigkeit bestätigt. -

Überraschenderweise ergibt sich indessen experimentell bei diesen gemischten F-GT-Übergängen ($I \neq \frac{1}{2}$) eine Anisotropie der β-Winkelverteilung bezüglich $\vec{I}$, die

grösser ist als diejenige, die von der GT-Kopplung allein herrühren kann. Dieser Befund ist durch Interferenz zwischen V und A erklärbar. Durch eine solche Kopplung definierter Phase bildet die Emissionsrichtung der Leptonen im Triplettzustand für die im Singulettzustand sonst isotrop emittierten Leptonen eine Vorzugsrichtung, der sich die Fermi-gekoppelten Leptonen anschliessen. Da die Kopplungskonstanten reell sind, kann der Phasenwinkel zwischen V und A nur 0° oder 180° betragen. Die experimentelle Entscheidung darüber, durch welches Vorzeichen C_V und C_A miteinander verbunden sind, wird am Neutronenzerfall näher behandelt.

10.14 β-Zerfall polarisierter Neutronen

Wir verstehen zur Zeit noch nicht, weshalb die β-Wechselwirkung nur an einem Nukleon im Kern stattfindet, und es erscheint immerhin als eine etwas kühne Extrapolation, die Anwesenheit der übrigen Nukleonen stillschweigend zu übersehen. Insofern erhält man die zuverlässigste Information über die β-Wechselwirkung dort, wo überhaupt nur ein Nukleon anwesend ist. Das macht den β-Zerfall des Neutrons besonders interessant, und es wurden darüber sehr sorgfältige Experimente angestellt.

Man würde sehr gern auch die Polarisation des Rückstossprotons messen. Die Zerfallsenergie des Neutrons ist jedoch nur sehr klein und infolgedessen die Geschwindigkeit des Rückstosskernes so gering ($v/c \approx 0,04$), dass die Ausprägung einer Quantisierungsachse für die Polarisation zu schwach ist. Es bleiben aber drei andere physikalische Grössen, die in der Lage sind, weitreichende Auskunft zu erteilen: der Spin des Neutrons $\vec{I}$, der Impuls des Elektrons $\vec{p}_e$ und die Rückstossrichtung des Protons, die in den theoretischen Ausdrücken jedoch durch den Impuls des Antineutrinos $\vec{p}_\nu$ ersetzt wird.

Aus diesen drei Vektoren lassen sich folgende Skalarprodukte bilden:

$$(\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu)\,, \qquad (\vec{I} \cdot \vec{p}_e)\,, \qquad (\vec{I} \cdot \vec{p}_\nu) \qquad \text{und} \qquad \vec{I}\,[\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu]\,.$$

Reine Skalare sind davon das erste und das vierte, Pseudoskalare das zweite und das dritte. $(\vec{I} \cdot \vec{p}_e)$ und $(\vec{I} \cdot \vec{p}_\nu)$ sind für Paritätsfragen und $\vec{I}\,[\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu]$ für die Frage der Zeitumkehr geeignete Messgrössen.

Die beobachtbare Intensität in bezug auf diese Grössen ist dann

$$N(E, \vec{p}_e, \vec{p}_\nu, \vec{I})\,dE = N'(E)\left\{1 + a\,(\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu) + A\,(\vec{I} \cdot \vec{p}_e) + B\,(\vec{I} \cdot \vec{p}_\nu) + D\,\vec{I} \cdot [\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu]\right\} dE \qquad (10.125)$$

wobei die Anisotropiekoeffizienten a, A, B und D im einzelnen von der Beteiligung der verschiedenen Kopplungen abhängen. Es sei im Folgenden nur V- und A-Kopplung angenommen. Der Anisotropiekoeffizient a der Elektron-Neutrino-Winkelkorrelation liefert das Mischungsverhältnis zwischen C_V und C_A (vgl. (10.106)):

$$|C_A| = (1,21 \pm 0,03)\,|C_V| \qquad (10.126)$$

Über das Vorzeichen hierin kann durch die Bestimmung von A, B und D entschieden werden. Dazu sind wegen des Bezugs auf $\vec{I}$ Experimente mit polarisierten Neutronen erforderlich.

Ausgeführt wurden diese Experimente von Clark, Robson und Nathans in Chalk River, Ontario, sowie von Telegdi et al. im Argonne National Laboratory. In beiden Fällen wurden thermische Neutronen aus einem Reaktor benutzt. In Chalk River wurden die polarisierten Neutronen dadurch gewonnen, dass beim Durchdringen magnetisierten Eisens die Neutronen mit paralleler Spinrichtung zu den ausgerichteten Elektronenspins weniger gestreut, also besser hindurchgelassen werden als mit antiparalleler Spinstellung. In dem anderen Fall wurden die polarisierten Neutronen durch Reflexion an einem magnetisierten Kobaltspiegel gewonnen.

A, B und D lassen sich durch drei einander sehr ähnliche Messanordnungen bestimmen:

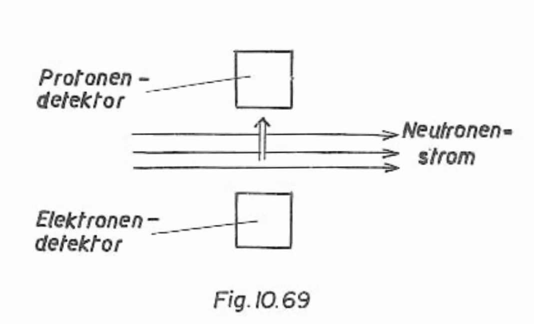


Fig. 10.69

Um den Koeffizienten A für die Asymmetrie der Elektronenemission gegenüber dem Spin der Neutronen zu messen, genügt die Anordnung in Fig. 10.69. Die Neutronen sind transversal polarisiert. Senkrecht zum Strahl stehen sich Elektronen- und Protonendetektor gegenüber, und zwar in Richtung des Spins $\vec{I}$, damit $(\vec{I}.\vec{p}_e)$ maximal ist. Registriert werden Koinzidenzen zwischen β-Teilchen und Rückstossprotonen. A wird durch die Änderung der Koinzidenzrate bei Umkehren der Polarisation von $\vec{I}$ gemessen.

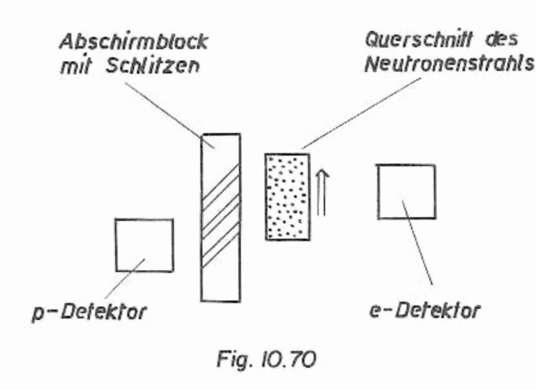


Fig. 10.70

Um den Koeffizienten B für die Asymmetrie der Neutrinoemission gegenüber $\vec{I}$ zu messen, wird nur die Polarisationsrichtung im Strahl transversal um 90° geschwenkt (Fig. 10.70). Wieder wird der β-Zerfall durch Koinzidenz zwischen Elektron und Rückstossproton identifiziert. $(\vec{I}.\vec{p}_\nu)$ ist maximal, wenn beide in dieselbe Richtung weisen, d.h. in diesem Fall nach oben; dann ist der Protonenrückstoss vorzugsweise nach links unten gerichtet, wenn das Elektron gleichzeitig nach rechts in Richtung des Detektors emittiert wird. Der Abschirmblock mit den schräg nach links unten weisenden Schlitzen bewirkt, dass im Protonendetektor nur solche Rückstosskerne registriert werden, deren Impulsrichtung dieser Situation entspricht. B wird durch die Änderung der Koinzidenzrate bei Umkehren der Polarisation von $\vec{I}$ gemessen.

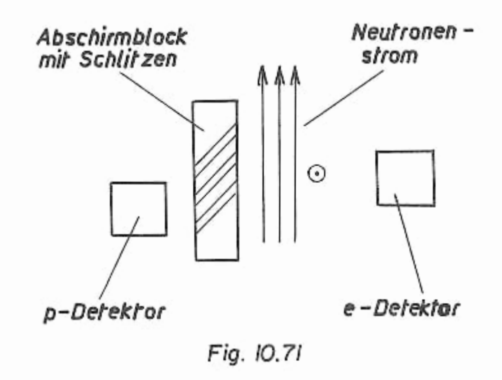


Fig. 10.71

Um D zu bestimmen, brauchen die Schlitze nur um 90° um die Achse zwischen den beiden Detektoren geschwenkt zu werden (Fig. 10.71). Dann stehen $\vec{I}$ und $\vec{p}_e$ aufeinander senkrecht. Durch die Schlitze werden wieder Rückstossprotonen nach unten ausgewählt, also solche Zerfälle, bei denen in Fig. 10.71 das Antineutrino nach oben emittiert wird. Dabei stehen $\vec{I}$, $\vec{p}_e$ und $\vec{p}_\nu$ senkrecht aufeinander und das Spatprodukt ist maximal. Durch Umkehren der Polarisation $\vec{I}$ ergibt sich folgender Wechsel (Fig. 10.72): Die rechte Figur ergibt sich aus der linken einerseits durch Umkehren von $\vec{I}$ und einfaches Herumdrehen des Ganzen in der Zeichenebene um 180°, andererseits durch Umkehren der Zeitrichtung. D lässt sich wiederum durch die Änderung der Koinzidenzrate bei Umkehren der Polarisation $\vec{I}$ messen.

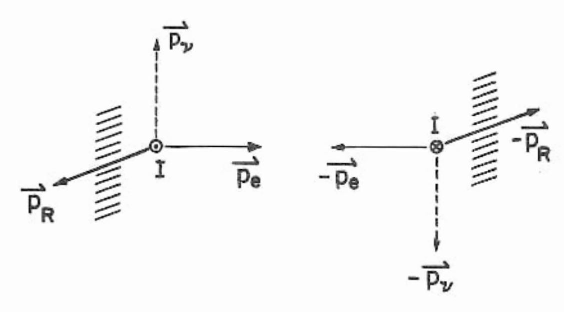


Fig. 10.72

Das Experiment ergibt D = 0. Damit ist die Invarianz bei Zeitumkehr innerhalb der Messgenauigkeit gesichert. Dementsprechend sind die Koeffizienten C_A und C_V reell. Aus A und B lässt sich das Vorzeichen zwischen C_V und C_A ermitteln, wenn man Interferenz zwischen V- und A-Kopplung annimmt.

Um dies schrittweise anschaulich zu machen, sei zunächst angenommen, es gäbe keine Interferenz dieser Art. Dann ergibt sich nach (10.111) als Winkelkorrelation zwischen e und ν

bei V $\qquad \underset{e}{\uparrow}\ \underset{\nu}{\uparrow}$

bei A $\qquad \underset{e}{\uparrow}\ \underset{\nu}{\downarrow}$

Linkshändiges e^- und rechtshändiges ν^- vorausgesetzt, sind dann folgende Spin- und Impulszuordnungen möglich. Bei Fermi-Kopplung:

$$\underset{n}{\Uparrow} \longrightarrow \underset{p}{\Uparrow} + \underset{e^-}{\Uparrow\downarrow} + \underset{\nu^-}{\Downarrow\downarrow} \qquad (10.127)$$

oder

$$\underset{n}{\Uparrow} \longrightarrow \underset{p}{\Uparrow} + \underset{e^-}{\Downarrow\uparrow} + \underset{\nu^-}{\Uparrow\uparrow} \qquad (10.128)$$

und bei GT-Kopplung:

$$\underset{n}{\Uparrow} \longrightarrow \underset{p}{\Downarrow} + \underset{e^-}{\Uparrow\downarrow} + \underset{\nu^-}{\Uparrow\uparrow} \qquad (10.129)$$

Daraus lässt sich ersehen, dass die Korrelationen $(\vec{I}.\vec{p}_e)$ und $(\vec{I}.\vec{p}_\nu)$ bei F-Kopplung isotrop und bei GT-Kopplung anisotrop sind, und zwar müssen die Koeffizienten A und B gleichen Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben; das Vorzeichen von A lässt sich aus (10.129) ersehen; es ist

$$\frac{1}{2}\xi A = -C_A^2 \qquad (10.130)$$

$$\frac{1}{2}\xi B = +C_A^2 \qquad (10.131)$$

mit

$$\xi = C_V^2 + 3C_A^2 . \qquad (10.132)$$

Das wird im Experiment nun keineswegs beobachtet. Statt dessen ist die Anisotropie der $(\vec{I}.\vec{p}_e)$-Korrelation weitgehend verwischt und die der $(\vec{I}.\vec{p}_\nu)$-Korrelation deutlich angehoben:

$$A = -0{,}11 \pm 0{,}02$$

$$B = 0{,}88 \pm 0{,}15.$$

Dieses Ergebnis ist indessen durch Interferenz zwischen F- und GT-Kopplung erklärbar. A und B enthalten dann den Kreuzterm $C_A C_V$ und zwar in der Form

$$\frac{1}{2}\xi A = -C_A^2 - C_A C_V \qquad (10.133)$$

$$\frac{1}{2}\xi B = +C_A^2 - C_A C_V . \qquad (10.134)$$

Indem man dieses

$$\frac{1}{2}\xi A = -C_A(C_A + C_V) \qquad (10.135)$$

$$\frac{1}{2}\xi B = +C_A(C_A - C_V) \qquad (10.136)$$

schreibt, ist zu erkennen, dass A minimal und B maximal wird, wenn C_A und C_V entgegengesetztes Vorzeichen haben. Bei Benutzung der Beziehung

$$C_A = -1{,}21\, C_V \qquad (10.137)$$

ergibt sich gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten von A und B. Wenn man von der numerischen Ungleichheit absieht, so ist das Wesentliche an diesem Ergebnis, dass C_V und C_A entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man spricht infolgedessen von V-A-Kopplung (sprich V minus A).

10.15 Mesonenzerfälle

Für den Mesonenzerfall gibt es u.a. folgende drei charakteristische Prozesse:

den π-Mesonenzerfall $\qquad \pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu$

den μ-Mesoneneinfang $\qquad p + \mu^- \longrightarrow n + \nu^+$

den μ-Mesonenzerfall $\qquad \mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu^+ + \nu^-$.

10.15.1 π -Mesonenzerfall

Beim Zerfall des π-Mesons wird als einziges emittiertes Teilchen ein μ -Meson beobachtet. Aus Gründen der Energie- und Impulserhaltung kann jedoch dieses nicht das einzige emittierte Teilchen sein. Es muss neben dem μ-Meson also noch ein weiteres neutrales Teilchen emittiert werden.

Für π-Mesonen vorgegebener Energie hat das μ-Meson eine definierte Reichweite, d.h. seine Energie ist also auch festgelegt. Demzufolge geschieht die Impulsaufteilung auf nicht mehr als zwei emittierten Teilchen. Neben dem μ-Meson wird gleichzeitig genau ein neutrales Teilchen emittiert.

Dass es sich dabei nicht um ein Photon handelt, ergibt sich daraus, dass Wechselwirkungen, die ein Photon betreffender Energie auslösen müsste (z.B. Paarbildung), nicht aufzufinden sind. Es liegt also nahe, dieses Teilchen als ein Neutrino anzusehen; indessen besteht keine zwingende Evidenz, dass es mit dem beim β-Zerfall auftretenden Neutrino identisch ist; das Verschwinden seiner Ruhemasse konnte noch nicht genauer als $(8 \pm 10)\, m_e$ bestätigt werden. Auf Anregung von Pontecorvo sowie Lee und Yang sind gegenwärtig neuere Experimente darüber im Gange.

Das Zerfallsschema wird also als

$$\pi^{\pm} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu \qquad (10.138)$$

angesehen.

Um die Zerfallswahrscheinlichkeit zu berechnen, wird angenommen, dass das π-Meson infolge seiner starken Wechselwirkung mit Nukleonen eine merkliche Neigung besitzt, virtuelle Nukleon-Antinukleonpaare zu bilden, z.B.

$$\pi^{+} \longleftrightarrow p + \bar{n} \qquad (10.139)$$

und dass diese dann gemäss der normalen β -Wechselwirkung zerfallen

$$p + \bar{n} \longrightarrow \mu^{+} + \nu. \qquad (10.140)$$

Der Zerfall dieses virtuellen Paares ist analog zu dem Einfang eines μ^{-}-Mesons in den Kern

$$p + \mu^{-} \longrightarrow n + \nu \qquad (10.141)$$

von dem man weiss, dass er sich wie der Elektroneinfang verhält. Die Zerfallswahrscheinlichkeit des π-Mesons setzt sich also aus derjenigen für (10.139) und der für (10.140) zusammen.

Neben diesem Zerfall ist dann aber auch der folgende denkbar

$$\pi^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \nu \qquad (10.142)$$

der ebenfalls durch virtuelle Dissoziation z.B.

$$\pi^{+} \longleftrightarrow p + \bar{n} \qquad (10.143)$$

und anschliessenden β -Zerfall

$$p + \bar{n} \longrightarrow e^{+} + \nu^{+} \qquad (10.144)$$

vonstatten geht. Berechnet man auf diesem Wege die Lebensdauer des π-Mesons für jeden dieser beiden Prozesse (10.138) und (10.142) einzeln, so stösst man auf divergente Ausrücke, die nur durch Abschneiden des Nukleonenimpulses im virtuellen Zwischenzustand beseitigt werden können. Insofern ist die Berechnung, die für den Prozess (10.138) den experimentellen Wert

$$\tau_{\pi^+} = (2,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

gut trifft, ein nicht ganz befriedigendes Verfahren. Bei der Berechnung des Verhältnisses der Lebensdauern von (10.138) und (10.142) fallen indessen die divergenten Terme automatisch heraus, und es ergibt sich dabei, dass der Zerfall

$$\pi^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \nu$$

etwa 10^4 mal seltener ist als

$$\pi^{\pm} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu .$$

10.15.2 μ-Mesoneinfang

Der Prozess des Einfangs eines μ^--Mesons ist ganz analog dem Elektroneinfang. Die Lebensdauer ergibt bei Berechnung nach der üblichen β-Theorie Werte, die gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Die Neutrinoemission konnte infolge des starken Rückstosses der Kerne ($E_\nu \approx 50 - 80$ MeV) nachgewiesen werden.

10.15.3 μ-Mesonzerfall

Beim Zerfall des μ-Mesons wird als einziges emittiertes Teilchen ein Elektron beobachtet. Da das Energiespektrum dieser Elektronen kontinuierlich ist, müssen im Endzustand mindestens 3 Teilchen existieren, unter denen sich der Impuls aufteilt. Neben dem Elektron müssen also noch mindestens zwei weitere neutrale Teilchen emittiert werden. Dass es sich dabei nicht um Photonen handelt, wird wiederum durch das Ausbleiben jeder Reaktion belegt, die von entsprechenden Photonen hätte verursacht werden müssen. Infolgedessen werden sie als Neutrinos angenommen. Bei Vernachlässigung der Masse des Elektrons und der "Neutrinos" gegenüber der des μ-Mesons ergibt sich für die Maximalenergie des β-Spektrums

$$W_0 = \frac{1}{2} M_\mu c^2 , \quad \text{..} \qquad (10.145)$$

ein Wert, der gut mit der andersweitig bestimmten Masse M_μ übereinstimmt.

Das Zerfallsschema wird also als

$$\mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \nu + \nu \qquad (10.146)$$

angenommen, wobei zunächst offenbleibt, ob die beiden ν gleich oder verschieden sind.

Wird der μ-Zerfall als schwache Wechselwirkung zwischen den vier Teilchen $\mu e \nu \nu$ nach der üblichen β-Theorie behandelt, so lassen sich die insgesamt 24

möglichen Kombinationen zwischen ihnen auf folgende drei reduzieren:

$$(\nu \mu)(e \nu)$$
$$(\mu \nu)(e \nu)$$
$$(\mu e)(\nu \nu) .$$

Das Energiespektrum der Elektronen ergibt sich für diese drei Typen übereinstimmend zu

$$N(W)\, dW = \text{const.}\; W^2 \left[3(W_0 - W) - 2\rho \left(W_0 - \tfrac{4}{3} W\right)\right] dW . \qquad (10.147)$$

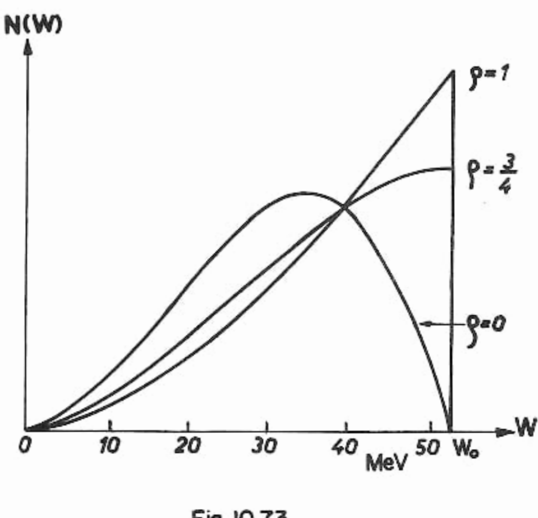


Fig. 10.73

Seine Form hängt nur von dem MICHEL-PARAMETER ρ ab (Fig. 10.73). ρ hängt seinerseits von den Kopplungskonstanten für die fünf Wechselwirkungen ab. An ρ kann also experimentell über die beteiligten Kopplungen entschieden werden. Dieses vieldeutige Problem wurde durch die Paritätsverletzung zunächst noch unübersichtlicher. Nimmt man indessen dieselben Verhältnisse an, die für den üblichen β-Zerfall gelten, also maximale Paritätsverletzung, sowie V und A als einzige Kopplungen, dann wird die Situation wieder sehr übersichtlich. Nimmt man ferner für die Neutrinos die 2-Komponententheorie als gültig an, dann hat ρ bezüglich der drei Möglichkeiten über die Natur der Neutrinos folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{llr} \mu \longrightarrow e + \nu^+ + \nu^- & & \rho = \tfrac{3}{4} \\ \mu \longrightarrow e + \nu^+ + \nu^+ & & \rho = 0 \\ \mu \longrightarrow e + \nu^- + \nu^- & & \rho = 0 \end{array}\right\} \quad (10.148)$$

Das Experiment entscheidet zugunsten des ersten Falles, der Emission eines Neutrinos und eines Antineutrinos.

Berechnet man die Lebensdauer des μ-Mesons in der üblichen Weise

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = \int_0^{W_0} N(W)\, dW \qquad (10.149)$$

so ergibt sich gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert

$$\tau_\mu = (2,261 \pm 0,007) \cdot 10^{-6} \text{ sec},$$

wenn man die aus dem Zerfall von O^{14} bei reiner V-Kopplung bestimmte Fermi-Konstante

$$g_F = (1,41 \pm 0,01) \cdot 10^{-49} \text{ erg.cm}^3$$

verwendet und annimmt, dass $|C_A| = |C_V|$ ist. Bei Benutzung der relativen Stärke

$$|C_A| = 1{,}21\,|C_V| \qquad (10.150)$$

oder einer Fermi-Konstanten, die sich aus dieser etwas stärkeren GT-Kopplung bestimmen würde, ergibt sich eine deutliche Diskrepanz für die Lebensdauer.

Infolgedessen wird für den μ-Zerfall die reine V-A-Kopplung

$$|C_A| = |C_V| \qquad (10.151)$$

als gültig angesehen.

10.15.4 Paritätsverletzung beim π - μ-e-Zerfall

Die Zerfälle

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu \qquad (10.152)$$

und

$$\mu \longrightarrow e + \nu^+ + \nu^- \qquad (10.153)$$

lassen sich also als β-Zerfälle auffassen. Nimmt man an, dass hierbei die Parität in derselben Weise verletzt ist, wie bei den übrigen β-Zerfällen, dann müssen die μ-Mesonen longitudinal polarisiert sein: Denn aus dem Zerfallsschema (10.152) folgt, dass die Impulse von μ und ν einander entgegengesetzt sind (Fig. 10.74). Das Neutrino ist ferner wegen Paritätsverletzung longitudinal polarisiert, und die Spins von μ und ν sind wegen $\sigma_\pi = 0$ entgegengesetzt. Also liegt der Impuls $\vec{p}_\mu$ entlang der Spinachse.

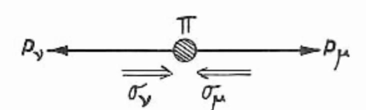


Fig. 10.74

Die Winkelverteilung der e beim Zerfall dieser "ausgerichteten" μ-Mesonen ist dann asymmetrisch, und zwar werden ν^-, ν^+ gemeinsam in eine Richtung und e entgegengesetzt dazu emittiert (Fig. 10.75). Die e werden dabei vorzugsweise entgegengesetzt zur Flugrichtung des μ-Mesons emittiert.

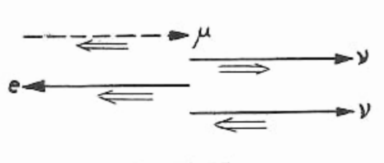


Fig. 10.75

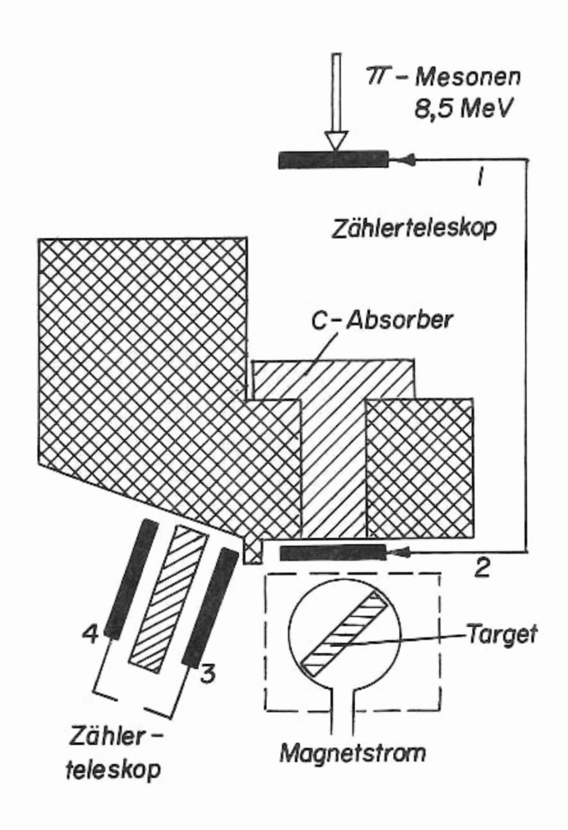


Fig. 10.76

Auf die Möglichkeit, an dem Auftreten einer solchen Asymmetrie die Paritätsverletzung beim $\pi - \mu$ -e-Zerfall zu prüfen, haben Lee und Yang hingewiesen. Das Experiment wurde von Garwin, Lederman und Weinrich in folgender Messanordnung durchgeführt (Fig. 10.76).

Die aus dem Zyklotron kommenden π^+-Mesonen zerfallen während des Fluges teilweise in μ^+-Mesonen. Da die Reichweite der π^+ kleiner als die der μ^+ ist, lassen sich die π^+ in einem Absorber aus Kohlenstoff ausblenden. Die μ^+ werden in dem Target abgebremst und zerfallen dort mit einer mittleren Lebensdauer von 2.26 μ sec. Wenn dabei keine Depolarisierung der μ^+ eintritt, dann ist eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der Positronen zu erwarten. Diese werden im Zähler-Teleskop 3, 4 nachgewiesen, das durch Zwischenschalten verschieden dicker Absorber eine Energiediskriminierung der Positronen gestattet.

Anstatt nun das Zählerteleskop herumzuschwenken, wurde folgende elegante Methode benutzt: Um das Target wurde eine Spule gelegt, in deren Magnetfeld die magnetischen Momente der μ^+ um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene präzedieren. Dadurch wird auch die Winkelverteilung der Positronen herum- und am Teleskop vorbeigedreht. Um diese Drehung eindeutig zu definieren, muss die Präzessionszeit festgelegt werden; das wurde durch verzögerte Koinzidenz zwischen den Zählerteleskopen 1, 2 und 3, 4 bewerkstelligt. Die Winkelverteilung lässt sich dann einfach durch Änderung des Magnetstromes ausmessen (Fig. 10.77). Sie zeigt eine Asymmetrie, deren genauere Auswertung maximale Paritätsverletzung ergibt.

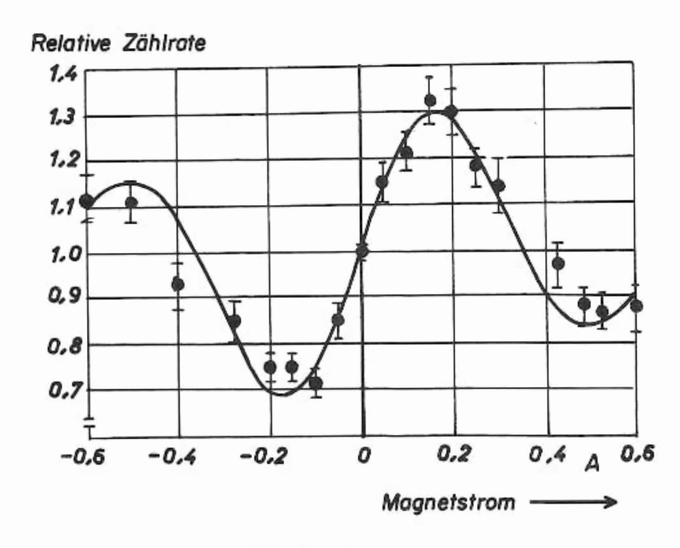


Fig. 10.77

Bei μ^--Mesonen ergibt sich derselbe Effekt, aber er ist um eine Grössenordnung kleiner. Das rührt daher, dass die μ^- in den Atomhüllen eingefangen werden und die Spins bei Sprüngen auf tiefere Schalen

leicht umklappen. Die dabei emittierten γ -Quanten sind zirkular polarisiert.

Aus dem Vorzeichen der Winkelverteilung und der Polarisation der Elektronen ergibt sich, dass die Kopplungskonstanten C_V und C_A hier ebenso wie beim üblichen β -Zerfall entgegengesetztes Vorzeichen haben.

10.16 V-A-Kopplung

Die ursprünglich komplizierte Situation bezüglich der Vielfalt der Kopplungskonstanten hat sich also infolge experimenteller Evidenz wesentlich vereinfacht. Es existiert nur V-A-Kopplung und zwar gilt beim β-Zerfall

$$C_A = - 1,2\, C_V \qquad (10.154)$$

und beim μ -Zerfall

$$C_A = - C_V \quad . \qquad (10.155)$$

Die Beziehung (10.154) veranlasste weitere Fragen zu einer Erklärung des Faktors 1,2. Da beim μ-Zerfall reine V-A-Kopplung gefunden wurde und keine Nukleonen, also keine Teilchen mit starker Wechselwirkung zugegen sind, führt man die ungleiche Stärke von V- und A-Wechselwirkung, die sich beim β-Zerfall am Kern ergibt, auf Störungen durch starke Wechselwirkung zurück. Wie die Berechnung der Lebensdauer des μ-Mesons zeigt, ist diese Störung in erster Linie in einer Beeinflussung der A-Kopplung zu suchen.

Feynman und Gell-Mann haben eine Theorie entworfen, die sich um eine Erklärung der Abweichung von der reinen V-A-Kopplung durch zusätzliche Kopplungen zwischen Nukleonen und Mesonen bemüht.

Die Annahme, dass der Faktor 1,2 von einer Störung durch starke Wechselwirkungen herrührt, schliesst den Begriff der UNIVERSELLEN FERMI-KOPPLUNG ein, derzufolge alle schwachen Wechselwirkungen durch die gleichzeitige Beteiligung von vier Fermionen, und zwar in der Form der V-A-Kopplung charakterisiert sind.

11. GAMMA - ZERFALL

11.1 Einleitung

Der spontane Zerfall eines Kerns von einem angeregten Niveau auf ein tieferliegendes oder in den Grundzustand durch Emission eines γ-Quants der Energie

$$E_\gamma = h\nu = E_i - E_f \qquad (11.1)$$

ist schon erörtert worden. Ein konkurrierender Prozess, der ebenfalls für die Abgabe der Anregungsenergie des Kerns verantwortlich ist, heisst die "INNERE KONVERSION". Dabei wird die Energie vom Kern auf eines der Atomelektronen übertragen. Also werden neben der γ-Strahlung gleichzeitig Konversionselektronen mit der Energie

$$E_e = E_\gamma - E_B \qquad (11.2)$$

emittiert. E_B ist die Bindungsenergie des Elektrons in seiner ursprünglichen Schale.

11.2 Kern-Energieniveaux

Um irgendein Kernniveau zu kennzeichnen, müssen die folgenden Daten angegeben werden:

(a) Energie
(b) Kernspin
(c) Parität
(d) Lebensdauer

MeV
5,58
5,16
5,11 (2-)(T=0)
4,77 (2+)(T=0)
3,58 2+ (T=0)
2,15 1+ (T=0)
1,74 0+ (T=1)
0,72 1+ (T=0)
0 3+ (T=0)
B^{10}

Fig. 11.1

Diese Werte (Fig. 11.1) können im Prinzip aus spektroskopischen Messungen gewonnen werden; ein Beispiel einer solchen Analyse wird in Abschnitt 11.7 gegeben. In gewissen Fällen kann auch die Isospinzuordnung angegeben werden.

Die Lebensdauern gegenüber γ-Zerfall reichen von $< 10^{-13}$ sec bis zu einigen Jahren. Die kürzesten Lebensdauern - kleiner als $\sim 10^{-10} \ldots 10^{-11}$ sec - sind mit den heutigen elektronischen Mitteln im allgemeinen nicht messbar.

In einem Prozess, bei dem kurzlebiger γ-Zerfall auf einen β-Zerfall folgt, ist die mit einem γ-Detektor gemessene Lebensdauer gleich der des β-Zerfalls.

11.3 Multipolordnung

Klassisch lässt sich eine Strahlungsquelle durch oszillierende elektrische oder magnetische Momente darstellen, worin Ladungs- und Stromverteilung durch Kugelfunktionen der Ordnung 1, 2, 3, ... gegeben sind. Auf die entsprechenden Momente und die zugehörige emittierte Strahlung werden die Bezeichnungen DIPOL, QUADRUPOL, OKTUPOL, ... angewendet.

Quantenmechanisch kann γ-Strahlung analog in MULTIPOLORDNUNGEN entsprechend dem totalen Drehimpuls, den sie forträgt, eingeteilt werden:

$\ell = 1$	Dipol	(z.B. $1+ \rightarrow 0+$)
$\ell = 2$	Quadrupol	(z.B. $2+ \rightarrow 0+$)
$\ell = 3$	Oktupol	(z.B. $3+ \rightarrow 0+$).

Die Multipolordnung eines Übergangs ist als 2^{ℓ} definiert.

Da elektromagnetische Strahlung transversal (divergenzfrei) ist, kann es keinen Multipol $\ell = 0$ geben.

11.4 Elektrische und magnetische Multipolstrahlung

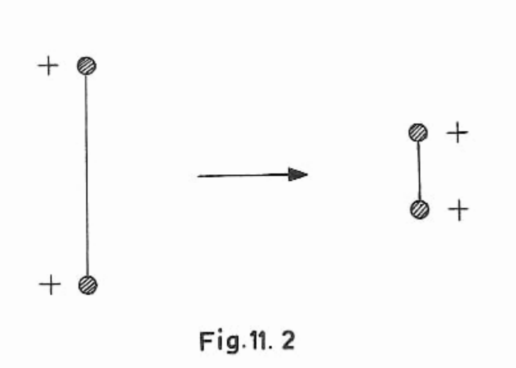


Fig.11. 2

Für ein gegebenes ℓ, d.h. für eine gegebene Multipolordnung, unterscheidet man zwei Arten elektromagnetischer Strahlung, die sogenannte "ELEKTRISCHE" und die "MAGNETISCHE MULTIPOLSTRAHLUNG". Diese Bezeichnungsweise rührt daher, dass die elektrische Multipolstrahlung Analogien zur Translation elektrischer Ladung, z.B. Änderung des Abstands in einem elektrischen Dipol (Fig. 11.2) und die magnetische Multipolstrahlung Analogien zur Verlagerung von elektrischen Strömen aufweist.

Jedes elektromagnetische Strahlungsfeld besitzt einen definierten Paritätscharakter. Die beiden oben unterschiedenen Strahlungstypen haben bei gleicher Multipolordnung ℓ entgegengesetzte Parität π, und zwar:

$$\text{ELEKTRISCHER MULTIPOL} \quad \pi = (-)^{\ell}$$
$$\text{MAGNETISCHER MULTIPOL} \quad \pi = -(-)^{\ell} \qquad (11.3)$$

Man benutzt die Schreibweise $\mathcal{M}\lambda$, wo $\mathcal{M}$ den Typ des Multipols (E = elektrisch, M = magnetisch) und λ den Wert von ℓ angibt, z.B. E2 = elektrische Quadrupolstrahlung.

Strahlung mit gerader Parität : M1, E2, M3, E4,...

Strahlung mit ungerader Parität : E1, M2, E3, M4,...

(Mnemotechnisch: Elektrisch → Parität even, wenn ℓ even).

Ein qualitativer Beweis für die Paritätseigenschaft einer elektrischen Multipolstrahlung lässt sich aus einer Betrachtung der Übergangswahrscheinlichkeit W zwischen zwei Niveaux mit den Wellenfunktionen ψ_i und ψ_f gewinnen. Diese ist

$$W = c \int \psi_f^* \, (\mathcal{M}\lambda)_{op} \, \psi_i \, d\tau \qquad (11.4)$$

wobei c eine Konstante und $(\mathcal{M}\lambda)_{op}$ der Operator der Multipolwechselwirkung, und zwar

$$(\mathcal{M}\lambda)_{op} = \sum_i e_i x_i \qquad \text{für E1 - Übergänge} \qquad (11.5)$$

$$(\mathcal{M}\lambda)_{op} = \sum_i e_i x_i^2 \qquad \text{für E2 - Übergänge etc.} \qquad (11.6)$$

ist. e_i und x_i sind Ladung und Lagekoordinaten der Nukleonen i. Die Integration in (11.4) erstreckt sich über das Kernvolumen.

Da die Übergangswahrscheinlichkeit W, unabhängig vom System, nie negativ sein kann, müssen die Paritäten von Anfangs- und Endzustand verschieden sein, wenn $(\mathcal{M}\lambda)$ das Vorzeichen bei Raumspiegelung umkehrt. Das ist gemäss (11.5) beispielsweise für E1-Übergänge der Fall, denn bei Raumspiegelung $x_i \to -x_i$ wechselt hier $(\mathcal{M}\lambda)$ sein Vorzeichen. - Hingegen haben ψ_i und ψ_f gleiche Parität, wenn $(\mathcal{M}\lambda)$ gerade Parität besitzt, beispielsweise bei E2-Übergängen (11.6).

Man kennzeichnet die Paritätseigenschaft eines Überganges durch "yes" oder "no", je nachdem, ob ein Wechsel der Parität stattfindet oder nicht. Diese Bezeichnung entspricht der Antwort auf die Frage: "Ändert sich die Parität?".

Beispiele:

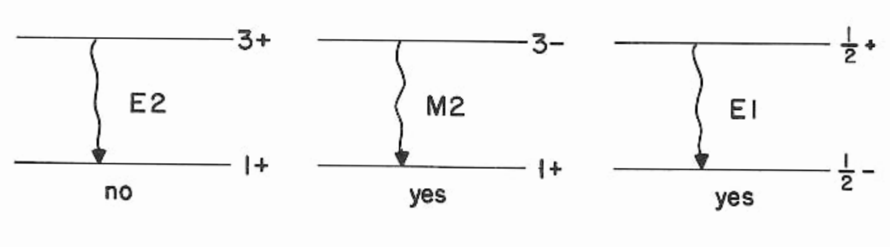


Fig. 11.3

11.5 Bemerkungen zum mechanischen Modell der Multipolstrahlung

(a) E1-Strahlung könnte, wenn der Kern als homogen geladene Kugel angesehen wird, nur dadurch hervorgerufen werden, dass sein Schwerpunkt mit der Frequenz der emittierten Strahlung schwingt. Tatsächlich aber verhält sich ein Kern nicht so. Obwohl der Schwerpunkt eine solche Schwingung nicht ausführt, wird experimentell E1-Strahlung durchaus beobachtet, jedoch mit sehr geringer Intensität. Auf diese Weise zeigt sich, dass der Kern nicht als eine homogen geladene Kugel angesehen werden kann.

(b) M1-Strahlung lässt sich mit Hilfe der Annahme erklären, dass verschiedene Bestandteile des Kerns verschiedenes gyromagnetisches Verhältnis haben (Verhältnis des magnetischen Dipolmoments zum totalen Drehimpuls), dass also der Vektor des totalen magnetischen Moments nicht in dieselbe Richtung weist wie der des totalen Drehimpulses.

(c) E2-Strahlung kann durch elliptische Schwingungen des Kerns verursacht werden.

(d) Elektrische Multipolstrahlung höherer Ordnung entspricht komplizierteren "Wellenbildungen" auf der "Oberfläche" des Kerns.

11.6 Auswahlregeln

11.6.1 Drehimpuls

Ein γ-Quant trägt aus einem Zerfall einen Drehimpuls mit sich fort; zwischen den Drehimpulsen von Anfangs- und Endzustand des Kernes (Kernspin) besteht also eine Differenz, die infolge der Erhaltung des Drehimpulses vektoriell gegeben ist durch

$$\vec{I}_i - \vec{I}_f = \vec{I}_\gamma \qquad (11.7)$$

oder in nicht-vektorieller Form:

$$|I_i - I_f| \leq I_\gamma \leq I_i + I_f \quad . \qquad (11.8)$$

Heitler hat gezeigt (Proc. Camb. Phil. Soc. 1936, 32, 112), dass ein Photon eines elektrischen oder magnetischen 2^ℓ-Pol-Übergangs einen Drehimpuls ℓ (Betrag $\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$) mit bezug auf den Ursprung des Multipols forträgt. Es ist infolgedessen üblich, die obige "AUSWAHLREGEL für den DREHIMPULS"

$$\boxed{|I_i - I_f| \leq \ell \leq I_i + I_f} \qquad (11.9)$$

zu schreiben, wobei es wichtig ist, darauf hinzuweisen, dass man bei Photonen das obige ℓ nicht naiv als "mechanisch" analog zum Bahndrehimpuls, wie etwa den eines Nukleons, auffassen darf; ℓ gibt eigentlich die Multipolordnung an und entspricht dem totalen Drehimpuls. Man könnte sonst auf das Paradoxon stossen, dass es in der obigen Gleichsetzung von I_γ und ℓ erscheint, als könnte das Photon einen von 1 verschiedenen

Spin haben. Für relativistische Teilchen lässt sich nicht evident zwischen Bahn- und Spindrehimpuls unterscheiden.

Wie bereits festgestellt, kann es keine elektromagnetische Strahlung der Multipolordnung $\ell = 0$ geben:

γ-Übergänge $0 \rightarrow 0$ sind streng verboten.

11.6.2 Parität

Aus den Betrachtungen im Abschnitt 11.4 ergibt sich als Auswahlregel für die Parität:

"yes"-Übergänge:	E1, M2, E3, M4, ...
"no"-Übergänge:	M1, E2, M3, E4, ...

Beispiele:

1+

$\Delta I = 1$, "no", also M1

0+

Fig. 11.4

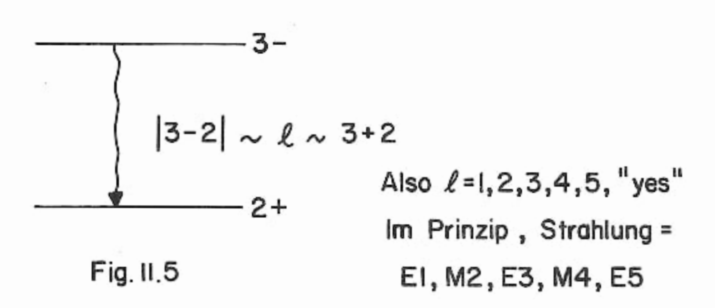


Fig. 11.5

Die Zerfallskonstante wird in der Regel jedoch mit zunehmenden ℓ sehr schnell kleiner, so dass nur die niedrigsten Terme, hier also E1, M2 als Komponenten in der Strahlung gemischter Multipolordnungen berücksichtigt zu werden brauchen.

Man kann eine empirische Regel aufstellen, die die obige DREHIMPULS-AUSWAHLREGEL (11.9) auf

$$\ell = \Delta I \qquad (\Delta I \equiv I_i - I_f) \tag{11.10}$$

oder manchmal

$$\ell = \Delta I + 1 \tag{11.11}$$

beschränkt.

Nach den Zerfallzeiten angeordnet gilt für γ -Energien von ~1 MeV folgendes Schema:

Tab. 11.1

$T_{\frac{1}{2}}$ für $E_\gamma \sim 1$ MeV	10^{-12} sec		$10^{-7,5}$ sec	10^{-3} sec
Elektrische Strahlung	Dipol	Quadrupol	Oktupol	2^4-Pol
$\left.\begin{matrix} \lvert I_i - I_f \rvert \leq \\ I_i + I_f \geq \end{matrix}\right\} \ell$	1	2	3	4
Paritätseigenschaft	"yes"	"no"	"yes"	"no"
Magn. Strahlung	Dipol		Quadrupol	Oktupol
$\left.\begin{matrix} \lvert I_i - I_f \rvert \leq \\ I_i + I_f \geq \end{matrix}\right\} \ell$	1		2	3
Paritätseigenschaft	"no"		"yes"	"no"

11.7 Aufstellung eines Niveauschemas

Als ein Beispiel dafür, wie ein Niveauschema eines Kerns aus Messungen der emittierten γ -Strahlung konstruiert wird, seien die folgenden Messungen der γ -Energien und Mischungsverhältnisse der Multipolordnungen an der Reaktion

$$Yb^{175} \longrightarrow Lu^{175*} + \beta^-$$
$$Lu^{175*} \downarrow Lu^{175} + \gamma$$

betrachtet:

Energie	Multipolordnung
113,81 keV	80% M1 + 20% E2
137,65	M1 + E2
144,85	E1
251,3	E2
282,57	2% M2 + 98% E1
396,1	20% M2 + 80% E1

Nimmt man den Grundzustand den Lu^{175} als $\frac{7}{2}$ + an (was aus anderen Betrachtungen gerechtfertigt wird), dann kann man das Niveauschema dieses Kerns bestimmen, indem

man paarweise Differenzen zwischen den gemessenen Energiewerten bildet. Zieht man beispielsweise den ersten Wert (113,81 keV) der Reihe nach von jedem der folgenden Werte ab, so erhält man 23,84 31,04 137,49 168,76 282,29 keV, von denen die zwei unterstrichenen mit gemessenen γ-Energien übereinstimmen. Infolgedessen kann man die 137- und 282-keV-Linien als Übergänge zwischen den Niveaux ansehen:

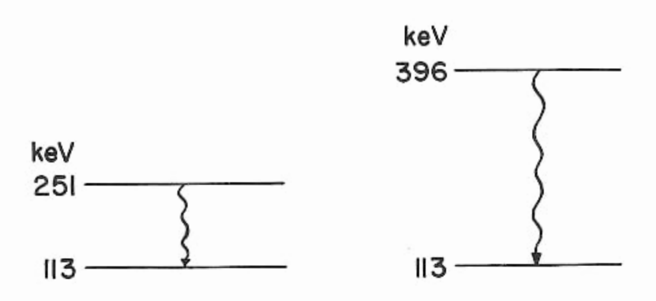


Fig. II.6

In ähnlicher Weise kann die 144,85-keV-Linie mit dem Übergang vom 396- zum 251-keV-Niveau identifiziert werden, so dass man das Energie-Niveauschema konstruieren kann (Fig. 11.7)

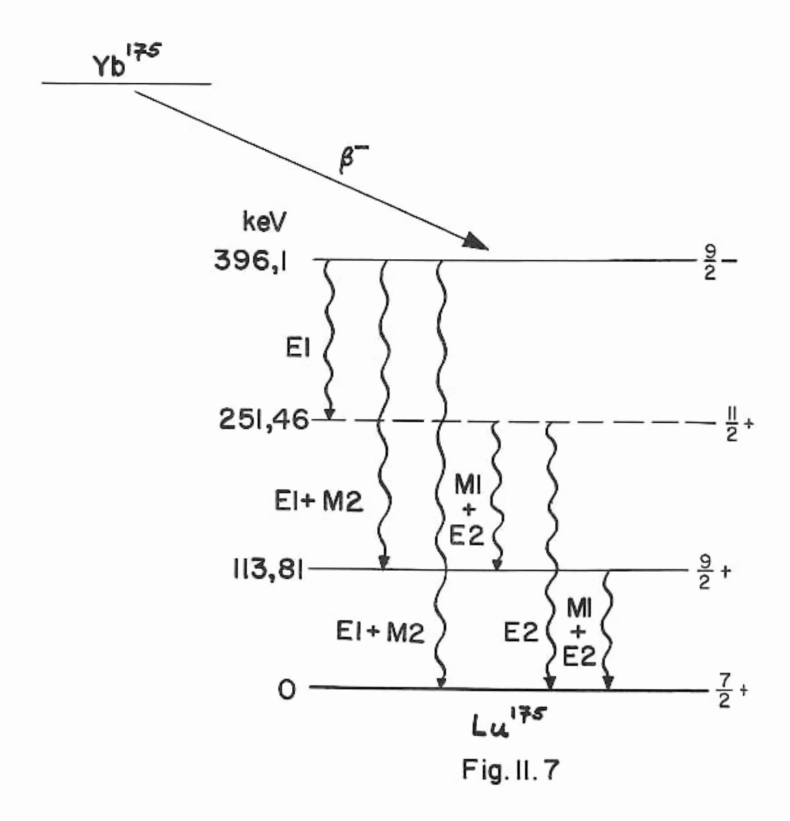


Fig. II.7

Die Multipolarität der γ-Strahlung kann nur indirekt aus Messungen der Winkelverteilung, der Konversionskoeffizienten oder der Lebensdauer der Niveaux bestimmt werden. Eine eingehende Behandlung dessen findet sich beispielsweise bei Korsunski "Isomerie der Atomkerne" Kap. IV, pp. 111 (Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957). Mit Hilfe der Auswahlregeln (11.3) und (11.9) lassen sich dann die Spins und Paritäten der Energieniveaux angeben. Eine eindeutige Zuordnung ist aber nicht in allen Fällen durchführbar.

11.8 Emissionswahrscheinlichkeit der γ-Strahlung (Multipol-Lebensdauer)

11.8.1 Elektrische Multipole

Die theoretische Behandlung der Übergangswahrscheinlichkeiten ist gegenwärtig noch nicht hinreichend entwickelt, um mehr als rohe Schätzungen der Lebensdauern zu gestatten: Die beste Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen wurde von Weisskopf (Blatt-Weisskopf, p. 627 (1952)) mit Hilfe eines Kernmodells erreicht, das schwache Kopplung zwischen den Nukleonen voraussetzt, so dass bei dem γ-Übergang nur ein einzelnes Nukleon seine Quantenzahlen ändert.

Ganz ungefähr (innerhalb eines Faktors 10 bis 100) ist die partielle, mittlere Lebensdauer τ_{el} (ein Mass für die Emissionswahrscheinlichkeit) gegeben durch

$$\frac{1}{\tau_{el}} = \frac{2\pi\nu}{137} \cdot \left(\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^{2\ell} \cdot S \qquad (11.12)$$

worin ν = Frequenz des γ-Strahls (Energie $E_\gamma = h\nu$)

$R = R_0 A^{1/3}$ = Kernradius

$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}$; $\lambda = \frac{12,4}{E_\gamma (\text{keV})}$ Å = die Wellenlänge des γ-Strahls.

S ist ein statistischer Faktor:

$$S = \frac{2(\ell+1)}{\ell\left[(2\ell+1)!!\right]^2}\left(\frac{3}{\ell+3}\right)^2 \qquad (11.13)$$

mit $(2\ell + 1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\ell - 1)(2\ell + 1)$.

Dieser Wert von τ_{el} kann nur als eine Abschätzung des minimalen Wertes für die theoretische Lebensdauer eines Niveaus gegen γ-Emission angesehen werden.

Für die numerische Berechnung aus (11.12) ist die Lebensdauer

$$\tau_{el} = \left[\frac{137}{E_\gamma/m_e c^2}\right]^{2\ell+1}\left[\frac{e^2/m_e c^2}{R_0 A^{1/3}}\right]^{2\ell} \cdot \frac{\hbar}{m_e c^2} \cdot \frac{1}{S} \qquad (11.14)$$

$$\boxed{\tau_{el} \approx \left[\frac{70}{E_\gamma^{(\text{MeV})}}\right]^{2\ell+1}\left[\frac{2}{A^{1/3}}\right]^{2\ell} \frac{1{,}29 \cdot 10^{-21}}{S} \ \text{sec}} \qquad (11.15)$$

wenn der klassische Elektronenradius

$$r_o \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}82 \text{ f} \approx 2\, R_o \qquad (11.16)$$

und

$$\frac{\hbar}{m_e c^2} = 1{,}29 \cdot 10^{-21} \text{ sec} \qquad (11.17)$$

gesetzt wird. Ferner ist

$$\frac{1}{S} = 4 \quad \text{für } \ell \doteq 1$$
$$= 2{,}1 \cdot 10^2 \quad \text{"} \quad \ell = 2$$
$$= 1{,}6 \cdot 10^4 \quad \text{"} \quad \ell = 3$$
$$= 1{,}9 \cdot 10^6 \quad \text{"} \quad \ell = 4$$
$$= 3{,}2 \cdot 10^8 \quad \text{"} \quad \ell = 5$$

Diese schnelle Zunahme von $\frac{1}{S}$ mit steigendem ℓ zeigt, dass die partielle Lebensdauer τ_{el} sehr schnell mit steigendem ℓ zunimmt und ebenso die Zerfallszeit deutlich abnimmt, d.h. γ-Zerfall hoher Multipolordnung ℓ ist äusserst unwahrscheinlich.

Beispielsweise sind die für einen mittelschweren Kern (A ~ 100) als Funktion der γ-Energie E_γ berechneten Lebensdauern τ_{el} (Fig. 11.8):

Tab. 11.2

E_γ	τ_{el} (sec) für				
	E1	E2	E3	E4	E5
0,1 MeV	10^{-13}	10^{-6}	10^{2}	10^{9}	gross
1 MeV	10^{-15}	10^{-10}	10^{-5}	1	10^{5}
10 MeV	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}

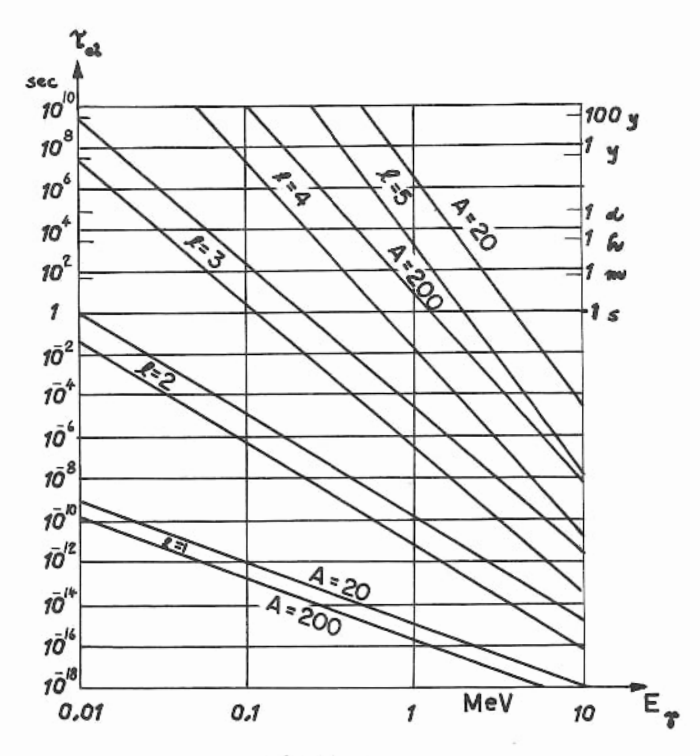


Fig. 11.8

11.8.2 Magnetische Multipole

Die Emissionswahrscheinlichkeit für diese ist kleiner als die für elektrische Multipole unter vergleichbaren Bedingungen, und zwar etwa um einen Faktor $(\frac{v}{c})^2$ für Dipolstrahlung. v ist die Geschwindigkeit der elektrischen Ladungen, die für die periodischen Änderungen der Stromdichte verantwortlich sind. Die Stromdichte ist von der Grössenordnung $\frac{v}{c} \cdot \rho$ (ρ = Ladungsdichte); auf deren Fluktuationen beruht die magnetische Multipolstrahlung.

Weisskopf schätzte das Verhältnis der partiellen Lebensdauern zwischen magnetischen und elektrischen γ-Übergängen gleicher Energie, gleicher Multipolordnung und am gleichen Kern, sehr ungefähr auf

$$\boxed{\frac{\tau_m}{\tau_{el}} \approx K \left[\frac{R}{\hbar / M_p c} \right]^2 \approx 4,4 . A^{2/3}} , \qquad (11.18)$$

worin $K = \text{const} \approx \frac{1}{10}$ von den magnetischen Eigenmomenten der Nukleonen herrührt, $R \approx 1,4\, A^{1/3}$ f der Kernradius und die Compton-Wellenlänge des Nukleons $\frac{\hbar}{M_p c} = 0,211$ f ist.

Das Verhältnis ist unabhängig von E_γ und der Multipolordnung ℓ; sein Wert ist etwa 30 für A = 20 und etwa 150 für A = 200.

11.9 Resonanzabsorption von γ-Strahlung

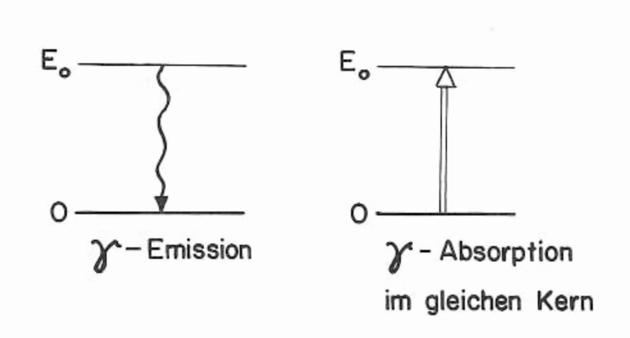


Fig. 11.9

Resonanzabsorption tritt im Prinzip dann auf, wenn die bei einem Zerfall eines angeregten Niveaus in in den Grundzustand emittierte γ-Strahlung von Kernen der gleichen Art wieder absorbiert wird (Fig. 11.9). Dieser Prozess, der auch als KERNFLUORESZENZ bezeichnet wird, findet praktisch nur zwischen dem ersten angeregten Niveau und dem Grundzustand statt.

Der Wirkungsquerschnitt für Resonanzabsorption ist vergleichsweise zu normalen Absorptionsquerschnitten ausserordentlich gross, aber nur innerhalb des engen Energieintervalls an der Resonanzstelle.

Wenn die mittlere Lebensdauer τ des ersten Niveaus gegenüber γ-Zerfall gross ist, dann ist die Hälfte der Energiehalbwertsbreite Γ_0 klein, d.h. die Anregungsenergie besitzt einen sehr scharfen Wert, wie aus dem Unbestimmtheitsprinzip

$$\Delta E . \Delta t \sim \hbar \qquad (11.19)$$

$$2\Gamma_0 . \tau \sim \hbar \qquad (11.20)$$

folgt.

Man kann also prinzipiell äusserst hohe Q-FAKTOREN erhalten, die als

$$Q \equiv \frac{\nu}{2\Delta\nu} = \frac{E}{\Delta E} = \frac{E}{2\Gamma_0} \qquad (11.21)$$

definiert sind. Der Q-Faktor ist ein Mass für die Stärke der Resonanzabsorption unter idealen Verhältnissen (Fig. 11.10), z.B. für Fe^{57} ist

$E_0 = 14{,}4$ keV; $\tau = 0{,}10\,\mu$sec

also

$Q = 1{,}5 \cdot 10^{12}$

und für Zn^{67}:

$Q = 0{,}95 \cdot 10^{15}$.

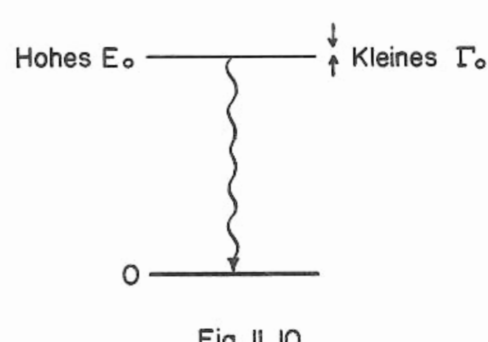


Fig. 11.10

In den meisten Fällen von γ-Emission wird jedoch der Resonanzeffekt durch folgende Nebenerscheinungen beeinträchtigt:

(a) Die γ-Strahlung wird mit einer Energie E_γ emittiert, die kleiner als die Anregungsenergie E_0 ist. Denn der emittierende Kern nimmt eine Rückstossenergie $E_R = \frac{1}{2} M v_R^2$, d.h.,

$$E_R = \frac{E_0^2}{2Mc^2}$$

auf, wobei M die Masse des Kerns ist,

$$\left(M - \frac{E_\gamma}{c^2}\right) v_R = \frac{E_\gamma}{c}, \qquad (11.21')$$

und $E_\gamma = E_0 - E_R$. (11.22)

Dadurch wird die Resonanzlinie von E_0 zu einer niedrigeren Energie E_γ hin verschoben (Fig. 11.11).

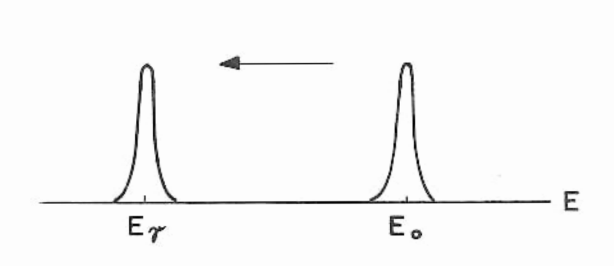


Fig. 11.11

(b) Die Linie wird durch DOPPLER-EFFEKT infolge der thermischen Bewegung der emittierenden Kerne verbreitet (Fig. 11.12).

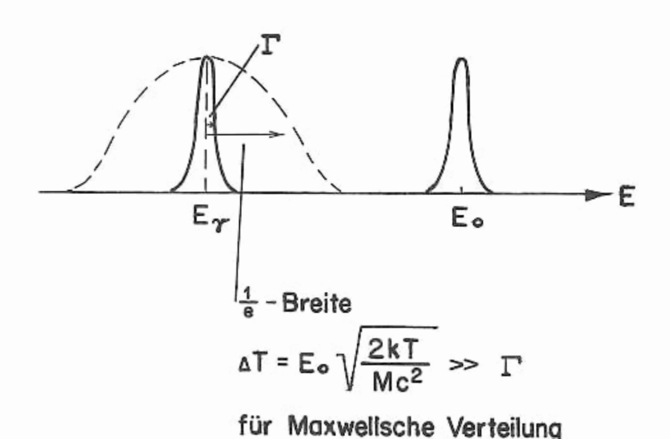


Fig. 11.12

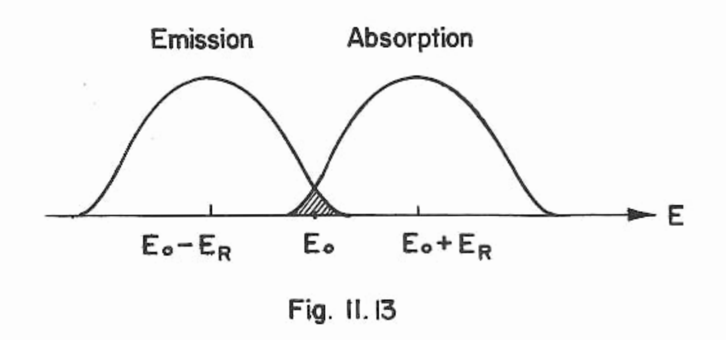
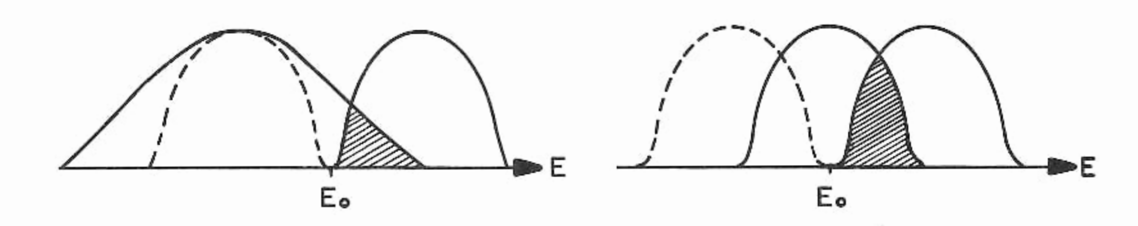


Fig. II.13

Ähnliche Effekte treten bei der Absorption der γ-Strahlung auf, so dass Emissions- und Absorptionsspektrum zumeist die Form wie in Fig. 11.13 haben. Diese Kurven stellen die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für Emission und Absorption von der γ-Energie dar.



a) Verbreitetes Emissionsspektrum

b) Verschobenes Emissionsspektrum

Fig. II.14

Resonanzabsorption ist auf den kleinen Bereich um E_o beschränkt, in dem sich die Kurven überlappen; sie ist, wie man zumeist findet, verschwindend klein.

In früheren Versuchen (z.B. Moon, Proc.Phys.Soc. 1951, 64, 76; 1953, 66A, 585) bemühte man sich, die Überlappung durch künstliche Verbreiterung oder Verschiebung des Emissionsspektrums (Fig. 11.14) zu erhöhen, indem man den Emitter heizte oder ihn auf einer rotierenden Trommel anbrachte, so dass deren Bewegung die Rückstossverschiebung der γ-Linie kompensierte. Aber trotzdem blieb die Intensität der Resonanz-Absorption niedrig. Dabei lag Q weit unter seinem optimalen Wert $\frac{E_o}{2\Gamma_o}$.

11.10 Mössbauer-Effekt

Bei diesem Effekt (Mössbauer, Naturwiss. 1958, 45, 538) findet Emission und Resonanzabsorption von γ-Strahlung genau bei der Niveauenergie E_o und der natürlichen halben Energiehalbwertsbreite Γ_o statt. Infolge der unverminderten Energieschärfe erreicht der Q-Faktor seinen optimalen Wert, und da Emissions- sowie Absorptionslinie nicht gegeneinander verschoben sind, ist die Überlappung und demzufolge der Resonanzeffekt sehr gross. Diese rückstossfreie Linie wird als MÖSSBAUER-LINIE bezeichnet.

Das Problem des Rückstosses wurde auf folgender Weise überwunden: Bekanntlich führt eine Vergrösserung der Masse M des Emitters zu einer Erhöhung der Trägheit und damit einer Verringerung der Rückstossenergie $E_R = \frac{E_o^2}{Mc^2}$. Das lässt sich dadurch erreichen, dass der emittierende Kern nicht mehr "frei", sondern in einem Kristall gebunden ist, so dass bei der Emission eines Photons 10^5 - 10^9 Atome gemeinsam als Rückstosspartner dienen. Also ist die Verschiebung E_R von Emissions- und Absorptionslinie verschwindend klein gegenüber der Linienbreite.

Der Energieaustausch zwischen Photon und Emitter ist in einem isotropen Kristall hinsichtlich dessen völlig symmetrisch, dass der Kristall, wenn er nichts von der Energie E_o aufnehmen kann, auch keine Energie abgeben darf, so dass $|\Delta E| = 0$, also die halbe Energiebreite gleich Γ_o ist. Für die Mössbauer-Linie tritt also automatisch keine Doppler-Verbreiterung erster Ordnung auf.

Nicht alle γ -Quanten ($\sim 40\%$) fallen in den Bereich der rückstossfreien Mössbauer-Linie; sie sind dadurch in der Energie sehr scharf definiert und haben einen hohen Q-Faktor. Daneben ist stets ein breites Doppler-Kontinuum von nicht-rückstossfreien γ-Quanten als Untergrund vorhanden, das aber durch tiefe Temperaturen verringert werden kann. Dieses existiert wegen der nicht-verschwindenden Nullpunktsenergie sogar bei der Temperatur T = 0.

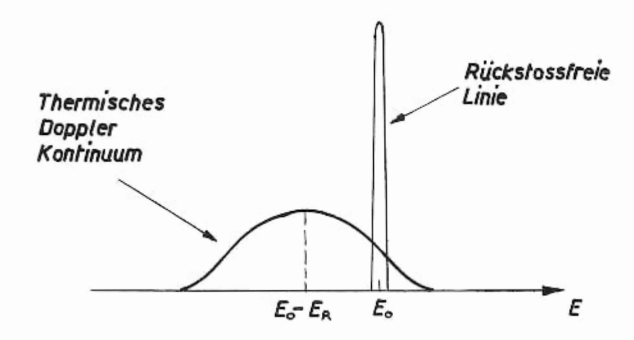


Fig. 11. 15

Die relativen Flächen unter den Linien in Fig. 11.15 entscheiden, ob die Mössbauer-γ-Quanten gegenüber dem Untergrund vorherrschen und infolgedessen auch nachweisbar sind.

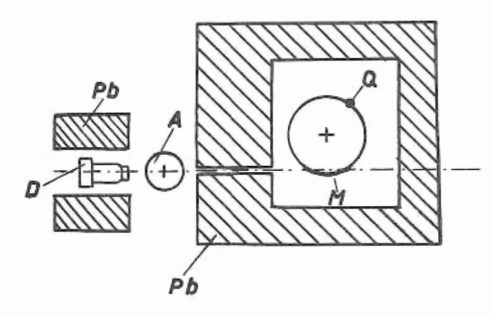


Fig. 11.16

A - Absorberkryostat

Q - Rotierender Kryostat mit Quelle

D - Szintillationsdetektor

M - Teil des bei der Messung ausgenützten Rotationskreises der Quelle.

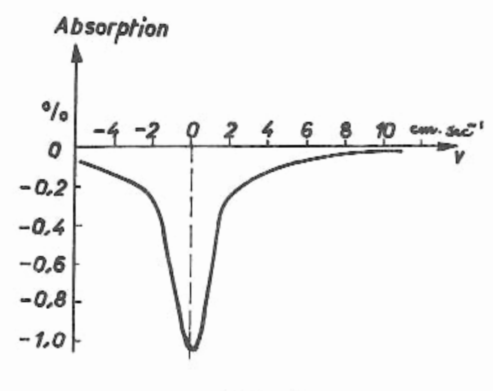


Fig. 11.17

Mössbauer konnte diesen Effekt zum ersten Mal an der 129-keV-Linie von Ir^{191} bei $88^{o}K$ zeigen wo $Q \approx 1,04 \cdot 10^{10}$ ist. Die experimentelle Anordnung ist in Fig. 11.16 wiedergegeben. Das Ergebnis ist in Fig. 11.17 gezeigt, wo die Resonanzabsorption als Funktion der Geschwindigkeit der Quelle aufgetragen ist. Es ist ersichtlich, dass die Absorption maximal ist, wenn die Quelle sich in Ruhe befindet. Der Rückstoss des in den Kristall eingebetteten, emittierenden Kerns ist null.

Die theoretische Behandlung des Effektes basiert auf einer früheren Theorie von Lamb, der die Debyesche Kontinuumstheorie für die Untersuchung des Neutroneneinfangs in Festkörpern benützte. Diese ergibt, dass der Bruchteil f aller γ-Übergänge, die bei einem gegebenen, zerfallenden Kern in die rückstossfreie Linie fallen, gleich

$$f(T) = \exp\left\{-\frac{3}{2}\frac{E_R}{k\theta}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi T}{\theta}\right)^2\right]\right\} \qquad (11.23)$$

ist, wo k die Boltzmann-Konstante, θ die Debye-Temperatur und T die absolute Temperatur des Emitters ist.

Wie man sieht, hängt f stark von der Emittertemperatur T ab und ist bei T = 0 ein Maximum. Damit f gross ist, muss θ gross und E_R niedrig sein. Es ist zu beachten, dass an E_o widersprechende Forderungen gestellt werden. Denn für kleines $E_R = \frac{E_o^2}{Mc^2}$ muss einerseits E_o klein sein (und M gross), aber für grosses $Q = \frac{E_o}{2\Gamma_o}$ andererseits gross. Geeignete Emitterkerne sollten wenn möglich keine anderen konkurrierenden γ-Übergänge, kleine Konversionskoeffizienten und keine Feinstruktur-Aufspaltung haben. Die letzte Forderung hat man noch nicht erfüllt gefunden; in jeder anderen Hinsicht sind Fe^{57} (mit $f \approx 0,63$ bei Raumtemperatur) und Zn^{67} die geeignetsten Kerne (Schiffer u. Marshall, PRL 1959, 3, 556; Pound u. Rebka, PRL 1960, 4, 274 u. 337; Craig, Nagle u. Cochran, PRL 1960, 4, 561).

Die ausserordentliche Empfindlichkeit des Mössbauer-Effektes, die durch grosse Q-Faktoren ausgezeichnet ist, wurde für eine Zahl von Anwendungen herangezogen, die unten kurz beschrieben werden; aber andererseits erfordert sie die strikte Beachtung von Vorsichtsmassnahmen bei experimentellen Untersuchungen, um unerwünschte Störungen zu vermeiden, wie beispielsweise die folgenden:

(a) Änderung der Kernmasse bei γ-Emission und Absorption. Die Änderung der γ-Energie ist dabei (Josephson, PRL 1960, 4, 341)

$$\Delta E_\gamma = - \frac{E_\gamma}{Mc^2} \cdot \langle E_{kin} \rangle \qquad (11.24)$$

wo $\langle E_{kin} \rangle$ der Erwartungswert der kinetischen Energie pro Atom des Gitters ist.

(b) Unterschiede der Debye-Temperatur θ zwischen Emitter und Absorber. Für Zn^{67} bewirkt eine Differenz von $\Delta\theta = 0{,}65\,^\circ K$ eine Linienverschiebung um eine halbe Halbwertsbreite Γ_0.

(c) Temperaturunterschiede zwischen Emitter und Absorber. Dies stellt den bisher einzigen Fall eines relativistischen Wärmeeffektes dar; er kommt durch die Verteilung der verschiedenen thermischen Geschwindigkeiten der emittierenden und absorbierenden Kerne zustande, die als Maxwell-Verteilung mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{M}} \qquad (11.25)$$

angenommen werden kann. Dann ist

$$\bar{\beta} \equiv \frac{\bar{v}}{c} = \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}} \; . \qquad (11.26)$$

Da die Geschwindigkeitsverteilung isotrop ist, verschwindet die insgesamt resultierende Doppler-Verschiebung erster Ordnung; aber die von zweiter Ordnung, die durch den Faktor $\sqrt{1-(\bar{\beta})^2}$ charakterisiert wird, verschwindet nicht, sondern ist von der Grösse

$$\sqrt{1 - \frac{2kT}{Mc^2}} = \sqrt{1 - 8.10^{-12}} \qquad (11.27)$$

für Fe^{57} bei $300\,^\circ K$; die Störung, die durch diesen Term ausgedrückt wird, ist hinreichend gross, um die Resonanz-Absorption merklich zu beeinflussen.

Um die Empfindlichkeit gegenüber der Frequenz zu zeigen, ist es von Interesse, die Geschwindigkeit $v_{1/2}$ zu berechnen, die durch den (longitudinalen) Doppler-Effekt erster Ordnung die γ-Linie um eine halbe Halbwertsbreite Γ_0 verschiebt:

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta \nu}{\nu} = \frac{v_{1/2}}{c} = \frac{\Gamma_0}{E_0} = \frac{1}{2Q} \; . \qquad (11.28)$$

Dann ist

$$v_{1/2} = \frac{c}{2Q} = \begin{cases} 1{,}5 \ \text{cm/sec für } Ir^{191} \\ 10^{-2} \ \text{cm/sec für } Fe^{57} \\ 1{,}6 \cdot 10^{-5} \ \text{cm/sec für } Zn^{67} \ . \end{cases}$$

Wenn also eine relative Bewegung zwischen Emitter und Absorber von etwa dieser Grössenordnung stattfindet, dann wird die Resonanz-Absorption merklich verringert, d.h. die durch den Absorber hindurchgelassene Intensität wird grösser und die im Absorber gestreute vermindert.

11.11 Anwendungen des Mössbauer-Effekts

11.11.1 Allgemeine Relativitätstheorie

Die Frequenzempfindlichkeit veranlasste neue Untersuchungen über das Äquivalenzprinzip, das eines der Ecksteine der allgemeinen Relativitätstheorie bildet. Bekanntlich erfährt elektromagnetische Strahlung beim Durchqueren einer Potentialdifferenz $+\Delta\varphi$ im Gravitationsfeld, d.h. beim Durch"fallen" des Gravitationsfeldes, eine relative Frequenzverschiebung

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} \cong \frac{g\,d}{c^2} = 1{,}09 \cdot 10^{-18}\, d \quad (\text{cm}) \qquad (11.29)$$

worin g die Beschleunigung im Gravitationsfeld und d die Höhendifferenz ist.

Man kann dies leicht aus der elementaren Photonentheorie einsehen. Ein Photon der Frequenz ν hat die Energie $h\nu$ und man kann ihm demzufolge eine Masse $\frac{h\nu}{c^2}$ zuordnen. Die beim Durchqueren der Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ aufgenommene Energie ist

$$\delta E = \text{Masse} \cdot \Delta\varphi = \frac{h\nu}{c^2} \cdot \Delta\varphi \qquad (11.30)$$

und diese Energiezunahme tritt als Frequenzzunahme

$$\delta\nu = \frac{\delta E}{h} = \nu \cdot \frac{\Delta\varphi}{c^2} \qquad (11.31)$$

in Erscheinung, so dass

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{|\text{grad}\,\varphi| \cdot d}{c^2} = \frac{g\,d}{c^2} \ . \qquad (11.32)$$

Die Höhe $d_{1/2}$, bei deren Durchquerung die γ-Strahlung unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde eine Linienverschiebung um eine halbe Halbwertsbreite erfährt, ist gegeben durch

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = 1{,}09 \cdot 10^{-18}\, d_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{E_0} \qquad (11.33)$$

so dass

$$d_{1/2} = \begin{cases} 3 \ \text{km für } Fe^{57} \\ 4{,}8 \ \text{m für } Zn^{67} \ . \end{cases}$$

In diesem Fall handelt es sich um eine Violettverschiebung, d.h. um eine Verschiebung zu höheren Frequenzen hin.

Die ersten Ergebnisse wurden von Cranshaw, Schiffer u. Whitehead (PRL 1960, 4, 163) veröffentlicht, die die 14,4-keV-Linie von Fe^{57} und eine Höhendifferenz von 12,5 m benützten. Diese wurden später durch Messungen von Pound u. Rebka (PRL 1960, 4, 337) übertroffen, die eine Höhendifferenz von 22 m benützten und Vorsichtsmassnahmen trafen, um die Gleichheit von Emitter- und Absorbertemperatur sicherzustellen, da eine Temperaturdifferenz von 0,6°K eine Frequenzverschiebung von der gleichen Grössenordnung wie die Gravitationsverschiebung hervorrufen würde. Ihr Experiment ergab $\frac{\delta\nu}{\nu} = (5,13 \pm 0,51)\, 10^{-15}$ im Vergleich zu dem theoretischen Wert $\frac{\delta\nu}{\nu} = 4,92 \,.\, 10^{-15}$, woraus

$$\frac{(\delta\nu)_{exp}}{(\delta\nu)_{th}} = 1,05 \pm 0,10.$$

11.11.2 Kern-Zeeman-Effekt bei γ-Strahlung

Die Aufspaltung von γ-Spektrallinien durch das atomare magnetische Feld am Ort des Kerns wurde von Hanna, Heberle, Littlejohn, Perlow, Preston, Vincent (PRL 1960, 4, 177) gemessen (Fig. 11.18).

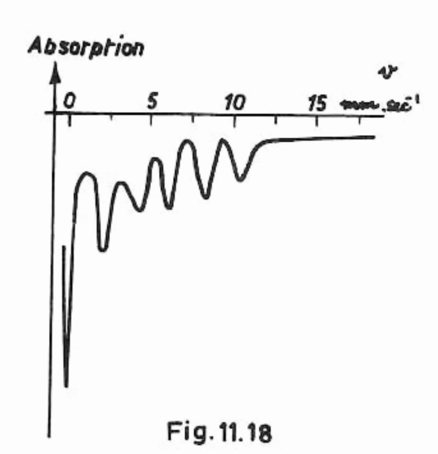


Fig. 11.18

Durch das atomare magnetische Feld am Ort des Kerns tritt eine Aufspaltung der γ-Linien auf. Dieser Kern-Zeeman-Effekt gibt in gleicher Weise zur Aufspaltung der Mössbauer-Linie Anlass. Der entsprechende Verlauf der Resonanzabsorption ist aus Fig. 11.18 ersichtlich. Aus der Breite der Zeeman-Aufspaltung lässt sich die effektive Grösse dieses magnetischen Feldes ermitteln. Für Fe^{57} wurde auf diese Weise der Wert $3,3 \,.\, 10^{5}$ Oersted gefunden, der beachtlich über dem Sättigungswert von ferromagnetischem Eisen liegt.

11.11.3 Polarisationsanalyse

Die Empfindlichkeit des Mössbauer-Effekts zeigt seine Fähigkeit zur Polarisations-Analyse, die die normalen Untersuchungsmethoden mit Streuung in magnetisiertem Eisen bei weitem übertreffen. Man erwartet, dass er sich in Korrelationsexperimenten zwischen β- und zirkularpolarisierter γ-Strahlung verwenden lässt, um die $\frac{v}{c}$-Abhängigkeit dieser Korrelation sehr genau zu prüfen.

12. INNERE KONVERSION

12.1 Beschreibung der inneren Konversion

Ein angeregter Kern kann mit einem gebundenen Hüllenelektron in direkte Wechselwirkung treten, ihm seine Anregungsenergie übertragen und es auf diese Weise aus dem Atom hinauswerfen.

Es handelt sich bei diesem Prozess, der als INNERE KONVERSION (INTERNAL CONVERSION) bezeichnet wird, nicht um einen zweistufigen Vorgang, bei dem etwa zunächst ein γ-Quant vom Kern emittiert und anschliessend ein Hüllenelektron durch Übernahme der γ-Energie emittiert wird, sondern bei einem einstufigen Prozess, bei dem die Anregungsenergie des Kernes direkt dem Hüllenelektron übertragen wird. Er tritt als Konkurrenz zur normalen γ-Emission auf, besonders bei schweren Kernen, und wird durch dieselben Auswahlregeln für Drehimpuls und Parität bestimmt wie der γ-Zerfall (Abschnitt 11.6). Nur bei $0 \rightarrow 0$-Übergängen werden die Konversionselektronen überhaupt nicht von γ-Strahlung begleitet.

Die Emission eines Elektrons aus der K-Schale infolge dieser Wechselwirkung wird als K-KONVERSION bezeichnet und ähnlich für die L-, M-, N- ... Schalen als L-, M-, N- ... KONVERSION (Fig. 12.1)

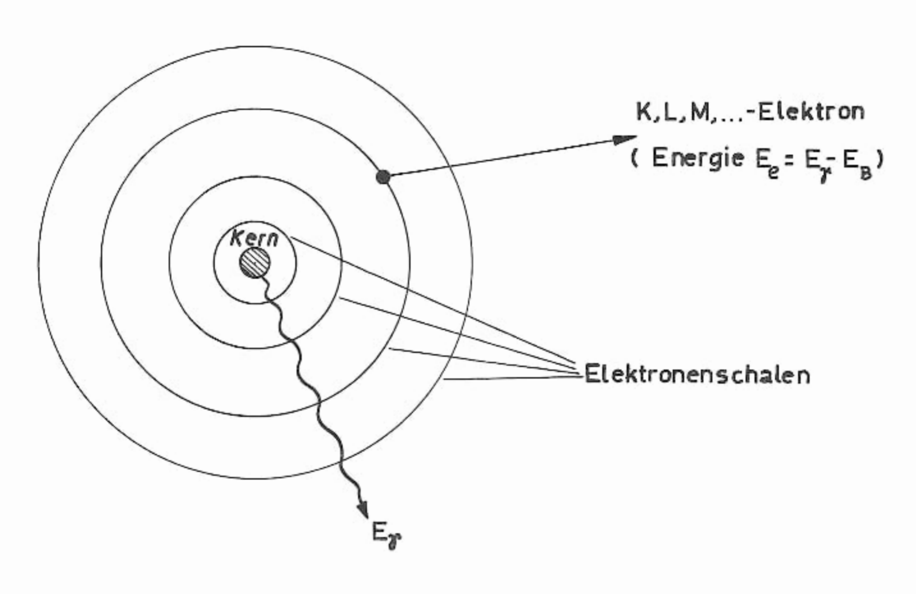


Fig. 12.1

Die Energie der Konversionselektronen ist

$$\boxed{E_e = E_\gamma - E_B} \qquad (12.1)$$

wobei E_γ die Anregungsenergie des Kerns und E_B die je nach Schale verschiedene Bindungsenergie des Elektrons ist. Man beachte, dass zwar die K-Schale einfach ist, die anderen Schalen jedoch in Unterschalen aufgeteilt sind, die L-Schale in drei, die M-Schale in fünf Unterschalen etc., deren Bindungsenergien etwas verschieden

voneinander sind. Dementsprechend ergibt sich folgendes Konversionsspektrum (Fig. 12.2):

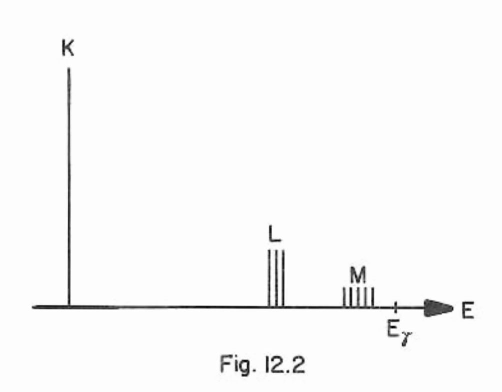


Fig. 12.2

Die innere Konversion lässt einen freien Platz in der Elektronenhülle zurück; das Atom wird also die charakteristischen Röntgenlinien oder Auger-Elektronen emittieren. Auger-Elektronen unterscheiden sich von Konversionselektronen dadurch, dass ihre Energie aus Übergängen in der Hülle anstatt im Kern stammt.

12.2 Konversionskoeffizienten

12.2.1 Partielle und totale Konversionskoeffizienten

Wenn ein angeregter Kern bei einem gegebenen Übergang eine Anzahl N_K Konversionselektronen aus der K-Schale und N_γ Photonen emittiert, dann wird das Verhältnis

$$\boxed{\alpha_K \equiv \frac{N_K}{N_\gamma}} \qquad (12.2)$$

als der PARTIELLE KONVERSIONSKOEFFIZIENT für die K-SCHALE, oder kürzer, als der K-KONVERSIONSKOEFFIZIENT bezeichnet; er bezieht sich auf beide K-Elektronen. Entsprechend ist für die L-Schale $\alpha_L = \frac{N_L}{N_\gamma}$ etc.

Die Elektronen von den verschiedenen Unterschalen lassen sich normalerweise experimentell nicht auflösen; infolgedessen wird beispielsweise α_L zumeist für alle Elektronen aus den L-Schalen angesehen. Dennoch unterscheidet man Konversionskoeffizienten für die einzelnen Unterschalen,

$$\alpha_K \;;$$

$$\alpha_{L_I}, \; \alpha_{L_{II}}, \; \alpha_{L_{III}} \;;$$

$$\alpha_{M_I}, \; \dots, \; \alpha_{M_V} \;; \; \text{etc.}$$

wobei

$$\alpha_L = \sum_{i=I}^{III} \alpha_{L_i} \quad \text{etc.} \qquad (12.3)$$

Der TOTALE KONVERSIONSKOEFFIZIENT für einen gegebenen Übergang des Kerns ist gleich der Summe der partiellen Konversionskoeffizienten,

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \dots = \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma}, \qquad (12.4)$$

wo N_e die totale Zahl der emittierten Elektronen und die λ die entsprechenden partiellen Zerfallskonstanten sind. Man beachte, dass die Konversionskoeffizienten α, α_K, ... in ihrer Definition prinzipiell auf N_γ und nicht auf $(N_\gamma + N_e)$ bezogen werden, so dass die α beliebige Werte $\gtrless 1$ annehmen können. Bei starker Konversion ist N_γ klein, also die Lebensdauer des angeregten Zustandes gegen γ-Zerfall allein lang. Umgekehrt ist bei schnellen γ-Zerfällen die Konversion schwach.

Die TOTALE ZERFALLSKONSTANTE λ für einen gegebenen Übergang ist die Summe der partiellen Zerfallskonstanten

$$\boxed{\lambda = \lambda_\gamma + \lambda_e = \lambda_\gamma (1 + \alpha)} \quad . \qquad (12.5)$$

12.2.2 Experimentelle Bestimmung der Konversionskoeffizienten

Bei einem einfachen γ-Übergang (Fig. 12.3) lässt sich der Konversionskoeffizient $\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma}$ dadurch bestimmen, dass man im Energiespektrum der Elektronen N_e aus der Intensität der Konversionslinie und N_γ aus der Intensität der Photoelektronen misst, die von den emittierten γ-Quanten durch Photoeffekt an anderen Atomen verursacht werden. Konversionselektronen und Photoelektronen aus dem gleichen Element lassen sich jedoch nicht direkt unterscheiden, weil sie gleiche Energien haben, wenn sie aus gleichen Schalen stammen.

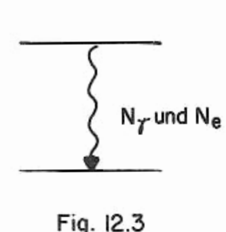


Fig. 12.3

Infolgedessen lässt man die Photoelektronen eher in einer dünnen Folie eines anderen Elements entstehen (Fig. 12.4), wofür man hohes Z bevorzugt, weil der Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt $\tau \sim Z^4$ bis Z^5 ist (Abschnitt 3.2.3). Dabei werden gleichzeitig die primären Konversionselektronen vollständig abgeschirmt, so dass man im Spektrometer die Intensität dieser Photoelektronen allein messen und daraus N_γ bestimmen kann, wenn diese Anordnung vorher mit γ-Quellen bekannter Intensität bei verschiedenen Energien geeicht wurde. In diesem Verfahren wird also N_e direkt und N_γ indirekt gemessen.

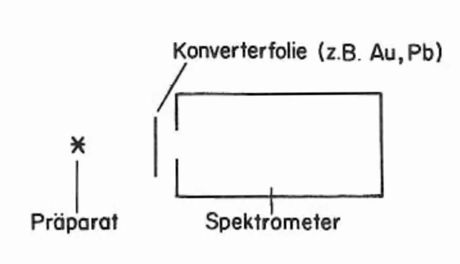


Fig. 12.4

Umgekehrt lässt sich N_γ direkt und N_e indirekt bestimmen, indem man im γ-Spektrum die Intensitäten der γ-Linie und der charakteristischen Röntgenlinie vergleicht, die durch Auffüllen der von Konversion entstandenen Lücken emittiert werden. Bei diesem Verfahren muss jedoch der Fluoreszenz-Yield f bekannt sein (vgl. Fig. 3.10),

der die Anzahl der emittierten Photonen pro Lücke angibt. Dessen Werte sind jedoch sogar für die K-Schale sehr unsicher, und für die übrigen Schalen noch weniger bekannt.

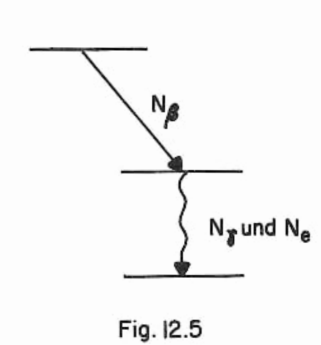


Fig. 12.5

Experimentell einfacher ist die Bestimmung von α, wenn der γ-Zerfall vor oder nach einem β-Zerfall stattfindet (Fig. 12.5). Da die Zahl der β-Teilchen pro Zeiteinheit gleich der Anzahl Konversionselektronen N_e plus der γ-Quanten N_γ in dem nachfolgenden Zerfall ist, entspricht die Fläche des β-Kontinuums F_β in Fig. 12.6 dem Wert $(N_e + N_\gamma)$. Um α zu bestimmen, braucht man nur die Fläche F_e unter den Konversionslinien mit F_β zu vergleichen:

$$A = \frac{F_e}{F_\beta} = \frac{N_e}{N_e + N_\gamma} \qquad (12.6)$$

woraus

$$\alpha \equiv \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{A}{1 - A} \,. \qquad (12.7)$$

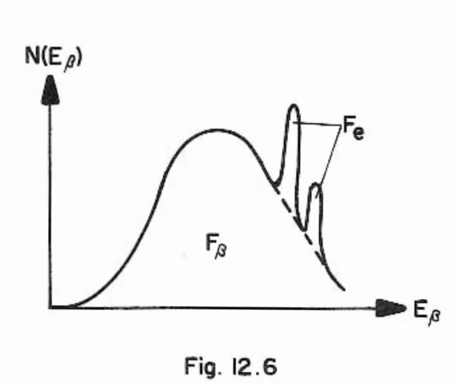


Fig. 12.6

Vorteile dieses Verfahrens sind, dass keine absolute Eichung erforderlich ist und dass bei genügender Auflösung die Koeffizienten α_K, α_L, ... einzeln gemessen werden können. -

Mit diesen Methoden lassen sich Werte für α von $3 \cdot 10^{-5}$ bis ∞ bestimmen, mit Ausnahme bei sehr leichten Kernen ($Z \lesssim 20$) und hohen γ-Energien ($E_\gamma \gtrsim 2{,}5$ MeV). Die experimentellen Fehler betragen jedoch auch im günstigsten Fall noch etwa 5%. Diese Genauigkeit reicht in vielen Fällen aus, um die Multipolordnung des Übergangs zu bestimmen.

Da die theoretische Berechnung der Absolutwerte von α mit beträchtlichen Unsicherheiten behaftet ist, verwendet man zur Bestimmung der Multipolordnung vorteilhafter die Verhältnisse der partiellen Konversionskoeffizienten, z.B. $\frac{\alpha_K}{\alpha_L}$ oder $\frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L + \ldots}$. Dabei lässt sich sogar der Multipolcharakter von gemischten Übergängen ermitteln, z.B. 80% M1 + 20% E2, weil dann mehr Bestimmungsgrössen zur Verfügung stehen.

12.3 Theorie der inneren Konversion

Es wurden viele theoretische Arbeiten über die innere Konversion ausgeführt (Segrè und Helmholtz: RMP 1949, 21, 271). Keine Theorie hat genaue Wert für α_K, α_L, ... geliefert. Die Ergebnisse der Theorie von Dancoff und Morrison (PR 1939, 55, 122) seien im Folgenden wiedergegeben. Für Übergangsenergien, die klein sind gegen $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV, worin die Bindungsenergie der K-Elektronen vernachlässigt worden ist, gelten folgende Näherungswerte.

Der partielle Konversionskoeffizient für die zwei K-Elektronen ist bei elektrischen Multipolen der Ordnung 2^{ℓ} (ℓ = 1, 2, 3, ...) näherungsweise

$$\alpha_K(E\lambda) \approx \frac{\ell}{\ell+1} Z^3 \left(\frac{1}{137}\right)^4 \left(\frac{2m_ec^2}{E_\gamma}\right)^{\ell+5/2} \qquad (12.8)$$

$$[\, m_ec^2 \gg E_\gamma \gg B_K \,] .$$

$\alpha_K(E\lambda)$ steigt, wie man sieht, mit Z und ℓ an und sinkt mit wachsender Übergangsenergie E_γ.

Der entsprechende Ausdruck für magnetische Multipole ist

$$\alpha_K(M\lambda) \approx Z^3 \left(\frac{1}{137}\right)^4 \left(\frac{2m_ec^2}{E_\gamma}\right)^{\ell+3/2} . \qquad (12.9)$$

$\alpha_K(M\lambda)$ zeigt also einen ähnlichen Verlauf wie $\alpha_K(E\lambda)$. Zumeist ist $\alpha_K(M\lambda) > \alpha_K(E\lambda)$ für gleiches ℓ und E_γ.

Für höhere Übergangsenergien gelten diese einfachen Ausdrücke nicht mehr; es lassen sich dort nur Abschätzungen durchführen.

Der Verlauf der berechneten K-Konversionskoeffizienten ist in Fig. 12.7 wiedergegeben.

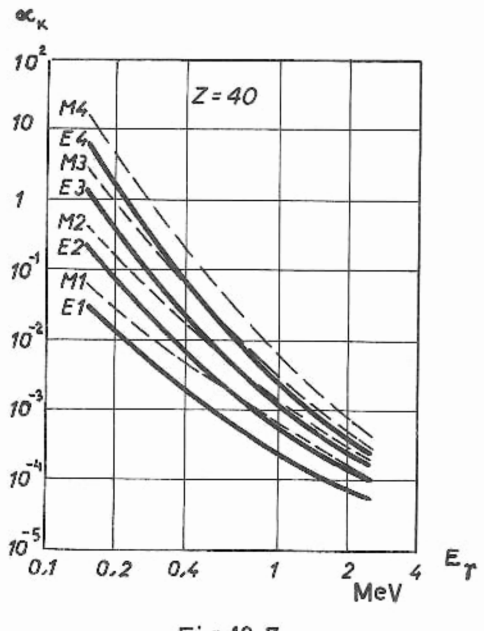


Fig.12.7

Das Verhältnis $\frac{\alpha_K}{\alpha_L}$ als Funktion der γ-Energie ist bei Z = 55 für verschiedene elektrische und magnetische Multipolordnungen in Fig. 12.8 wiedergegeben. Dieses Verhältnis ist nicht sehr stark von Z abhängig. Da die Kurven grösstenteils dicht beieinander liegen und sich einige überschneiden, liefert der Wert $\frac{\alpha_K}{\alpha_L}$ in vielen Fällen keine eindeutige Bestimmung der Multipolordnung. Dann müsste man das $\frac{\alpha_K}{\alpha_L}$-Verhältnis durch das Verhältnis $\frac{\alpha_{L_I}}{\alpha_{L_{II}}}$ oder $\frac{\alpha_{L_{III}}}{\alpha_{L_I}}$ ergänzen (Fig. 12.9).

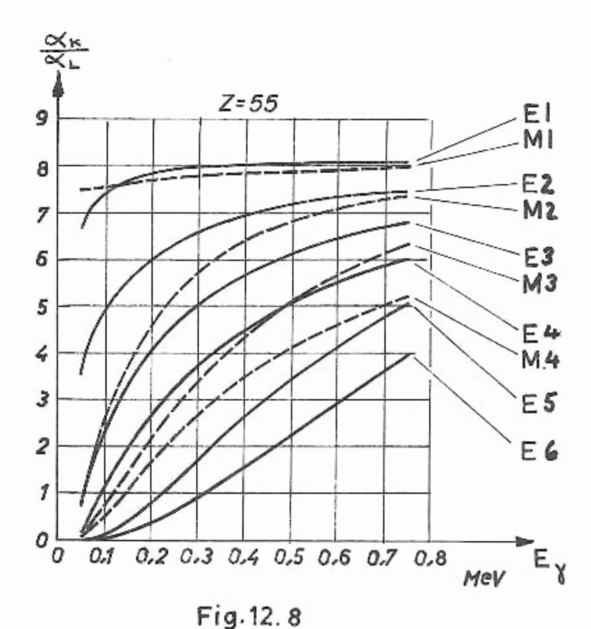


Fig.12.8

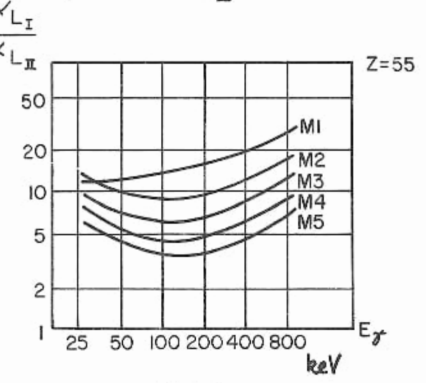


Fig. 12.9

Neuere Daten von Konversionskoeffizienten sind in den Tabellen von Sliv und Band angegeben, die von der Universität Illinois, USA, als Report 57 ICC K 1 und 58 ICC L 1 (1956) reproduziert worden sind. Sie enthalten die Daten von α_K für Z = 33 - 98 und von α_L für Z = 41 - 98.

Für den speziellen Fall eines 0 → 0, "no"-Übergangs gilt näherungsweise für die mittlere Lebensdauer τ der inneren Konversion

$$\tau \sim \frac{2 \cdot 10^{-4}}{Z^3} \left(\frac{4}{A^{1/3}} \right)^4 \sqrt{\frac{m_e c^2}{E_\gamma - E_B}} \quad \text{sec}, \qquad (12.10)$$

worin $E_\gamma - E_B$ die kinetische Energie des Konversionselektrons ist. Beispielsweise ist für $A \sim 64$, $Z \sim 30$ bei $E_\gamma \sim 1$ MeV die Lebensdauer $\tau \sim 5 \cdot 10^{-9}$ sec.

Obwohl die Zerfallszeiten des Kerns grundsätzlich durch Kerneigenschaften bestimmt sind, kommt also ein nicht vernachlässigbarer atomarer Beitrag hinzu, der die Tendenz hat, die Zerfallszeit zu verkürzen.

12.4 Auswahlregeln

γ-Emission wird durch Multipolordnungen ℓ charakterisiert, die die Auswahlregel

$$|I_i - I_f| \leq \ell \leq I_i + I_f \qquad (12.11)$$

befolgen. Den Konversionselektronen, die statt derer auftreten können, lässt sich jeweils dieselbe Multipolordnung ℓ zuordnen. Diese folgt also derselben Auswahlregel (12.11). Eine solche Zuordnung entspricht einer Zerlegung der Elektronenwelle in Partialwellen nach Legendre-Polynomen $P_\ell^m(\cos \vartheta)$. Ein 0 → 0 Übergang darf für Konversionselektronen auftreten, aber nur wenn $\Delta \pi$ = no.

Die PARITÄTSAUSWAHLREGEL

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Elektrischer Multipol} & : & \pi = (-)^{\ell} \\ \text{Magnetischer Multipol} & : & \pi = (-)^{\ell+1} \end{array}\right\} \qquad (12.12)$$

bestimmt, welche Multipolordnungen gleichzeitig auftreten können,

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta \pi = \text{no} & : & \text{M1, E2, M3, ...} \\ \Delta \pi = \text{yes} & : & \text{E1, M2, E3, ...} \end{array}\right\} \qquad (12.13)$$

Der Konversionskoeffizient α für eine gegebene Schale ist aus den Anteilen der verschiedenen erlaubten Multipolordnungen zusammengesetzt, beispielsweise für einen Übergang $\Delta \pi$ = no:

$$\alpha = a_1 \cdot \alpha(M1) + a_2 \cdot \alpha(E2) + a_3 \cdot \alpha(M3) + \dots \qquad (12.14)$$

mit

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 1 \qquad (12.15)$$

Die Terme niedrigster Ordnung werden durch $|I_i - I_f| \leq \ell$ und die höchster Ordnung durch $\ell \leq I_i + I_f$ festgelegt. Ähnlich wie bei dem γ-Zerfall treten praktisch nur die ersten in Erscheinung:

$$\boxed{\ell = \Delta I, \ \Delta I + 1.} \qquad (12.16)$$

Denn für einen gegebenen Multipoltyp, d.h. E oder M, ist die relative Intensität für Ordnungen ℓ und $\ell + 2$:

$$\frac{a_{\ell+2}}{a_\ell} \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 \ll 1 \qquad (12.17)$$

worin R der Kernradius und λ die Wellenlänge der Strahlung ist.

Beispielsweise ist für A = 200 bei E = 511 keV

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 \cong 3,2 \cdot 10^{-9} . \qquad (12.18)$$

Für den Fall $\Delta I = 0$, $\Delta \pi$ = "no" ist die Emission von γ-Strahlung verboten, aber E 0 - Konversionselektronen sind erlaubt (Elektrischer Monopol). M 0 - Konversionselektronen können jedoch nicht auftreten; denn das M 0 - Feld entspricht einem magnetischen Monopol. 0 $\rightarrow$ 0 - Übergänge sind möglich, wenn die Wellenfunktion des Elektrons im Kernbereich nicht verschwindet, wenn also die Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt des Elektrons im Kernvolumen verschieden von null ist.

Man kann einen Kern mit Spin null, der also keine ausgezeichnete Symmetrieachse hat, als eine geladene Kugel ansehen, die keine anderen elektrischen Momente als einen Monopol E 0 besitzt. Wenn der Spin im Endzustand auch null ist, dann ist die einzige äquivalente, klassische Bewegung ein periodisches, kugelsymmetrisches Pulsieren. Dieses kann kein wechselndes Potential ausserhalb der Kugel hervorrufen, weil die Ladung einer Kugel von aussen gesehen als im Mittelpunkt der Kugel vereinigt erscheint; es kann dabei also keine γ-Strahlung zustandekommen. Aber innerhalb der Kugel kann das Potential fluktuieren und eine direkte Energieübertragung zwischen Kern und Elektron ermöglichen. Solche Monopol-Konversionselektronen liefern einen zusätzlichen Beweis gegen die Annahme, dass die innere Konversion ein indirekter, zweistufiger Prozess ist.

12.5 Innere Paarbildung

Wenn die Anregungsenergie des Kerns grösser als $2\,m_e c^2 \approx 1$ MeV ist, dann tritt als Konkurrenzprozess zur einfachen inneren Konversion die unmittelbare Bildung eines Elektron-Positronpaares auf. Dieser einstufige Prozess wird als "INNERE PAARBILDUNG" oder "INNERE PAARKONVERSION" bezeichnet.

Innere Paarbildung kann überall im Coulomb-Feld stattfinden; ihre Wahrscheinlichkeit ist in dem Abstand

$$r_p = a_0 \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \qquad (12.19)$$

am grössten, wobei a_o der Radius der K-Schale ist. Die Wahrscheinlichkeit der inneren Paarbildung ist dann am grössten, wenn die Wahrscheinlichkeit der normalen inneren Konversion am kleinsten ist, d.h. bei hoher Übergangsenergie, kleinem Z und kleinem ℓ .

Theoretische Kurven und Messpunkte der Konversionskoeffizienten für innere Paarbildung sind in Fig. 12.10 dargestellt.

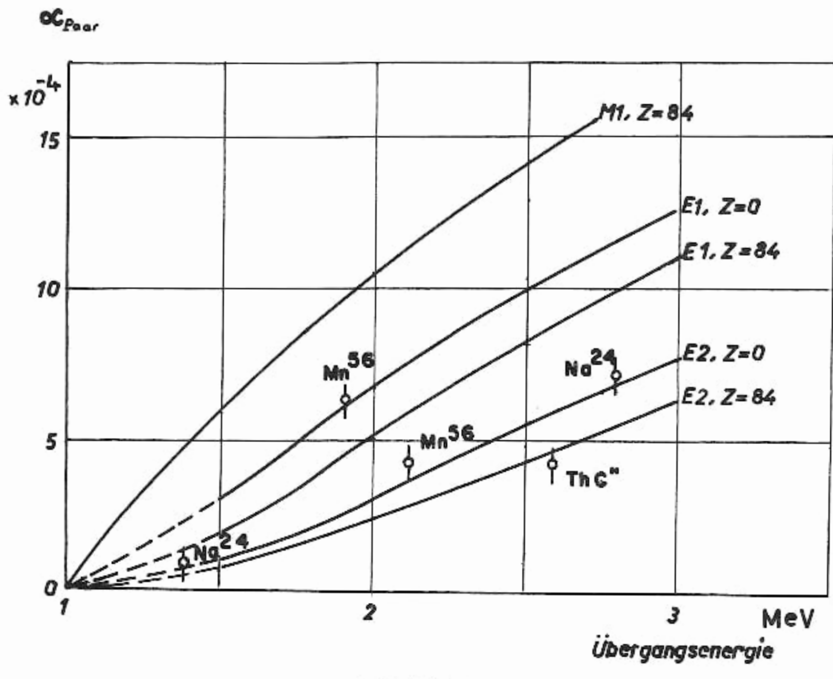
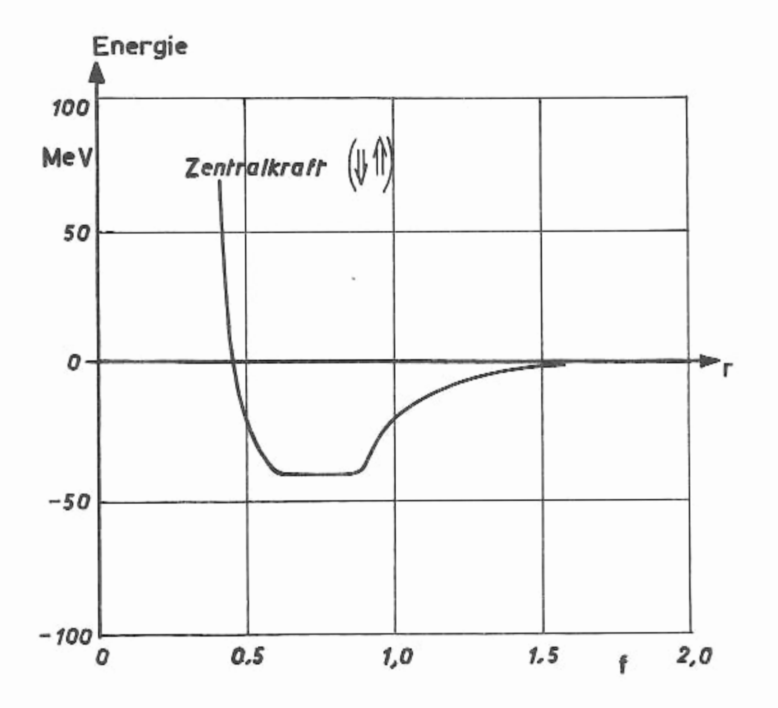


Fig.12.10

13. KERNKRÄFTE

13.1 Charakteristik der Kernkräfte

Aus der Tatsache, dass Protonen trotz der gegenseitigen Coulomb-Abstossung in stabilen Kernen gebunden sind, folgt, dass die anziehenden Kernkräfte stärker sind als die abstossenden elektrostatischen Kräfte. Gemäss den heutigen Kenntnissen ist bei einem Abstand von 1 f zwischen Proton und Proton die Kernkraft 35 mal so stark wie die elektrostatische und 10^{38} mal so stark wie die Gravitationskraft; bei kleineren Abständen wird das Verhältnis noch grösser. Unterhalb ~ 0,5 f wird sie jedoch zu einer stark abstossenden Kraft (Fig. 13.1).



Proton-Proton-Kraft

bei antiparallelen Spins.

Fig.13.1

Kernkräfte haben KURZE REICHWEITE (SHORT RANGE FORCES). Ihre Reichweite wird zu 1,4 f angenommen. Dennoch fällt sie in dieser Entfernung keineswegs auf null, sondern auf etwa ein Drittel ihres maximalen negativen Wertes. Erst bei etwa 4 f wird die Kernkraft verschwindend klein.

Andere beachtenswerte Eigenschaften sind:

(a) Ladungssymmetrie

(b) Ladungsunabhängigkeit

(c) Nicht-zentraler Charakter

(d) Sättigung.

Diese Eigenschaften werden anschliessend diskutiert.

13.2 Ladungssymmetrie und Ladungsunabhängigkeit

Es existieren zahlreiche Beweise für die LADUNGSSYMMETRIE (CHARGE SYMMETRY) der Kernkräfte, d.h. dass unter gleichen Bedingungen die Kraft zwischen zwei Neutronen gleich der Kraft zwischen zwei Protonen ist, wenn man von der rein elektrostatischen Coulomb-Wechselwirkung absieht, und ebenso für die LADUNGSUNABHÄNGIGKEIT (CHARGE INDEPENDENCE), d.h. dass unter gleichen Bedingungen die Kernkraft zwischen zwei beliebigen Nukleonen im Singulett-Zustand dieselbe ist, gleichgültig ob es sich um Protonen oder Neutronen handelt. Zusammenfassend:

LADUNGSSYMMETRIE	:	$F_{nn} = F_{pp}$
LADUNGSUNABHÄNGIGKEIT	:	$F_{nn} = F_{pp} = F_{np}$.

(13.1)

Die Ladungsunabhängigkeit ist gegenwärtig weniger sicher bestätigt. Für die Ladungssymmetrie hingegen liefern die Bindungsenergien der Spiegelkerne und andere Befunde aus Streuexperimenten gute Bestätigung. Beispielsweise sind bei dem Spiegelpaar $_1H^3$ und $_2He^3$ die Bindungskräfte im Kern wie in Fig. 13.2 zusammengesetzt.

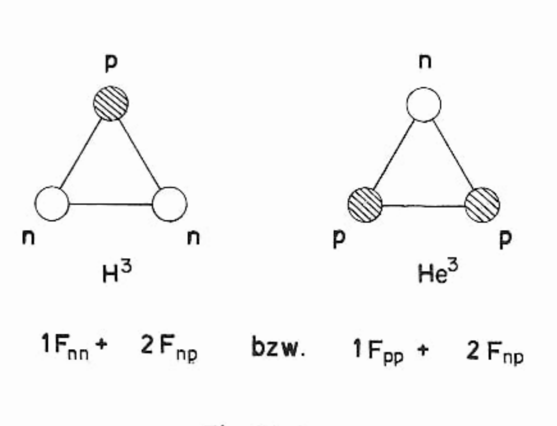


Fig. 13. 2

Wenn $F_{nn} = F_{pp}$, dann folgt, dass die Bindungsenergien einander gleich sein sollten. Es ist aber noch notwendig, den Coulomb-Beitrag und die Massendifferenz ($M_n - M_H = 0,784$ MeV) für die Ersetzung eines Protons durch ein Neutron zu berücksichtigen, die eine Differenz ΔE in den Bindungsenergien von Spiegelkernen verursachen.

Die Coulomb-Energie lässt sich bei Kenntnis der Ladungsverteilung im Kern berechnen. Insofern ist es für solche Betrachtungen eigentlich besser, schwerere Spiegelkerne zu untersuchen, weil man dann die Ladungsverteilung eher als homogen annehmen kann.

Die Coulomb-Energie für zwei punktförmige Ladungen e im Abstand r, also bei einer Bindung zwischen einem solchen Ladungspaar, ist

$$E = \frac{e^2}{r} . \qquad (13.2)$$

Bei Hinzufügen einer weiteren, also einer dritten Ladung e in demselben Abstand von den vorhandenen ergeben sich 2 zusätzliche Bindungen. Allgemein ergeben sich bei Hinzufügen der n-ten Ladung (n - 1) zusätzliche Bindungen. Für ein solches System mit Z Ladungen bestehen dann insgesamt

$$\sum_{n=1}^{Z} (n-1) = \frac{1}{2} Z (Z-1) \qquad (13.3)$$

Bindungen; dies ist gleich der Anzahl der kombinierbaren Ladungspaare.

Die Coulomb-Energie wäre dann

$$E = \frac{e^2}{r} \cdot \frac{Z(Z-1)}{2} \qquad (13.4)$$

unter der Annahme, dass alle r einander gleich sind. Die Abstände können jedoch

in einem Kern nicht alle einander gleich sein. Ein geeigneter Mittelwert $(\frac{1}{r})$ lässt sich durch Summation über alle Lagen eines Paares im Kern bilden; dieser ergibt sich zu $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R}$, wobei R der Kernradius ist.

Demzufolge ist die Coulomb-Energie eines Kernes mit Z Ladungen

$$E = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} \cdot Z(Z-1) . \qquad (13.5)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich unter Berücksichtigung der Diskretheit der Elementarladung: bei grossen Z geht Z (Z - 1) in Z^2 über, was einer kontinuierlich verteilten Ladung entspricht, wie es in der semiempirischen Massenformel angenommen wurde (1.25).

Die Differenz der Coulombenergie für die Spiegelkerne (A, Z) und (A, Z - 1) ist gemäss (13.5)

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} \left[Z(Z-1) - (Z-1)(Z-2) \right] \qquad (13.6)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} \cdot 2(Z-1) = 2a_c \frac{(Z-1)}{A^{1/3}} = 2 \cdot 0{,}595 \frac{Z-1}{A^{1/3}} \text{ MeV} . \qquad (13.7)$$

ΔE_c beträgt 0,13 MeV pro Nukleon für S^{35} und erreicht bei Pu^{238} den Wert 3,5 MeV pro Nukleon.

Die theoretische Massendifferenz in Energieeinheiten zwischen den Spiegelkernen (A, Z) und (A, Z - 1) ist also, wenn die Kernkräfte ladungssymmetrisch sind:

$$c^2 \cdot \Delta M = \Delta E = \Delta E_c - (M_n - M_H) c^2 \qquad (13.8)$$

$$\cong 1{,}2 \frac{Z-1}{A^{1/3}} - 0{,}78 \text{ MeV} . \qquad (13.9)$$

Diese Annahme ist, wie man aus dem Vergleich der theoretischen ΔE-Werte mit den experimentell bestimmten sieht, gerechtfertigt (Tab. 13.1):

Tab. 13.1

Spiegelpaar	ΔE_{th}	ΔE_{exp}
$C^{11} \xrightarrow{\beta^+} B^{11}$	1,95 MeV	1,98 MeV
$N^{13} \rightarrow C^{13}$	2,33	2,26
$0^{15} \rightarrow N^{15}$	2,68	2,70
$F^{17} \rightarrow 0^{17}$	3,02	3,02
$Ne^{19} \rightarrow F^{19}$	3,33	3,22
$Mg^{23} \rightarrow Na^{23}$	3,94	3,84

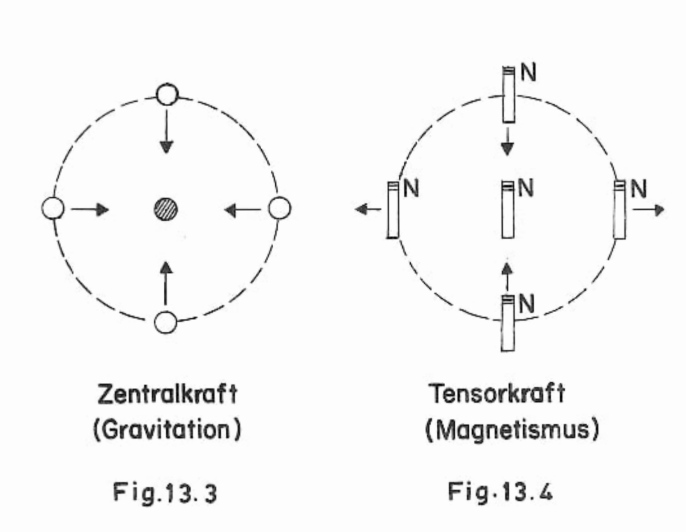
Man könnte andererseits R aus der Beziehung (13.7) und (13.8)

$$R = \frac{\frac{6}{5} e^2 (Z-1)}{\Delta E + (M_n - M_H)c^2} \qquad (13.10)$$

errechnen und ferner $R_o = RA^{-1/3}$. Für das Paar $Mg^{23} \rightarrow Na^{23}$ erhält man $R = 3{,}96$ f, und daraus $R_o = 1{,}4$ f in guter Übereinstimmung mit dem heutzutage als gültig angenommenen Wert.

13.3 Zentrale und nicht-zentrale Kräfte

Kräfte der Art wie die elektrostatischen und die Gravitationskräfte haben lange Reichweite, und gehen mit dem reziproken Quadrat des Abstandes; Kernkräfte nicht. Eine weitere Unterscheidung ist dadurch gegeben, dass jene Kräfte unabhängig von der Richtung der wechselwirkenden Körper sind (Fig. 13.3), während das für Kernkräfte nicht der Fall ist. Eine solche richtungsabhängige Kraft wird wegen ihrer mathematischen Eigenschaften als TENSORKRAFT bezeichnet: ein Beispiel einer solchen Kraft ist die zwischen magnetischen Dipolen, die von der relativen Orientierung der magnetischen Achsen abhängt (Fig. 13.4).



Zentralkraft (Gravitation) Fig.13.3

Tensorkraft (Magnetismus) Fig.13.4

Kernkräfte zeigen teilweise die Eigenschaften von Zentralkräften und teilweise von Tensorkräften. Für ein Nukleon gibt die Spinachse analog zur magnetischen Achse im obigen Beispiel eine bevorzugte Richtung an; sie ist Voraussetzung für tensorielle Wechselwirkung zwischen den Nukleonen, obwohl eine Spinrichtung selbst nicht automatisch eine tensorielle Wechselwirkung mit sich bringt. Der nicht-zentrale Anteil der Kernkraft lässt sich in zwei Klassen einteilen:

(a) reine Tensorkraft

(b) Spin-Bahnkraft.

Die letztere kommt aus der Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls der Nukleonen zustande. Für einen Kern mit dem Spin 1, der also von zwei Nukleonen mit parallelem Spin herrührt, kann der Spin parallel, senkrecht oder antiparallel zum Vektor des Bahndrehimpulses der Nukleonen stehen; es gibt also nicht nur eine relative Orientierung der Spins zueinander, sondern auch eine Orientierung zwischen Spin und Bahndrehimpuls und somit die Möglichkeit zu zwei Typen nicht-zentraler Kräfte.

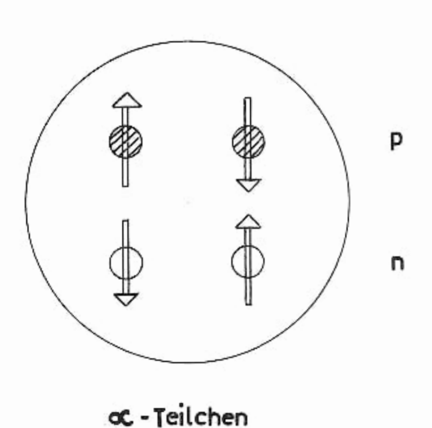
Wenn jedoch der zusammengesetzte Spin gleich null ist, dann verhält sich das System so, als gäbe es gar keine Spinkomponenten; dann besteht keine Bezugsrichtung:

Nicht-zentrale Komponenten der Kernkraft können also in diesem Fall nicht auftreten.

Im Deuteron haben die Nukleonen parallelen Spin; es existiert dort auch eine nicht-zentrale Kraft, wie sich durch Streuversuche von Nukleonen an Deuteronen nachweisen liess. Die dabei gewonnene Information ist jedoch nur auf Kräfte bei paralleler Spinorientierung und in verhältnismässig grossem Proton-Neutronabstand (~ 4 f) beschränkt, wie er sich durch die Ausdehnung des Deuterons nahelegt.

13.4 Sättigung der Kernkräfte

Wie bereits im Zusammenhang mit der semiempirischen Massenformel erörtert wurde, haben Kernkräfte Sättigungscharakter ähnlich den atomaren Valenzkräften. Dies ist eine Besonderheit von Austauschkräften, wie für Kernkräfte gezeigt werden wird (Abschnitt 14.1). Die Unabhängigkeit der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon von der Massenzahl (vgl. (1.22)) zeigt den Sättigungscharakter der Kernkräfte an.



α-Teilchen

Fig. 13.5

Spins zeigen die Tendenz, einander zu kompensieren. Beispielsweise sind beim α-Teilchen die Spins der beiden Protonen zueinander entgegengesetzt und ebenso die Spins der beiden Neutronen (Fig. 13.5).

Man könnte das in gewisser Hinsicht mit der Sättigung chemischer Kräfte vergleichen, bei denen sich Atome mit antiparallelem Elektronenspin anziehen und mit parallelem abstossen.

Ausserdem gibt es eine Sättigung der relativen Zahl von Protonen zu Neutronen, die vom Standpunkt des Ladungsaustausches behandelt werden kann.

13.5 Austauschkräfte

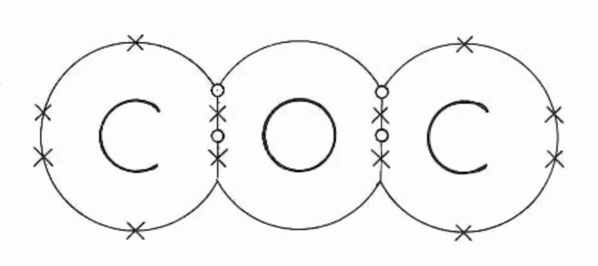


Fig. 13.6

Die chemische, kovalente Bindung lässt sich als durch Elektronenaustausch verursacht vorstellen. Die Valenzelektronen bilden durch gegenseitige Beteiligung an den Valenzschalen ("Electron Sharing") beispielsweise im CO_2 drei stabile Ringe mit je 8 Elektronen (Fig. 13.6).

Aus der Konzeption von Yukawa, dass die Kernkräfte durch einen Partikelaustausch zwischen den entsprechenden Nukleonenrümpfen (nucleon cores) zustandekommen, ergibt sich ein analoger Effekt. Diese Austauschteilchen sind heutzutage als π -Mesonen identifiziert (Fig. 13.7).

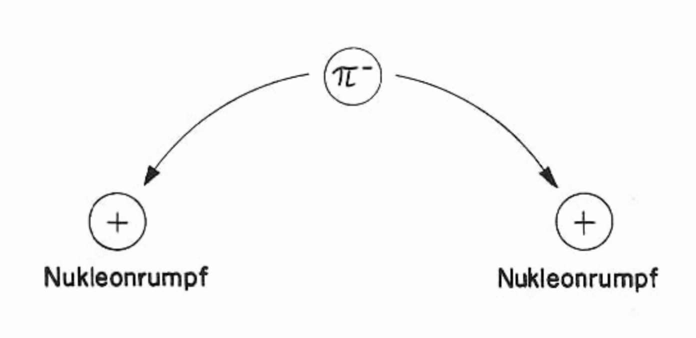


Fig.13.7

Der Wechsel des π -Mesons vertauscht die Rollen der beiden Nukleonen zu Proton oder Neutron und ist mit dem Zustandekommen einer Bindungskraft zwischen ihnen verbunden. Der Begriff des Mesonenaustausches wird ausführlich in Abschnitt 14.1 behandelt.

Es lassen sich folgende drei Arten von Austauschkräften unterscheiden. Wird die Zustands-Eigenfunktion als eine Funktion der Raum- und Spinkoordinaten ausgedrückt, dann sind für zwei Teilchen die folgenden Austauscharten möglich:

$$\psi(\vec{r}_1, \sigma_1 ; \vec{r}_2, \sigma_2) \rightarrow \begin{cases} \psi(\vec{r}_2, \sigma_1 ; \vec{r}_1, \sigma_2) & \text{"MAJORANA"} \quad (r \text{ vertauscht}) \\ \psi(\vec{r}_1, \sigma_2 ; \vec{r}_2, \sigma_1) & \text{"BARTLETT"} \quad (\sigma \text{ vertauscht}) \\ \psi(\vec{r}_2, \sigma_2 ; \vec{r}_1, \sigma_1). & \text{"HEISENBERG"} \quad (r \,\&\, \sigma \text{ vertauscht}) \end{cases}$$

Kräfte mit kurzer Reichweite ohne Austausch lassen sich dann durch

$$\psi(\vec{r}_1, \sigma_1 ; \vec{r}_2, \sigma_2) \longrightarrow \psi(\vec{r}_1, \sigma_1 ; \vec{r}_2, \sigma_2)$$

symbolisieren; diese werden als "WIGNER-KRÄFTE" bezeichnet. Der Austauschoperator für Wigner-Kräfte ist gleich 1; er lässt die Kraft beim Austausch von Raum- und Spinkoordinaten unverändert.

Die Austauschkräfte vom Majorana- und Heisenberg-Typ haben Sättigungscharakter:

Majorana-Kräfte entsprechen dem Bild des π -Mesonenaustausches. Sie sind anziehend für zwei Teilchen mit geradzahligem gegenseitigem Bahndrehimpuls, also bei S-, D-, ... Zuständen, und abstossend für Wechselwirkungen mit ungeradzahligem Bahndrehimpuls, also bei P-, F-, ... Zuständen.

Heisenberg-Kräfte sind bei Triplett-Wechselwirkungen (parallele Spins) anziehend und bei Singulett-Wechselwirkungen (antiparallele Spins) abstossend. Sie sind mit den gegenwärtigen Vorstellungen über die Natur der Kernkräfte nicht vereinbar. Eine gesättigte Einheit ist also keineswegs ein Deuteron, sondern eher ein α -Teilchen.

13.6 Untersuchungen der Kernkräfte durch Streuexperimente

Streuexperimente mit Nukleonen hoher Energie, wie die pp-Streuung, liefern Information über die Eigenschaften der Kernkräfte. Bei Energien der einfallenden Partikel über 300 MeV werden die Experimente durch die Entstehung neuer Elementarteilchen, wie π-Mesonen, beeinträchtigt. Aber glücklicherweise können auch Experimente mit niedrigeren Energien Ergebnisse von direktem Wert liefern im Hinblick auf die Tatsache, dass die mittlere kinetische Energie eines Nukleons im Kern bei etwa 25 MeV liegt und dass die maximale kinetische Energie kaum 100 MeV übersteigen kann.

Im Zusammenhang mit dem absoluten Wirkungsquerschnitt (Abschnitt 9.8) ist gezeigt worden, dass bei gegebenem Bahndrehimpuls der Stossparameter d, also etwa der kürzeste Abstand bei der Annäherung an den Targetkern, gemäss (9.51) umgekehrt proportional zur Strahlenergie E ist:

$$E = \frac{p^2}{2M_n} = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2M_n d^2} \,. \qquad (13.11)$$

Streuung infolge von Kernkräften ist nur dann möglich, wenn der minimale Abstand kleiner als die Reichweite der Kernkräfte ist.

Da gemäss (13.11) für $\ell = 0$ dieser Abstand verschwindet, tritt S-Streuung bei allen Energien auf. Streuung durch Kernkräfte findet für $\ell > 0$ nur dann statt, wenn bei hinreichend hoher Energie d kleiner als deren Reichweite wird. Beispielsweise ist mit d = 1,4 f für P-Streuung ($\ell = 1$) die minimale Energie E_{min} = 21 MeV, was in ziemlich guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist. Für die Streuung mit höheren Bahndrehimpulsen wird die minimale Energie entsprechend höher.

Ein Diagramm der Energie gegen den kleinsten Abstand d bei verschiedenen ℓ zeigt, dass mit zunehmender Energie auch Streuung bei höheren ℓ-Werten auftritt.

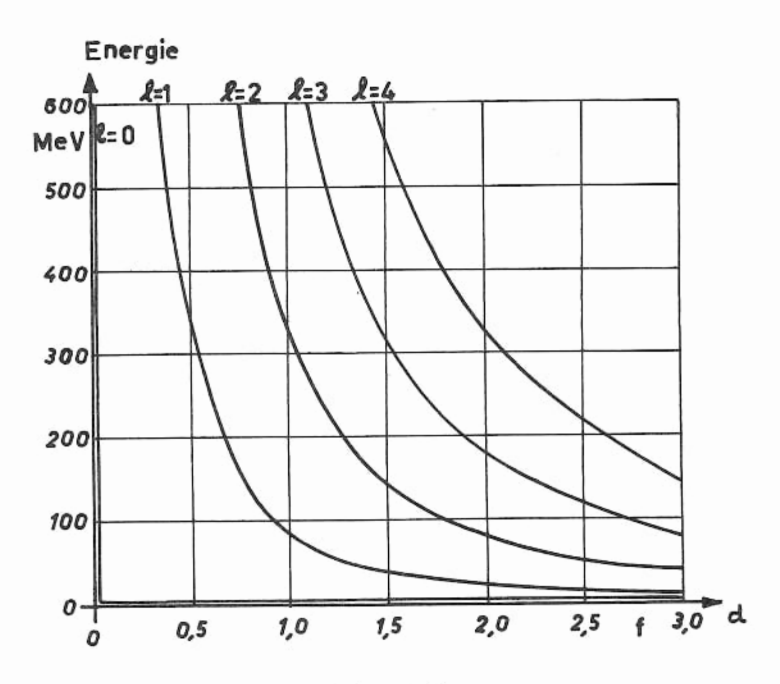


Fig. 13.8

Die Winkelverteilung für S-Streuung ($\ell = 0$) ist im Schwerpunktssystem isotrop; bei höheren ℓ ist sie anisotrop, und zwar mit einer für jedes ℓ eigenen Charakteristik. Ein Diagramm der experimentellen Winkelverteilung der gestreuten Teilchen kann also Information über die Beteiligung von S-, P-, D-, ... Wellen liefern; jede dieser Komponenten kann seinerseits Anteile aus parallelen oder antiparallelen Spineinstellungen enthalten. Bei paralleler Einstellung sind drei mögliche Orientierungen zum Vektor des Bahndrehimpulses möglich.

Die Analyse so komplexer Zusammensetzungen ergab nur sehr grobe Information über die Eigenschaften der Kernkräfte; feinere Details liessen sich erst durch anschliessende POLARISATIONSEXPERIMENTE herausschälen, wie sie von Oxley et al. 1953 in Rochester begonnen wurden. Die Asymmetrie der Streuung beispielsweise von polarisierten Protonen liefert Information über die Spin-Bahnkraft. -

Ein unpolarisierter Strahl wird durch Streuung wenigstens teilweise polarisiert: Der Bahndrehimpuls ℓ für Teilchen, die gemäss Fig. 13.9 links am Targetkern vorbeifliegen, weist nach unten, und derjenige für Teilchen, die rechts vorbeifliegen, nach oben. In dem unpolarisierten Strahl stellen sich dabei die Spins beliebig parallel oder antiparallel bezüglich ℓ ein. Wenn die Kernkraft zwischen paralleler und antiparalleler Orientierung unterscheidet, dann werden die Teilchen verschieden gestreut, je nachdem, ob ihr Spin parallel oder antiparallel zu ℓ ist. Auf diese Weise werden die Teilchen vorzugsweise nach links oder nach rechts gestreut, je nachdem sie Spin gemäss Fig. 13.9 "up" oder "down" haben (Fig. 13.10).

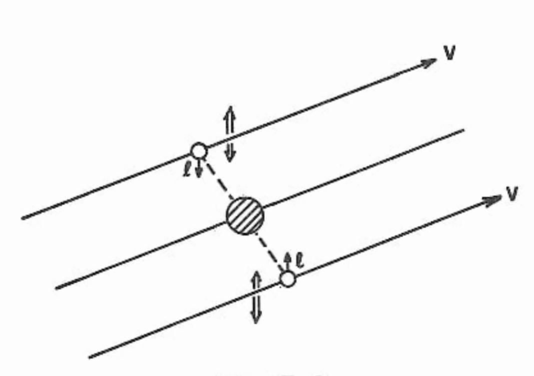


Fig. 13.9

Wenn die Kraft dabei von anziehend zu abstossend wechselt wie es in einigen Fällen sein kann, dann könnte im Prinzip der Strahl zu 100% polarisiert werden.

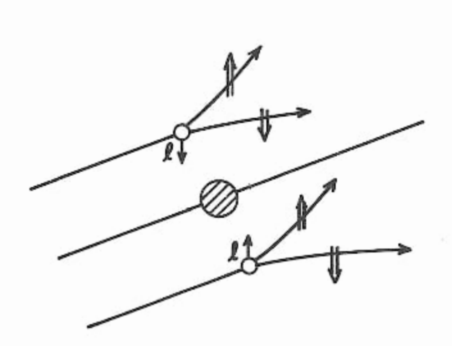


Fig. 13.10

Um die Polarisation nachzuweisen, braucht man einen Analysator; beispielsweise wird ein zweites, dazwischengestelltes Target eine starke Rechts-Links-Asymmetrie in der Streuverteilung herbeiführen, aus der sich der Polarisationsgrad ermitteln lässt (Fig. 13.11).

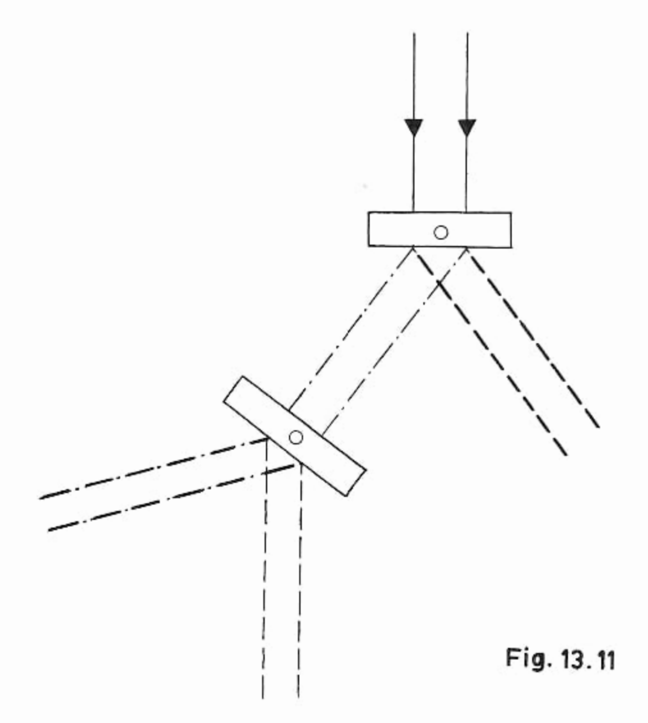


Fig. 13.11

Solche Doppel- und sogar Dreifach-Streuexperimente sind für die pp- und nn-Streuung unternommen worden, desgleichen Untersuchungen, die das Deuteron betreffen. Das Fehlen von np-Dreifach-Streuexperimenten bis heute erklärt, warum über die np-Kräfte weniger bekannt ist als über F_{pp} und F_{nn} und warum im Prinzip die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte weniger sicher bestätigt ist.

13.7 Zusammenfassung der gegenwärtigen Kenntnis der Kernkraft-Potentiale

Der gegenwärtige Stand der Kenntnis über die Abhängigkeit der Kernkraft vom radialen Abstand lässt sich graphisch zusammenfassen. Berechnungen von Marshak, Signell und Bryan sowie von Gammel und Thaler führen zu folgenden Diagrammen, in denen die Kernkraft durch Potentiale ausgedrückt ist (Fig. 13.12 - 13.14). Die numerischen Werte für die Potentiale bei Abständen über 1 f sind ziemlich zuverlässig, die für kleinere Abstände als 1 f jedoch etwas unsicher. Insbesondere beim pn-Potential ist die Existenz einer Spin-Bahnkraft noch etwas vage.

Ein grosser Teil dieser Ergebnisse ist jüngsten Datums. Während es noch vor wenigen Jahren nicht unbedingt als Druckfehler galt, als in England eine "Conference on Nuclear Forces" als über "Unclear Forces" angekündigt wurde, haben sich inzwischen jedoch die Kenntnisse über die Kernkräfte wesentlich verbessert.

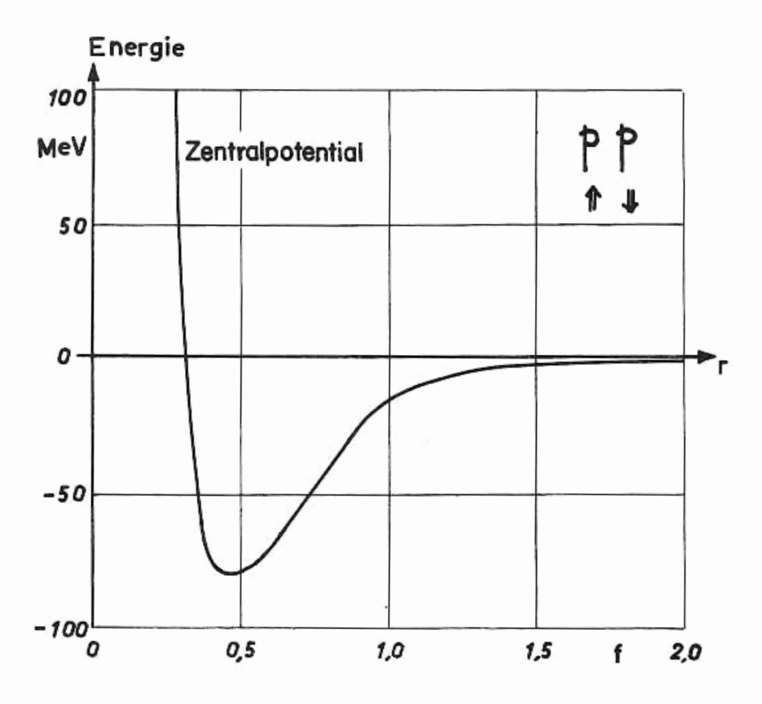


Fig. 13.12

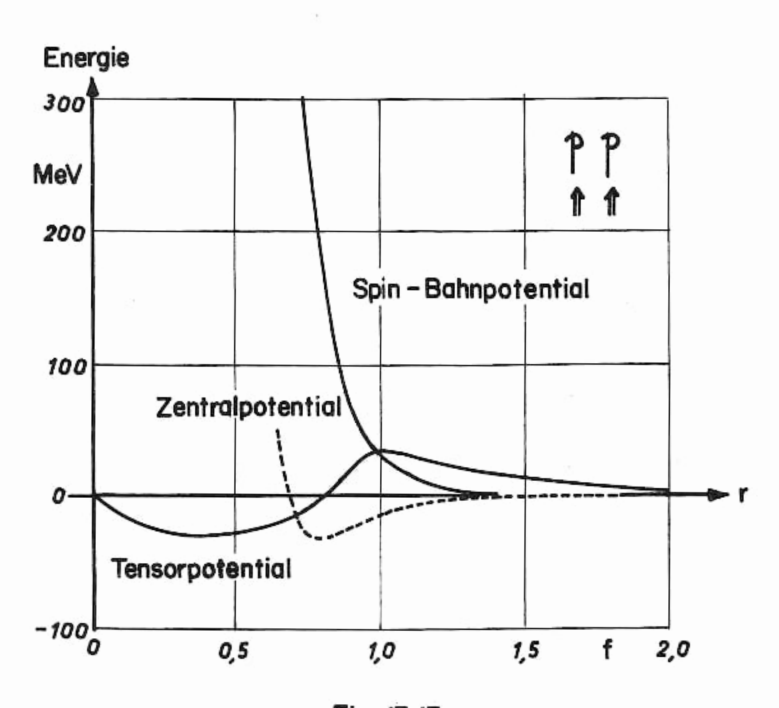


Fig. 13.13

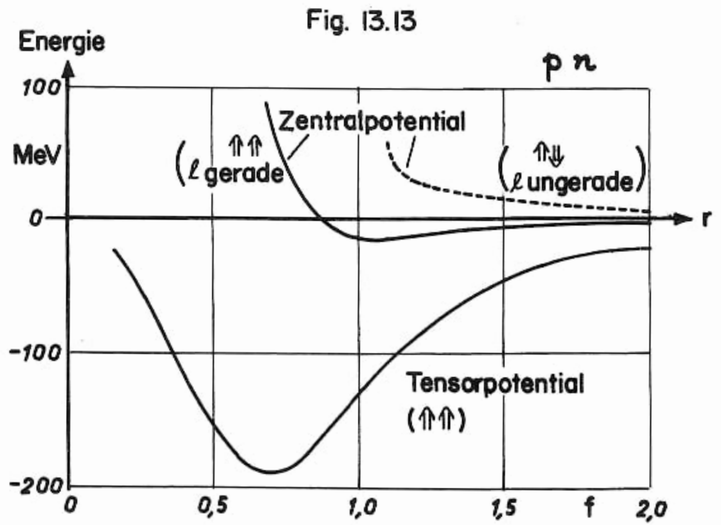


Fig. 13.14

14. MESONEN

14.1 Theorie der Kernkräfte von Yukawa

Coulomb-Kräfte lassen sich auf die Emission und Absorption virtueller Photonen zwischen geladenen Teilchen zurückführen und analog gründet sich die spektroskopisch beobachtete Stabilität des H_2^+ - Ions auf einen Elektronenaustausch innerhalb des Ions.

Nach der Entdeckung des Neutrons schlug Heisenberg eine pn-Wechselwirkung durch eine gesättigte Austauschkraft vor, die er später gemäss Fermis Theorie des β-Zerfalls als einen Austausch eines (e,ν)-Paares spezifizierte. Das entsprach jedoch schwacher Wechselwirkung und führte zu Werten, die für Kernkräfte um einen Faktor 10^{-14} zu klein waren. Ausserdem wichen die berechneten Lebensdauern und Bindungsenergien, die sich mit dieser Theorie berechnen liessen, stark von den experimentellen Werten ab.

Yukawa (Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 1935, 17, 48) schlug den Austausch eines "schweren Quants" - heutzutage als "MESON" bezeichnet - in Analogie zur elektromagnetischen Feldtheorie vor. Anstelle des Coulomb-Potentials mit langer Reichweite

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \qquad (14.1)$$

schlug er eines mit kurzer Reichweite vor, um der bekannten kurzen Reichweite der Kernkräfte Rechnung zu tragen:

$$\boxed{V(r) = -\frac{g^2}{r} \cdot e^{-\eta r}.} \qquad (14.2)$$

Hierin ist g eine Konstante, die "Mesonenladung", r der Abstand zwischen den Nukleonen und die Konstante $\eta \equiv \frac{Mc}{\hbar}$, worin M die Ruhemasse des Mesons ist.

Die auf dem Mesonenaustausch beruhende Reichweite der Kernkräfte kann wie folgt abgeschätzt werden: Es ist eine Energie von Mc^2 erforderlich, um ein Meson zu bilden; dieses legt dann eine Entfernung R_0 in der Zeit $\geqslant \frac{R_0}{c}$ zurück, bis es wieder absorbiert wird. Aus der Beziehung $\Delta E . \Delta t \sim \hbar$ folgt

$$Mc^2 . \frac{R_0}{c} \sim \hbar \qquad (14.3)$$

$$R_0 \sim \frac{\hbar}{Mc} . \qquad (14.4)$$

Also ist die "Reichweite der Mesonenkraft"

$$\boxed{R_0 \equiv \frac{1}{\eta} \sim \frac{\hbar}{Mc}.} \qquad (14.5)$$

Setzt man diese gleich $1{,}4 . 10^{-13}$ cm, dann erhält man

$$M \approx 275\ m_e \qquad (14.6)$$

in guter Übereinstimmung mit der $\pi^{\pm}$-Mesonenmasse 273 m_e. Als Name für ein solches Austauschteilchen wurde MESON ($\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma$ = "mittel") gewählt, weil seine Masse zwischen der des Elektrons und der Nukleonen liegt.

14.2 Unbefriedigende Aspekte der Yukawa-Theorie

Nimmt man die mittlere Proton-Neutron-Entfernung im Kern als die Reichweite der Kernkraft an, so führt das dazu, dass $R_o \approx 2$ bis 3 f zu setzen ist anstelle von 1,4 f. Dann erhält man über die Konstante η eine Mesonenmasse $M \approx 150\ m_e$.

Untersuchungen der kosmischen Strahlung zeigten, dass diese in grossem Mass aus Teilchen der Ladung - 1, 0, + 1 besteht, deren $\frac{e}{m}$ nicht mit dem für Elektronen oder Nukleonen übereinstimmt. Das erste kosmische Teilchen wurde von Neddermeyer und Anderson (PR 1937, 51, 884) als ein sekundäres Teilchen auf Meereshöhe beobachtet; es wurde als μ -MESON (μ = "mundane") bezeichnet. Mit einer Masse $M_\mu \approx 207\ m_e$ und einer Lebensdauer $\approx 2\ \mu$sec, wie von Yukawas Theorie gefordert, lag es nahe, dieses mit dem für die Kernkraft verantwortlichen Austauschteilchen zu identifizieren. Eine ernsthafte Diskrepanz entstand, als man experimentell fand, dass zwischen μ -Mesonen und Kernen nur schwache Wechselwirkung stattfindet, während man theoretisch für die μ-Mesonenbildung starke Wechselwirkung erwarten müsste. Diese Schwierigkeit löste sich jedoch, als man das π-Meson (π = "primary") mit $M_\pi \cong 273\ m_e$, $\tau_\pi = 2,6 \cdot 10^{-8}$ sec und starkem Wechselwirkungscharakter fand (Powell et al. 1947). Dieser Mesonenart schreibt man heute die Kernkräfte zu. Es bleiben jedoch theoretische Schwierigkeiten; auf einige davon wird in Abschnitt 14.5 hingewiesen.

14.3 Eigenschaften der μ -Mesonen

14.3.1 Zerfall und Spin

Die grosse Durchdringungsfähigkeit der μ-Mesonen - sogar bis auf Meereshöhe - zeigte an, dass sie nur schwach mit Materie wechselwirken, wie auch die Stabilität des μ -Mesonatoms beweist. Sein Zerfallsschema wird als

$$\mu \longrightarrow e + \nu^+ + \nu^- \qquad (14.7)$$

angenommen (Abschnitt 10.15.3).

Aus dem Zerfallsschema ergeben sich für den Spin des μ-Mesons als mögliche Werte $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$; es lässt sich aus weiteren Überlegungen zeigen, dass das μ -Meson den Spin $s = \frac{1}{2}$ hat. Seine mittlere Lebensdauer wurde als $\tau_\mu = 2,261 \pm 0,007\ \mu$sec gemessen.

Die senkrechte Intensität der μ -Mesonen in der kosmischen Strahlung beträgt auf Meereshöhe $\sim 10^{-2}$ cm^{-2} sec^{-1} sterad^{-1}, und ihre Energie reicht bis zu einigen GeV. Entsprechend der Lebensdauer würde es erscheinen, als wenn diese μ -Mesonen nur eine mittlere freie Weglänge von 300 m haben, bis sie zerfallen. Das Paradoxon, dass sie jedoch den viel längeren Weg durch die Atmosphäre zurücklegen, löst sich, wenn man bedenkt, dass sie relativisitsche Geschwindigkeiten besitzen und dass infolgedessen Effekte der relativistischen Zeitdilatation zu berücksichtigen sind.

4.3.2 Lebensdauer der μ-Mesonen (Beispiel für Zeitdilatation)

Die angegebene Lebensdauer von $\tau_\mu = 2{,}26\ \mu$sec ist diejenige im Schwerpunktssystem des μ-Mesons, d.h. für ruhende Mesonen. Die tatsächlich experimentell gemessene Lebensdauer τ_{lab} übersteigt diesen Wert für hohe Energien bei weitem und ist in guter Übereinstimmung mit der relativistischen Beziehung (A.8)

$$\tau_{lab} = \gamma\, \tau_\mu \equiv \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,. \qquad (14.8)$$

Beispielsweise erhält man für μ-Mesonen der kinetischen Energie $E_\mu = 10^9$ eV im Laborsystem den Wert $\tau_{lab} \approx 23\ \mu$sec. Gemäss (A.26) ist

$$E_\mu = M_\mu c^2 (\gamma - 1) \qquad (14.9)$$

mit M_μ als der Ruhemasse des μ-Mesons, so dass

$$\tau_\mu = \frac{\tau_{lab}}{\frac{E_\mu}{M_\mu c^2} + 1} = \frac{2{,}3 \times 10^{-5}}{9{,}45 + 1} = 2{,}2 \times 10^{-6}\ \text{sec} \,. \qquad (14.10)$$

Dieser ausgeprägte Zeitdilatationseffekt für relativistische μ-Mesonen erklärt den Unterschied zwischen der mittleren freien Weglänge nach klassischen und nach relativistischen Rechnungen, denn die klassische Berechnung ergibt eine mittlere freie Weglänge von etwa 300 m, während man aus Beobachtungen in Ballonen weiss, dass sie etwa 30 000 m beträgt, was eine scheinbare Lebensdauer von etwa 10^{-4} sec ergäbe.

14.3.3 μ-mesonische Atome

In jeder gegenwärtig bekannten Hinsicht, mit Ausnahme ihrer unterschiedlichen Massen, sind μ-Mesonen und Elektronen in ihren Eigenschaften identisch. Negative μ-Mesonen fallen also in stabile Bohrsche Bahnen analog denen der Elektronen, nur dass deren Radien r_μ viel kleiner sind:

$$r_\mu = \frac{(n\hbar)^2}{M_{\mu\,red} \cdot Ze^2} \qquad (14.11)$$

worin

$$M_{\mu\,red} \equiv \frac{M_\mu \cdot M}{M_\mu + M} \qquad (14.12)$$

die reduzierte Masse des μ-Mesons und M die Masse des Kernes ist. Das macht einen Faktor $\sim$ 200 für die Verkleinerung der Bahnabmessungen und für die Vergrösserung der Bindungsenergien aus. Ein μ-Meson in der K-Schale kann sich also einen beträchtlichen Teil seiner Zeit innerhalb des Kernvolumens befinden. Eine halbklassische Rechnung ergibt, wenn man

$$r_\mu = \frac{\hbar^2}{M_{\mu\,red} \cdot Ze^2} = R_0 A^{1/3} \qquad (14.13)$$

und

$$Z = \frac{A}{1{,}98 + 0{,}0155\, A^{2/3}} \qquad (14.14)$$

setzt, dass für Kerne mit Z $\gtrsim$ 40 ($\sim$ Zirkonium) der Bohrsche Radius des μ-mesonischen Atoms kleiner als der Kernradius wird.

Die Bindungsenergie eines μ-Mesons in der K-Schale eines Wasserstoffatoms beträgt 2,5 keV im Vergleich zu 13,5 eV für ein Elektron.

Da die μ-Mesonen und Elektronen nicht identische Teilchen sind, greift das Ausschlussprinzip von Pauli nicht ein, um die Besetzung der bereits mit Elektronen gefüllten Schalen durch μ-Mesonen zu verbieten.

14.3.4 Absorption von μ-Mesonen in Materie

Die Abbremsung eines μ-Mesons bis zu seinem Eintritt in eine atomare K-Schale beträgt etwa 10^{-12} sec. Der Mesonentheorie zufolge sollte es in dieser Bahn bis zum Einfang in den Kern nur $\sim 10^{-19}$ sec zubringen, wenn die Wechselwirkung die Stärke der Kernkräfte besitzt. Demzufolge würden praktisch alle μ-Mesonen, die in K-Bahnen fallen, vom Kern eingefangen, bevor sie zerfallen könnten. Hingegen haben sowohl freie als auch gebundene μ-Mesonen ungefähr gleiche Lebensdauer von etwa 10^{-6} sec; Theorie und Experiment unterscheiden sich also um einen Faktor 10^{13} ! Das ist jedoch gerade die richtige Grössenordnung für die Unterscheidung zwischen starken und schwachen Wechselwirkungen: die Theorie bezieht sich auf ein Meson mit starker Wechselwirkung (π -Meson) und das Experiment auf eines mit schwacher Wechselwirkung (μ -Meson). Die entsprechenden Wirkungsquerschnitte müssen sich ebenso stark unterscheiden.

14.4 Eigenschaften der π -Mesonen

Die starke Wechselwirkung der π -Mesonen mit Materie geht nicht nur aus theoretischen Überlegungen über den Mechanismus der Kernkraft hervor, sondern auch aus experimentellen Befunden (Fig. 14.1) von Kernzertrümmerung ("Sterne", star formation).

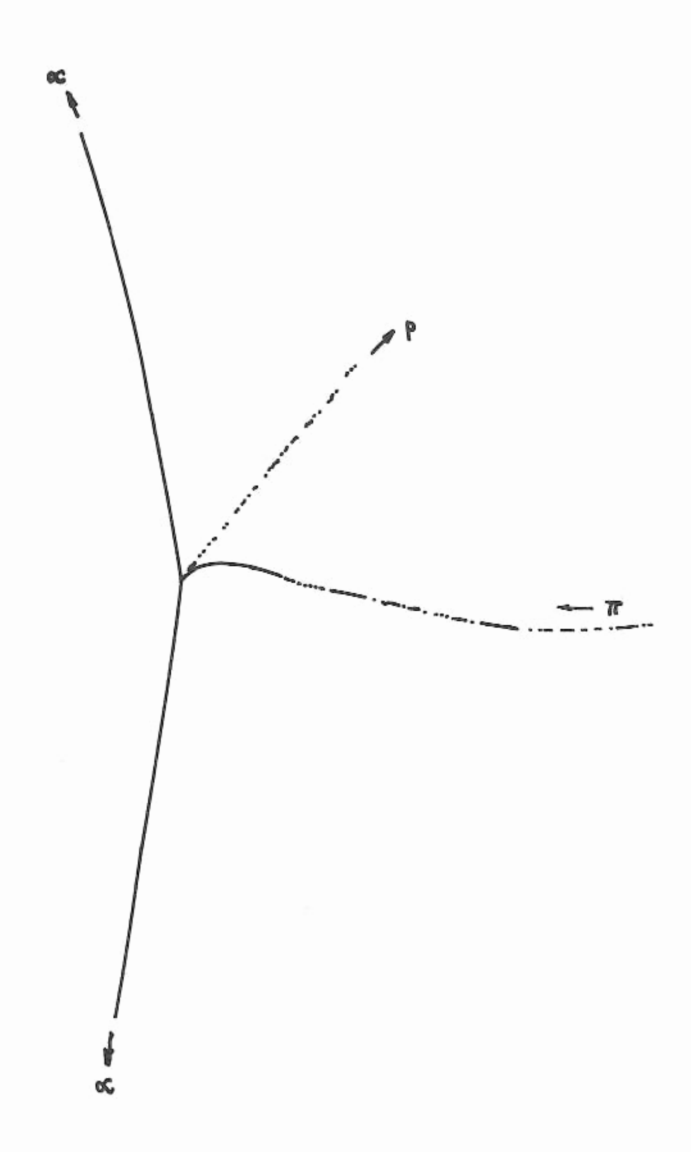


Fig. 14.1

Die π-Mesonen zerfallen hauptsächlich nach dem Schema

$$\pi^{\pm} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu \qquad (\tau = 2,56 \cdot 10^{-8} \text{ sec})$$

bevor sie Meereshöhe erreichen können. Sie konnten jedoch in grossen Höhen nachgewiesen werden und lassen sich im Laboratorium durch Beschuss von Materie mit Protonen hoher Energie erzeugen.

Aus dem Zerfallsschema ergeben sich für den Spin des π-Mesons als mögliche Werte 0 oder 1; es stellte sich heraus, dass π-Mesonen Spin <u>null</u> haben.

Es gibt auch ungeladene π-Mesonen, die in sehr kurzer Zeit - $\tau < 4.10^{-16}$ sec - beispielsweise gemäss

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

zerfallen. Diese unterliegen ebenfalls starken Wechselwirkungen und haben die Masse $M_{\pi^0} = 264\ m_e$ im Vergleich zu $M_{\pi^\pm} = 273\ m_e$

In diesem Zusammenhang ist es interessant, eine Zerlegung der experimentell beobachtbaren Masse M_{exp} in zwei Anteile

$$M_{exp} = M_{theor} + \delta M \qquad (14.15)$$

zu betrachten, wobei M_{theor} die "mechanische" Masse und δM die elektromagnetische Masse ist. Denn bei Benutzung von M_{theor} anstelle von M_{exp} lassen sich die sonst stets auftretenden Divergenzen in der Mesonentheorie vermeiden. Dieses Verfahren stellt eine "MASSENRENORMIERUNG" dar, indem von der experimentell beobachteten Masse eine "elektromagnetische Masse" δM abgezogen wird, die durch die Ladungsverteilung innerhalb des Teilchens festgelegt und allgemein unbestimmt ist.

Man kann jedoch eine direkte Abschätzung dieses Wertes für den Sonderfall der π-Mesonen ausführen. Denn π^0-Mesonen haben sehr wahrscheinlich die Ladungsdichte null und infolgedessen verschwindende elektromagnetische Masse, so dass

$$M_{\pi^0\, exp} = M_{\pi^0\, theor} \qquad (14.16)$$

während

$$M_{\pi^\pm\, exp} = M_{\pi^\pm\, theor} + \delta M_\pi \qquad (14.17)$$

also

$$\delta M_\pi = (M_{\pi^\pm} - M_{\pi^0})_{exp} = 8{,}9\ m_e\ . \qquad (14.18)$$

<u>14.5 Bemerkungen zur Mesonentheorie</u>

<u>14.5.1 Virtuelle Teilchen und Zustände</u>

Bei der Formulierung von elektromagnetischen Kräften oder Kernkräften muss man sich auf den Austausch von <u>virtuellen</u> Photonen oder <u>virtuellen</u> Mesonen beziehen, weil sie aus Energiegründen nicht quasistabil als freie Teilchen existieren können, wenn sie diese Wechselwirkungen ausrichten sollen. Beispielsweise muss für die Erzeugung eines π-Mesons mindestens dessen Ruheenergie

$$M_\pi c^2 = 273\ m_e c^2 = 273\ .\ 0{,}51 = 140\ \text{MeV} \qquad (14.19)$$

aufgebracht werden. Wenn die Emission und Absorption virtuell ist, dann kann sich das Meson jedoch für eine begrenzte Zeit

$$\Delta t < \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{M_{\pi} c^2} \approx 5 \cdot 10^{-24} \text{ sec} \qquad (14.20)$$

diese Energie von dem Nukleonensystem "leihen". Dabei wird der Energiesatz makroskopisch nicht verletzt. Die "Existenz" des Mesons ist also auf eine Zeitdauer beschränkt, die sich physikalischer Beobachtung entzieht.

14.5.2 Struktur der Nukleonen

Mit Hilfe der LADUNGSSYMMETRISCHEN MESONENTHEORIE (CHARGE-SYMMETRIC MESON THEORY), in der die T_3-Komponente des Isospins die Nukleonenladung und die T_1 und T_2 den Ladungsaustausch darstellen, kann man sich das Proton als $p \rightarrow n + \pi^+$ und das Neutron als $n \rightarrow p + \pi^-$ gemäss Fig. 14.2 vorstellen.

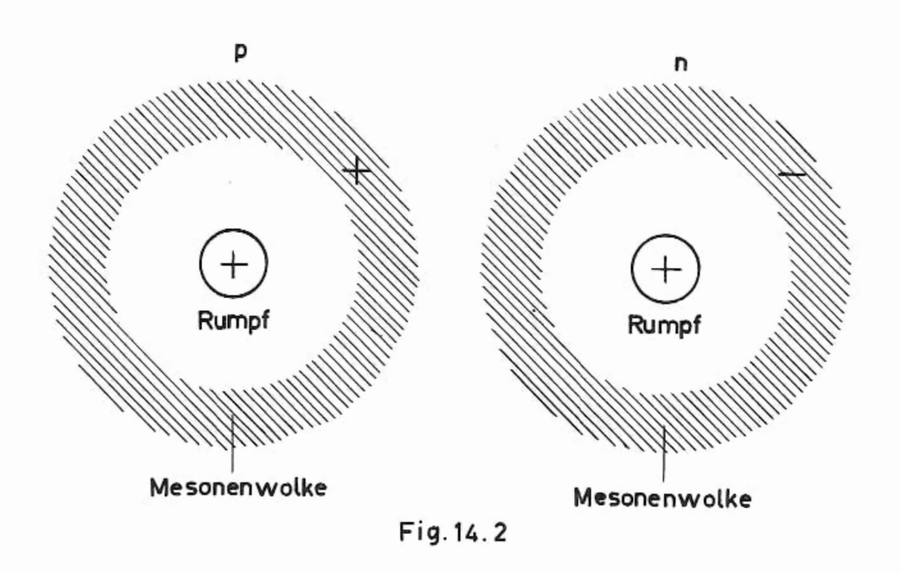


Fig. 14.2

Dabei sei die elektrische Ladung

des Rumpfes	$= + e(1 - \alpha)$ für Proton und	$+ e\alpha$	für Neutron;
der Wolke	$= + e\alpha$ für Proton und	$- e\alpha$	für Neutron.

Hierin könnte man α als eine Art aufgeteilte Ladungsverteilung deuten, beispielsweise klassisch, als ob für einen Bruchteil α der Zeit die Mesonenwolke die ganze Elementarladung e übernähme. Quantenmechanisch stellt α die Dissoziationswahrscheinlichkeit für $p \rightarrow n + \pi^+$ dar und ist ungefähr von der Grössenordnung

$$\frac{g^2}{\hbar c} \sim 10^{-1} . \qquad (14.21)$$

Der Radius der Mesonenwolke kann zu $\sim$ 1,4 f angenommen werden. Für Abstände innerhalb dieser Entfernung stehen die Nukleonen unter dem Einfluss der Kernkräfte. Die idealisierte Vorstellung punktförmiger Nukleonen und Elektronen ist also nicht nur auf Grund von Kernreaktionen sondern auch von hochenergetischen Wechselwirkungen ungültig. Experimentelle Ergebnisse von Elektron-Nukleonstreuung stimmen nicht mit Voraussagen aus der Dirac-Theorie überein unter Annahme punktförmiger Teilchen (Hofstadter, Ann. Rev. of Nucl. Sci., 1957, 7, 231).

Die empirischen Ergebnisse von Hofstadter (Fig. 1.4) lassen sich wie folgt zusammenfassen: Für die Nukleonen werde r_e als die Wurzel aus dem mittleren Quadrat des Radius definiert, über den sich die elektrische Ladung erstreckt und r_m in gleicher Weise für das magnetische Moment. Wenn $\rho_e(r)$ die ausgeschmierte Ladungsdichte ist, dann ist die elektrische Ladung

$$e = \int \rho_e(r)\, d\tau \qquad (14.22)$$

und

$$r_e^2 = \frac{1}{e} \int \rho_e(r) \cdot r^2 d\tau \qquad (14.23)$$

wobei die Integrale über das Nukleonenvolumen zu erstrecken sind.

Die beste Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen wird erreicht, wenn man eine exponentielle Ladungsverteilung der Form

$$\rho_e(r) = \rho_{e_0} \cdot e^{-2\sqrt{3} \cdot \frac{r}{r_e}} \qquad (14.24)$$

mit den Werten:

$r_e = r_m \approx 0{,}8$ f	für das Proton		
$r_m \approx 0{,}8$ f	für das Neutron		(14.25)
$r_e = 0$	für das Neutron		

annimmt.

Das Neutron hat also entsprechend den gegenwärtigen Vorstellungen effektiv keine Ladungsverteilung. Das ist in Übereinstimmung mit der Elektronenstreuung an Neutronen, die durch das Elektron-Neutron-Wechselwirkungspotential charakterisiert wird. Dieses kann als ein Potential der Tiefe V_o ausgedrückt werden, das über einen Bereich von der Grösse des klassischen Elektronradius $\frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}82$ f konstant ist. Die theoretische Berechnung, die allein von dem bekannten magnetischen Moment des Neutrons ausgeht, was $r_e = 0$, $r_m \neq 0$ entsprechen würde, ergibt $V_o = -4{,}08$ keV, während der experimentelle Wert $V_o = -4{,}05 \pm 0{,}2$ keV ist.

14.5.3 Bahndrehimpuls der π-Mesonen

Bei der virtuellen Dissoziation eines Protons sind die möglichen Zuordnungen der totalen magnetischen Quantenzahl m:

$$
\begin{array}{lccccc}
 & p & \longrightarrow & n & + & \pi^{+} \\
 & \frac{1}{2}\downarrow & = & \frac{1}{2}\downarrow & + & 1\uparrow \\
\text{oder} & \frac{1}{2}\uparrow & = & \frac{1}{2}\uparrow & + & 0\,.
\end{array}
$$

Die zweite Möglichkeit kann aus Gründen der Spinabhängigkeit der Kernkraft ausgeschlossen werden, so dass $m_{\pi} = 1$ ist. Ausserdem weiss man, dass der Spin der π-Mesonen null ist. Ihre magnetische Bahnquantenzahl ist folglich $m_{\ell} = 1$. Das π-Mesonenfeld hat also einen Bahndrehimpuls; man kann es sich als ein rotierendes, geladenes Feld vorstellen und ihm ein magnetisches Moment

$$\mu_{\pi} = \frac{e\hbar}{2M_{\pi}c} \approx 6{,}5\,\mu_K \qquad (14.26)$$

zuordnen, wobei

$$\mu_K \equiv \frac{e\hbar}{2M_p c} = 5{,}050 \cdot 10^{-24}\ \text{erg}\cdot\text{Gauss}^{-1} \qquad (14.27)$$

das Kernmagneton ist.

14.5.4 Magnetisches Moment der Nukleonen

Die Diracsche Theorie sagt für das Proton bzw. das Neutron

$$\mu_p = \mu_K = \frac{e\hbar}{2M_p c} \quad ; \quad \mu_n = 0 \qquad (14.28)$$

voraus. Experimentell erhielten Stern und Rabi:

$$\mu_p = 2{,}79\,\mu_K\,; \quad \mu_n = -1{,}91\,\mu_K. \qquad (14.29)$$

Eine ungefähre quantitative Erklärung dieser "anomalen" Momente ergibt sich aus dem Modell Fig. 14.2. Da die elektrische Ladung des Protonenrumpfes $+e(1-\alpha)$ und die des Neutronenrumpfes $+e\,\alpha$ ist, sind die magnetischen Momente

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{für den Protonenrumpf} & (1-\alpha)\,\mu_K \\
\text{für den Neutronenrumpf} & \alpha\,\mu_K \\
\text{für die Mesonenwolke} & \alpha\,\mu_{\pi} = \alpha\,\mu_K \cdot \frac{M_p}{M_{\pi}}\,,
\end{array}
\right\} \qquad (14.30)
$$

also

$$\text{Proton} \equiv \text{Protonenrumpf} + \text{Mesonenwolke}: \mu_p = \mu_K \left(1 - \alpha + \alpha \cdot \frac{M_p}{M_\pi}\right) \quad (14.31)$$

$$\text{Neutron} \equiv \text{Neutronenrumpf} + \text{Mesonenwolke}: \mu_n = -\mu_K \left(\alpha + \alpha \cdot \frac{M_p}{M_\pi}\right). \quad (14.32)$$

Setzt man diese beiden Werte den entsprechenden experimentellen gleich, so erhält man $\alpha = 0,06$ in ungefährer Übereinstimmung mit dem Wert $\frac{g^2}{\hbar c} \sim 10^{-1}$. Dabei ergibt sich jedoch ein Massenverhältnis $\frac{M_p}{M_\pi} = 30$ gegenüber dem tatsächlichen Wert von 6,5.

Die obige Behandlung ist nur eine sehr grobe Näherung; sie berücksichtigte nicht die verschiedenen relativen Spinorientierungen. Ausserdem fand man, dass eine kleine, aber nicht vernachlässigbare Wahrscheinlichkeit für die Dissoziation in mehr als ein Meson existiert:

$$p \begin{cases} n + \pi^+ \\ n + \pi^+ + \pi^0 \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Die Ladungsverteilung wird durch die Rückstossbewegung des Rumpfes infolge der Emission und Absorption der Mesonen sowie durch seine eigene Zitterbewegung beeinflusst. Ausserdem muss man Effekte virtueller Erzeugung von Nukleon-Antinukleonpaaren berücksichtigen.

Solche Störungsrechnungen höherer Ordnung liefern Ergebnisse in wesentlich besserer, tatsächlich fast vollkommener Übereinstimmung.

14.5.5 Die Massendifferenz Neutron-Proton

Es hat sich, ausgenommen mit Hilfe der Mesonentheorie, als unmöglich erwiesen, die Massendifferenz der Nukleonen quantitativ zu erklären. Eine theoretische Berechnung von Heitler und Mitarbeitern unter Benützung einer nicht-lokalen Feldtheorie hat einen Wert von $\sim 0,2\ m_e$ für die Massendifferenz $M_n - M_p$ ergeben, der das richtige Vorzeichen und ungefähr die richtige Grössenordnung besitzt. Diese Behandlung enthält Renormierung der Masse und Abschneiden des Impulses bei $\sim \frac{2}{3} M_p c$ ("mass renormalisation" und "momentum cut-off").

Zu dem Verfahren des IMPULSABSCHNEIDENS seien hier noch einige erklärende Bemerkungen angeschlossen. Für ein Teilchen dessen Masse rein elektromagnetischer Natur wäre, müsste die Ruheenergie $E_0 \cong \frac{e^2}{r_0}$ sein.

Quantenelektrodynamische Überlegungen, die die Abschirmung des Feldes durch virtuelle Elektronenpaare berücksichtigen, ergeben

$$\text{für Fermionen,} \quad E_0 \sim \log \frac{1}{r_0} \quad (14.33)$$

$$\text{für Bosonen,} \quad E_0 \sim \frac{1}{r_0^2} . \quad (14.34)$$

Aus der elektromagnetischen Masse des π-Mesons (14. 18) ergibt sich gemäss (14. 34) die Länge r_o zu

$$r_o \approx \frac{3}{2} \frac{\hbar}{M_p c} . \qquad (14.35)$$

r_o lässt sich grössenordnungsmässig als eine untere Grenze für physikalisch sinnvolle Längen in dem System auffassen. Da der Impuls zur Länge kanonisch konjugiert ist, entspricht dies gemäss der Unschärferelation

$$r_o \cdot p \sim \hbar \qquad (14.36)$$

einer Impulsgrenze

$$p \sim \frac{2}{3} M_p c , \qquad (14.37)$$

bei der ein ABSCHNEIDEN DES IMPULSES (MOMENTUM CUT-OFF) zweckmässig erscheint. Dies lässt sich als der maximale Impuls virtueller Photonen ansehen, die von π-Mesonen emittiert und absorbiert werden können.

14. 5. 6 Streuung von π-Mesonen an Nukleonen

Bethe und Heitler benützten die Störungstheorie erster Ordnung, um die Abhängigkeit des Streuquerschnittes von der π-Mesonenenergie E_π zu berechnen, und erhielten gute qualitative Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Unter Verwendung der Störungstheorie höherer Ordnung hat man seitdem auch ungefähr quantitative Übereinstimmung erzielt (Fig. 14. 3).

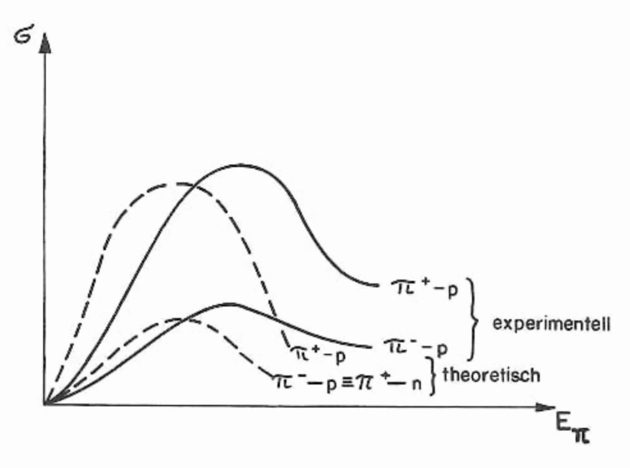


Fig. 14. 3

Nichtsdestoweniger muss wiederum der Impuls bei $p \sim \frac{2}{3} M_p c$ abgeschnitten werden, um Divergenzen zu vermeiden. Die quantitativen Diskrepanzen bei höherer Energie können teilweise auf unberücksichtigten Rückstosseffekten der Nukleonen beruhen.

14.5.7 Unbefriedigende Aspekte an der gegenwärtigen Mesonentheorie

Die vorangehenden Abschnitte haben den Erfolg aufgezeigt, den man mit der Mesonentheorie erzielt hat. Die Theorie ist unter Benutzung von Tensorpotentialen auch mit ganz gutem Erfolg auf die Spin-Bahnkopplung angewendet worden, indem man die Nukleonengeschwindigkeiten einführte; dennoch sind die gegenwärtig theoretisch vorausgesagten Werte viel kleiner als die experimentell beobachteten. Die Mesonentheorie ist ausserdem in der Lage, das elektrische Quadrupolmoment des Deuterons zu erklären.

Als Nachteil führt jedoch die Mesonentheorie auf unüberwindliche Schwierigkeiten mit der Wellengleichung,weil in ihr bei der Gradientenbildung ein Term r^{-3} auftritt, der eine zu starke Singularität darstellt. Die Durchführung der zweiten Quantisierung liefert zusätzliche Potentialterme. Dabei ist es sehr störend, dass die Bedeutung eines Potentials bei kleinen Abständen unbestimmt wird.

Es gibt zwei Formen der Theorie, die von der gewählten Kopplung abhängen: die pseudoskalare Mesonentheorie mit der Kopplung $\sim \gamma_5 \Psi$ und die pseudovektorielle Mesonentheorie mit der Kopplung $\sim \gamma_5 \gamma_\mu \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}$.

Die pseudoskalare Theorie hat den Vorteil, dass bei der Renormierung der Masse die Terme höherer Ordnung endlich werden, allerdings nicht sehr klein, so dass sich Divergenzen vermeiden lassen, aber der schwerwiegende Nachteil ist, dass sie weder qualitative noch quantitative Übereinstimmung mit experimentellen Werten, z.B. mit Streuquerschnitten, liefert.

Die pseudovektorielle Theorie ist nicht renormierbar; um Divergenzen zu vermeiden, ist man gezwungen cut-off-Massnahmen anzuwenden; aber sie liefert gute Übereinstimmung mit dem Experiment und ist etwas überzeugender.

In ihrer heutigen Form ist die Mesonentheorie nicht in der Lage, den verschwindenden Radius der Ladungsverteilung r_e des Neutrons zu erklären. Mit einer der beiden folgenden Annahmen lässt sich jedoch diese Schwierigkeit überwinden:

(a) Der Nukleonenrumpf besitzt ungefähr dieselbe Ausdehnung wie die Mesonen wolke; oder

(b) die elektrische Ladungsverteilung des Neutrons erstreckt sich noch über den üblich angenommenen Bereich, ist aber dergestalt, dass in erster und zweiter Näherung

$$\int \rho \, d\tau = \int \rho \, r^2 \, d\tau = 0 . \qquad (14.38)$$

Dieses scheint die vernünftigere Forderung zu sein; sogar wenn diese erfüllt ist, wird es notwendig sein zu prüfen, ob die nächste Ordnung auch verschwindet, ob also auch

$$\int \rho \, r^4 \, d\tau = 0 . \qquad (14.39)$$

Das lässt sich im Prinzip experimentell durch Untersuchung bei sehr hohen Energien prüfen.

Gegenwärtig scheint es so, als ob die verschiedenen Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment nur überwunden werden können, wenn man den Begriff der punktförmigen Quelle des Mesonenfeldes, d.h. die lokale Theorie, fallen lässt und stattdessen nicht-lokale Theorien, die also ausgedehnte Quellen einschliessen, in Erwägung zieht, wie es von Heitler und Arnous getan wurde.

14.6 Elementarteilchen und ihre Klassifizierung

Weitere Arten von Teilchen, die man beobachtet hat, sind die K-Mesonen und die Hyperonen Λ, Ξ und Σ, deren Masse grösser als die Nukleonenmasse ist. Hyperonen und Nukleonen lassen sich gemeinsam als BARYONEN (BARYONS) klassifizieren. Für sie gilt eine Erhaltungsregel, der BARYONENERHALTUNGSSATZ (CONSERVATION OF BARYONS), zu dem noch keine Symmetrieeigenschaft bekannt ist. Im Gegensatz dazu werden die sehr leichten Teilchen ν, e, μ als LEPTONEN (LEPTONS) bezeichnet.

Ein einfaches Klassifizierungsschema lässt sich aufstellen unter der Voraussetzung, dass zu jedem Elementarteilchen ein entsprechendes Antiteilchen existieren muss und dass schwere Teilchen stets in sogenannten "LADUNGSMULTIPLETTS" (CHARGE MULTIPLETS) auftreten (Tab. 14.1):

Tab. 14.1

Klassifizieru g der Elementarteilchen

(a) Mesonen (Spin 0)

Multipletts	Teilchen	Antiteilchen
Singulett	---	---
Dublett	K^+, K^o	$\overline{K^o}$, K^-
Triplett	π^+, π^o, π^-	dieselben

(b) Nukleonen und Hyperonen (Spin $\frac{1}{2}$)

Singulett	Λ^o	$\overline{\Lambda^o}$
Dublett	p, n	p, n
Dublett	Ξ^o, Ξ^-	(Ξ^+, $\overline{\Xi^o}$)
Triplett	Σ^+, Σ^o, Σ^-	$\overline{\Sigma^+}$, $\overline{\Sigma^o}$, $\overline{\Sigma^-}$

(c) Leptonen (Spin $\frac{1}{2}$)

Singulett	ν	$\overline{\nu}$
Singulett	e^-	e^+
Singulett	μ^-	μ^+

(d) Photon (Spin 1)

Singulett	γ	

ANHANG. A

A. KINEMATIK RELATIVISTISCHER TEILCHEN

A.1 Lorentz-Transformation

Es seien zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' betrachtet; Σ befinde sich in Ruhe und Σ' in einem Zustand gleichförmiger Translationsbewegung gegenüber Σ. Die x'-Achse von Σ' habe die Geschwindigkeit v gegenüber der x-Achse von Σ, wobei x, y, z, t die Koordinaten eines Raum-Zeit-Punktes in Σ und x', y', z', t' die desselben Punktes in Σ' sind. Der Ursprung beider Systeme sei so gewählt, dass $x' = y' = z' = t' = 0$ für $x = y = z = t = 0$ (Fig. A.1).

Dann wird die Beziehung zwischen den Koordinaten durch die LORENTZ-TRANSFORMATION ausgedrückt:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - \beta c t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\cdot x\right) \end{aligned}} \qquad \text{(A.1)}$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \;;\quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(A.2)}$$

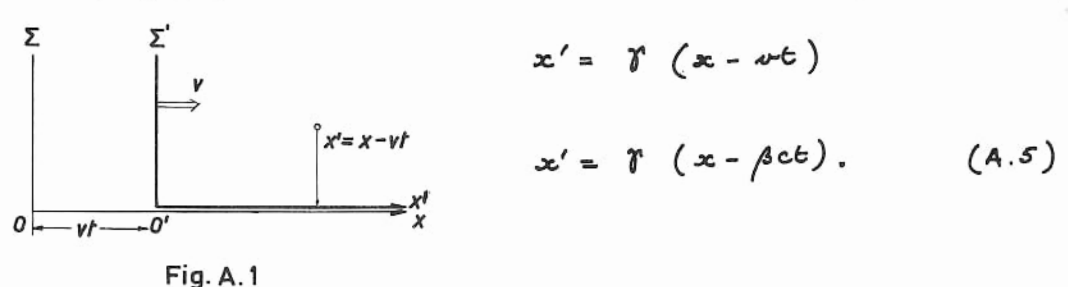
Fig. A.5 zeigt γ als Funktion von β.
Die inverse Transformation ist durch Umkehr des Vorzeichens von β gegeben, da die relative Geschwindigkeit ihre Richtung umkehrt:

$$\boxed{x = \gamma\,(x' + \beta c t') \quad ; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}\cdot x'\right)}\,. \qquad \text{(A.3)}$$

Als eine Gedächtnishilfe, um die Form der Lorentz-Transformation zu erinnern, kann man erst die klassische Beziehung

$$x' = x - (\text{Koordinatenverschiebung}) = x - vt \qquad \text{(A.4)}$$

aufstellen (Fig. A.1) und anschliessend den Einsteinschen Faktor γ einfügen, so dass



$$x' = \gamma\,(x - vt)$$

$$x' = \gamma\,(x - \beta c t)\,. \qquad \text{(A.5)}$$

Fig. A.1

A.2 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Es seien zwei Ereignisse angenommen, die in Σ' durch einen räumlichen Abstand $\Delta x'$ voneinander entfernt stattfinden und in Σ gleichzeitig gemessen werden, d.h. $\Delta t = 0$. Dann ist ihre räumliche Entfernung Δx in Σ aus der Beziehung

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - \beta c\,.\,\Delta t) \qquad \text{(A.6)}$$

$$\Delta x' = \gamma\,.\,\Delta x \qquad \text{(A.7)}$$

zu gewinnen, und da $\gamma \geq 1$ ist, folgt $\Delta x \leq \Delta x'$.

Einem Beobachter, der sich in Σ in Ruhe befindet, erscheint also ein bewegter Gegenstand in seiner Bewegungsrichtung verkürzt im Vergleich zu seiner Ruhelänge. Diese Längenkontraktion wird als LORENTZ-KONTRAKTION bezeichnet und durch die Grösse γ bestimmt.

Ebenso gilt für Ereignisse am gleichen Ort in Σ' $(\Delta x' = 0)$, die aber nicht gleichzeitig in Σ' stattfinden, die zeitliche Beziehung

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' . \qquad (A.8)$$

Es ist also $\Delta t \geq \Delta t'$, und einem Beobachter, der sich in Σ in Ruhe befindet, erscheint infolgedessen der Zeitablauf an einem bewegten Objekt um den Faktor γ verlangsamt; es tritt also auf eine ZEITDILATATION. Als ein Beispiel für den Effekt der Zeitdilatation wird auf p. 255 die Lebensdauer der μ-Mesonen behandelt.

A.3 Geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation

Minkowski führte einen vierdimensionalen Raum $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, ict)$ ein, in dem die Lorentz-Transformation die Form einer normalen Koordinatentransformation zwischen Kartesischen Systemen annimmt, von denen das eine um einen Winkel ϑ gegenüber dem anderen gedreht ist (Fig. A.2):

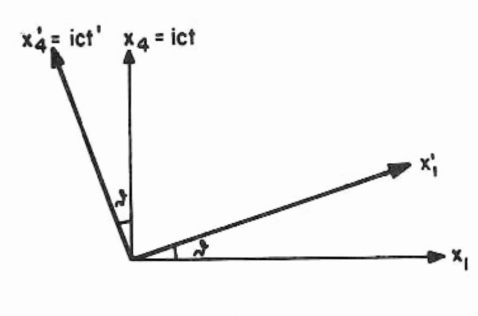


Fig. A.2

$$x_1' = x_1 \cos\vartheta + x_4 \sin\vartheta \qquad (A.9)$$

$$x_4' = -x_1 \sin\vartheta + x_4 \cos\vartheta . \qquad (A.10)$$

Sieht man also die Lorentz-Transformation als eine Drehung in der (x_1, x_4)-Ebene an, dann hat man die Beziehungen

$$\cos\vartheta = \gamma \; ; \; \sin\vartheta = i\gamma\beta \; ; \; tg\,\vartheta = i\beta . \qquad (A.11)$$

Diese Darstellung lässt sich beispielsweise direkt für das Problem der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten verwenden.

A.4 Zusammensetzung gleichgerichteter Geschwindigkeiten

Ein Gegenstand bewege sich in Σ' mit der Geschwindigkeit u' entlang der x'-Achse und Σ' seinerseits gegenüber dem Ruhesystem Σ mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. Die Geschwindigkeit u'' des Gegenstandes im Ruhesystem berechnet sich dann auf folgende Weise.

Schreibt man

$$\frac{u'}{c} \equiv \beta' = -i\, tg\,\vartheta' \qquad (A.12)$$

$$\frac{v}{c} \equiv \beta = -i\, tg\,\vartheta \qquad (A.13)$$

dann ist die relative Geschwindigkeit u'', d.h. die Geschwindigkeit des Gegenstandes in Σ, gegeben durch

$$\frac{u''}{c} \equiv \beta'' = -i\, tg\,(\vartheta + \vartheta') \qquad (A.14)$$

$$= -i \cdot \frac{tg\,\vartheta + tg\,\vartheta'}{1 - tg\,\vartheta \cdot tg\,\vartheta'} .$$

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \qquad (A.15)$$

$$u'' = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad . \qquad (A.16)$$

A.5 Relativistische Addition von nicht-gleichgerichteten Geschwindigkeiten

Es sei eine dreidimensionale Bewegung in Σ' angenommen, die durch die Koordinaten $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$; $z' = z'(t')$ gegeben ist, und es soll der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten u_x', u_y', u_z' in Σ' und u_x, u_y, u_z in Σ bestimmt werden (Fig. A.3).

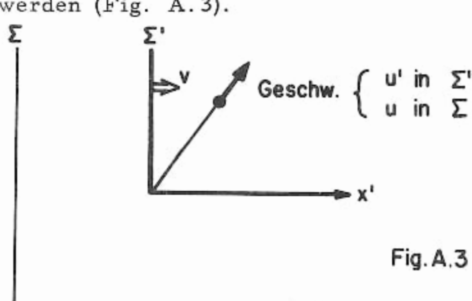


Fig. A.3

Dann ist in Σ:

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt} = u \cos\alpha$$
$$u_y \equiv \frac{dy}{dt}$$
$$u_z \equiv \frac{dz}{dt}$$
$$u \equiv \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$
$$\alpha \equiv \sphericalangle(u, x)$$

und in Σ':

$$\left.\begin{aligned} u_x' &\equiv \frac{dx'}{dt'} = u' \cos\alpha' \\ u_y' &\equiv \frac{dy'}{dt'} \\ u_z' &\equiv \frac{dz'}{dt'} \\ u' &\equiv \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2} \\ \alpha' &\equiv \sphericalangle(u', x') \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (A.17)$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= \gamma\,(dx' + \beta c \cdot dt') \\ dt &= \gamma\,(dt' + \tfrac{\beta}{c} \cdot dx') \\ dy &= dy' \; ; \; dz = dz' \end{aligned}\right\} \qquad (A.18)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \; ; \; \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$

$$\begin{aligned} u_x &\equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c \cdot dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} \cdot dx'} = \frac{u_x' + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} \cdot u_x'} \\ u_y &\equiv \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'}{\gamma\,(1 + \frac{\beta}{c} \cdot u_x')} \\ u_z &\equiv \frac{dz}{dt} = \frac{u_z'}{\gamma\,(1 + \frac{\beta}{c} \cdot u_x')} \end{aligned} \qquad (A.19)$$

.

$$u^2 \equiv u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{1}{(1 + \frac{\beta}{c} \cdot u_x')^2} \left\{ (u_x' + \beta c)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\,(u_y'^2 + u_z'^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{(1 + \frac{vu'}{c^2} \cdot \cos\alpha')^2} \cdot \left\{ u'^2 + v^2 + 2\,v u_x' - \beta^2 (u_y'^2 + u_z'^2) \right\}$$

$$u^2 = \frac{u'^2 + v^2 + 2\,v u' \cos\alpha' - \left(\frac{vu'}{c} \cdot \sin\alpha'\right)^2}{\left(1 + \frac{vu'}{c^2} \cdot \cos\alpha'\right)^2} \quad . \qquad (A.20)$$

Man kann schreiben:

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{vu'}{c^2}\cdot\cos\alpha'} \qquad (A.21)$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot u'\sin\alpha'}{u'\cos\alpha' + v}} \quad . \qquad (A.22)$$

Die inversen Formeln erhält man durch Umkehrung des Vorzeichens von v.

A. 6 Relativistische Masse, Impuls und Energie

Die Masse eines Teilchens, die in einem System gemessen wird, in dem es sich in Ruhe befindet, wird als die "RUHEMASSE" m_o bezeichnet. Die RELATIVISTISCHE MASSE m, die in einem System gemessen wird, in dem sich das Teilchen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v bewegt, steht zu der Ruhemasse in der Beziehung:

$$\boxed{m = \gamma \cdot m_o} \quad . \qquad (A.23)$$

Der RELATIVISTISCHE IMPULS ist

$$\boxed{p = mv = \gamma \cdot m_o v} \qquad (A.24)$$

und die TOTALE RELATIVISTISCHE ENERGIE:

$$\boxed{E_{tot} = \gamma \cdot m_o c^2} \quad . \qquad (A.25)$$

Diese setzt sich aus der RUHEENERGIE $E_o = m_o c^2$, welche eine Art potentieller Energie darstellt, die bei Vernichtung von Masse, beispielsweise bei Spaltung, frei wird, und der KINETISCHEN ENERGIE zusammen:

$$\boxed{E_{kin} = E_{tot} - E_o = m_o c^2 (\gamma - 1) = (m - m_o) c^2} \quad . \qquad (A.26)$$

Man beachte, dass mit der Energie eines Teilchens normalerweise nur seine kinetische und nicht seine totale Energie gemeint ist. Beispielsweise besitzt ein 50MeV Proton eine kinetische Energie von 50MeV, eine Ruheenergie $M_p c^2$ von 938 MeV, also eine totale Energie von fast 1 GeV.

Die ENERGIE-IMPULS-BEZIEHUNG lautet

$$\boxed{E_{tot}^2 = E_o^2 + p^2c^2 = m_o^2c^4 + p^2c^2} \quad , \qquad (A.27)$$

wie aus den obigen Definitionen (A.24) und (A.25) folgt.

Relativistisch ist die KRAFT K definiert als

$$\boxed{K = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma \cdot m_o v)} \quad . \qquad (A.28)$$

Man beachte: Es ist die totale, relativistische Energie, die bei Kernreaktionen und hochenergetischen Prozessen erhalten bleibt.

Für Teilchen mit der Ruhemasse $m_o = 0$, also für Photonen und Neutrinos folgt

$$E_o = 0 \qquad\qquad E_{tot} = E_{kin} \qquad (A.29)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{kin} &= pc = E && (A.30)\\ p &= \frac{E}{c} && (A.31)\\ m &= \frac{E}{c^2} && (A.32)\\ v &= c && (A.33)\end{aligned}\right\} m_o = 0 .$$

Von den Teilchen mit nicht-verschwindender Ruhemasse ist die des Elektrons so klein, dass die relativistische Zunahme der Elektronenmasse etwa 1% seiner Ruhemasse für je 5 keV kinetischer Energie ist. In der Kernphysik müssen also Elektronen fast ausschliesslich als relativistische Teilchen angesehen werden.

Die Beziehung zwischen der kinetischen Energie E_{kin} und dem Impuls des Elektrons, ausgedrückt durch die MAGNETISCHE STEIFHEIT $B\rho$ (p. 119), ist in Fig. A.4 gezeigt.

A.7 Lorentz-Transformation von Impuls und Energie

Ebenso wie sich die Raum- und Zeitkoordinaten vom Ruhesystem zu einem bewegten System mit Hilfe der Lorentz-Beziehungen

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma\,(x - vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \; ; \\ t' = \gamma\,(t - \frac{v}{c^2}\cdot x) \end{array} \right\} \tag{A.34}$$

transformieren lassen, kann man die Impulse und totalen Energien in analoger Weise transformieren. Die entsprechenden Beziehungen sind mit denen identisch, die man in der Elektrodynamik erhält (s. Pauli: "Theory of Relativity" 1958, pp. 117 und 87 für eine formale Ableitung); als eine Gedächtnishilfe, um ihre Form zu erinnern, ist es am einfachsten, eine Analogie zwischen dem Raum-Zeit-Vierervektor

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, ict) \tag{A.35}$$

der sich aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{A.36}$$

herleitet, und dem Impuls-Energie-Vierervektor

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) \equiv (p_x, p_y, p_z, i\tfrac{E}{c}) \tag{A.37}$$

zu ziehen, der sich analog aus der Beziehung

$$E^2 - p^2c^2 = 0 \tag{A.38}$$

herleitet.

Für einen Raum-Zeit-Vierervektor lässt sich die obige Beziehung (A.34) als

$$x_1' = \gamma\,(x_1 + i\beta x_4) \quad ; \quad \frac{x_4'}{ic} = \gamma\left(\frac{x_4}{ic} - \frac{\beta}{c}\cdot x_1\right) \tag{A.39}$$

schreiben. Die Analogie besteht nun darin, dass man x durch p ersetzt:

$$p_1' = \gamma\,(p_1 + i\beta p_4) \quad ; \quad \frac{p_4'}{ic} = \gamma\left(\frac{p_4}{ic} - \frac{\beta}{c}\cdot p_1\right) \tag{A.40}$$

was nach Substitution und Vereinfachung die IMPULS- und ENERGIETRANSFORMATIONEN ergibt:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right) \quad ; \quad p_y' = p_y \quad ; \quad p_z' = p_z \\ E' = \gamma\,(E - v\cdot p_x) \end{array}} \tag{A.41}$$

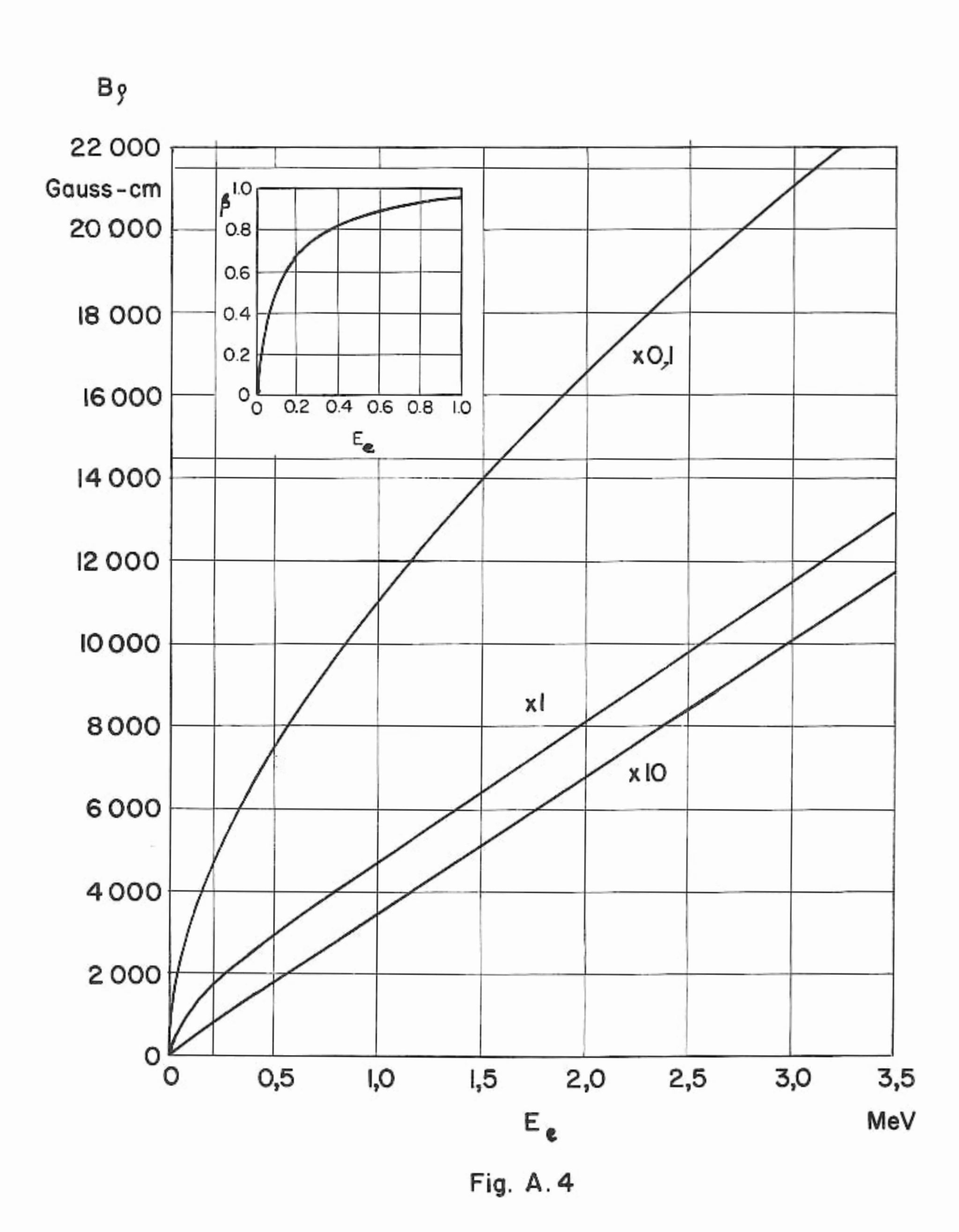


Fig. A.4

Die Bezeichnungen " x 0,1 ", "x 1 ", " x 10 " der Kurven geben den Faktor an, mit welchem die Skalenwerte der Abszisse <u>und</u> Ordinate multipliziert werden müssen.

Eine weitere Gedächtnishilfe erhält man ferner, wenn man die formalen, kreuzweisen Beziehungen beachtet

$$x' = \gamma\,(x - vt) \qquad\qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\cdot x\right)$$
$$E' = \gamma\,(E - v p_x) \qquad\qquad p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right)$$

und dabei x und p_x sowie t und E als kanonische Variable ansieht, (mnemotechnisch analog zu der Beziehung zwischen den quantenmechanischen Operatoren

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad E \rightarrow -\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial t} \;).$$

A.8 "Relativistische" Teilchen

Bei genügend hohen Energien müssen alle Teilchen relativistisch behandelt werden; diese kritische Energie ist umso höher je grösser die Ruhemasse des Teilchens. Die Energien $E_{1\%}$ und $E_{50\%}$, bei denen die klassisch nach

$$E_{kin}^{(klass)} = \frac{1}{2}\, m v^2 \tag{A.42}$$

berechneten Energiewerte um 1% bzw. 50% von den relativistisch nach

$$E_{kin}^{(rel)} = m_0 c^2\,(\gamma - 1) \tag{A.43}$$

berechneten abweichen, sind:

Tab. A.1

Teilchen	$E_{1\%}$	$E_{50\%}$
Elektron	0,0032 MeV	0,31 MeV
μ-Meson	0,64 MeV	62 MeV
Proton	6,1 MeV	590 MeV

Bezeichnet man willkürlich Teilchen als "relativistisch", wenn ihre kinetische Energie diejenige mit $\gamma = 1{,}1$ überschreitet, ergeben sich folgende Werte für die kritische kinetische Energie (Tab. A.2):

Tab. A.2

Teilchen	kritische kinetische Energie
γ, ν	0 MeV
e	0,051 MeV
μ	11 MeV
π	14 MeV
p	94 MeV
Σ	119 MeV
d	188 MeV
α	376 MeV

A.9 Geschwindigkeiten relativistischer, geladener Teilchen

Die Teilchenenergie lässt sich durch die Potentialdifferenz $\mathcal{U}$ ausdrücken, die das Teilchen aus der Ruhelage auf diese Energie beschleunigen würde; die entsprechende Geschwindigkeit ist dann

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{|q\cdot\mathcal{U}|}{m_0 c^2} + 1\right)^2}} \tag{A.44}$$

worin q die Ladung und m_0 die Ruhemasse des Teilchens ist.

Fig. A. 5 zeigt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ als Funktion von β . In Tab. A. 3 sind die nach (A. 44) berechneten Werte von β und von γ für Teilchen bei verschiedenen Energien angegeben. Die Resultate sind in Fig. A. 6 und A. 7 graphisch dargestellt.

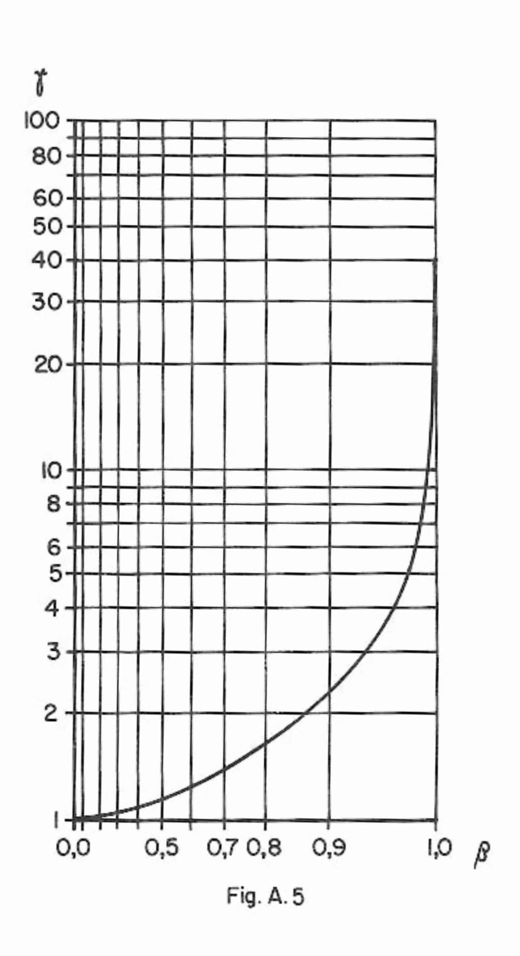


Fig. A. 5

Tabelle (A. 3) Werte von β und γ für Teilchen der Energie 0,1 bis 10^{12} eV

Kinetische Energie (eV)	Obere Zeile = β, Untere Zeile = γ für jede Energie			
	Elektronen	Protonen	Deuteronen	α-Teilchen
0,1	0,0006 1,00	0,0000 1,00	0,0000 1,00	0,0000 1,00
1,0	0,0020 1,00	0,0000 1,00	0,0000 1,00	0,0000 1,00
10	0,0063 1,00	0,0001 1,00	0,0001 1,00	0,0001 1,00
10^2	0,020 1,00	0,0005 1,00	0,0003 1,00	0,0002 1,00
10^3	0,063 1,00	0,0015 1,00	0,0010 1,00	0,0007 1,00
10^4	0,20 1,02	0,0046 1,00	0,0033 1,00	0,0023 1,00
10^5	0,55 1,20	0,015 1,00	0,010 1,00	0,0073 1,00
10^6	0,94 2,96	0,046 1,00	0,033 1,00	0,0232 1,00
10^7	0,99 20,6	0,15 1,01	0,10 1,01	0,073 1,00
10^8	1,00 198	0,43 1,11	0,31 1,05	0,227 1,03
10^9	1,000 $>$ 1000	0,88 2,07	0,76 1,53	0,615 1,27
10^{10}	1,0000 $>$ 1000	0,996 11,7	0,99 6,28	0,962 3,70
10^{11}	1,0000 $\to \infty$	1,000 108	1,00 54,5	0,9994 27,9
10^{12}	1,0000 $\to \infty$	1,0000 1067	1,000 535	1,0000 270

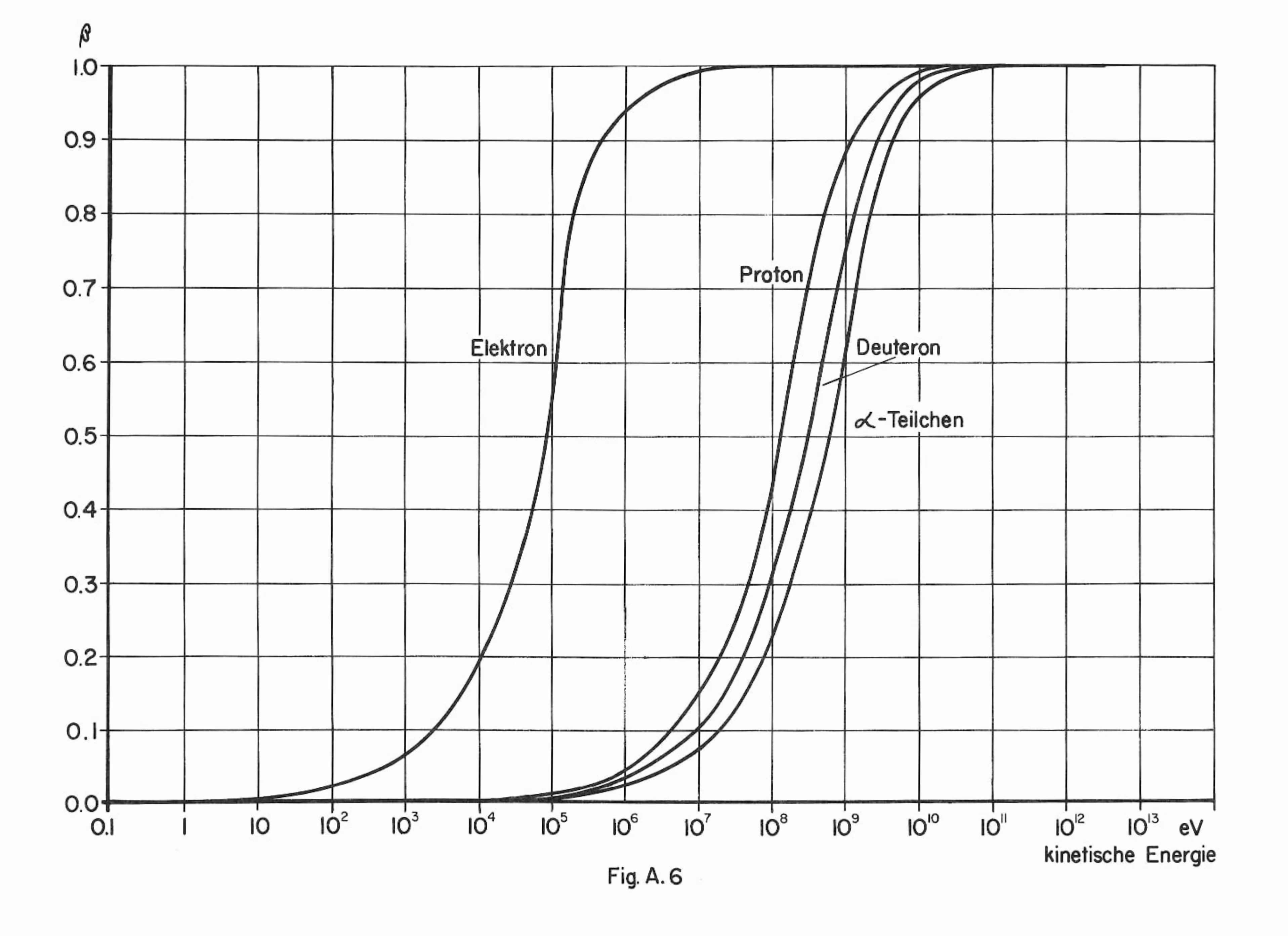

β
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.1
1
10
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
10^{10}
10^{11}
10^{12}
10^{13} eV
kinetische Energie
Elektron
Proton
Deuteron
α-Teilchen

Fig. A. 6

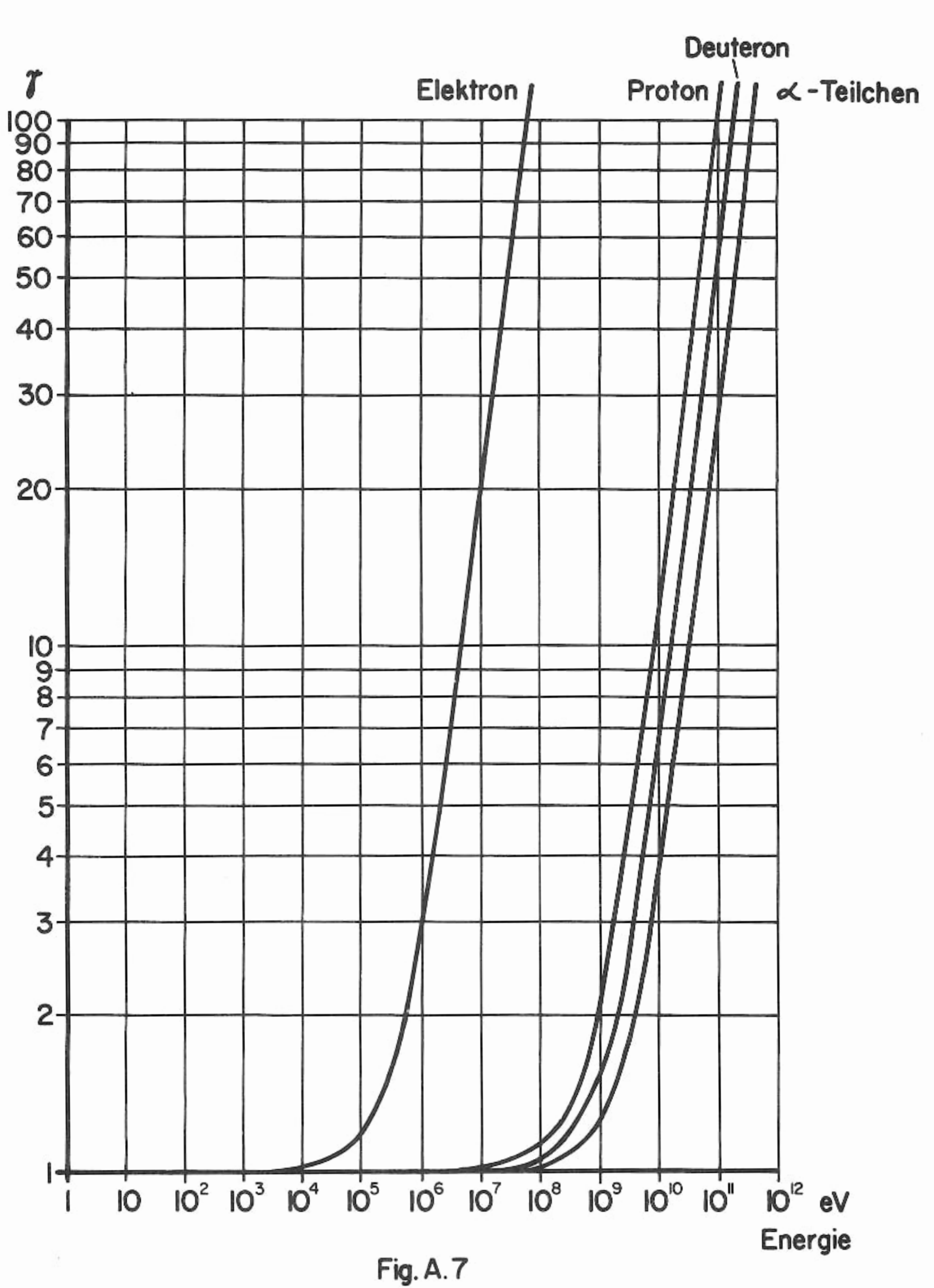

γ
Elektron
Deuteron
Proton
α -Teilchen
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
10
10²
10³
10⁴
10⁵
10⁶
10⁷
10⁸
10⁹
10¹⁰
10¹¹
10¹²
eV
Energie

Fig. A. 7

ANHANG B

B. LABOR- UND SCHWERPUNKTSSYSTEM

Im SCHWERPUNKTSSYSTEM (CENTRE-OF-MASS oder CENTRE-OF-MOMENTUM SYSTEM) befindet sich der Schwerpunkt von zusammenstossenden Teilchen in Ruhe. Da im Schwerpunktssystem die Summe aller Impulskomponenten null ist

$$\sum \vec{p}\,' = 0 \qquad (B.1)$$

bietet es den Vorteil, Stossprobleme einfacher zu behandeln.

Die Beziehungen für elastische Stösse seien zunächst nicht-relativistisch und anschliessend relativistisch behandelt.

B.1 Nicht-relativistischer, elastischer Zusammenstoss eines bewegten Teilchens mit einem ruhenden.

Es sei angenommen, ein Teilchen der Masse m_1 und der gleichförmigen Geschwindigkeit u_1 im Laborsystem stosse elastisch mit einem Teilchen der Masse m_2 zusammen, das sich in Ruhe befinde. Nach dem Zusammenstoss seien die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (Fig. B.1).

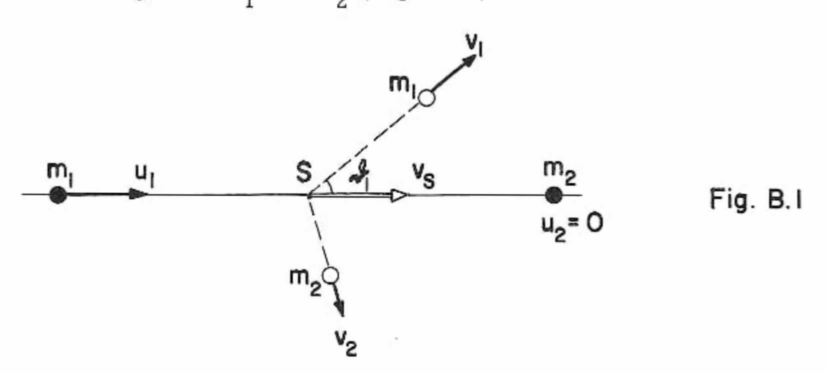


Fig. B.1

Die entsprechende Situation sieht im Schwerpunktssystem wie in Fig. B.2 aus:

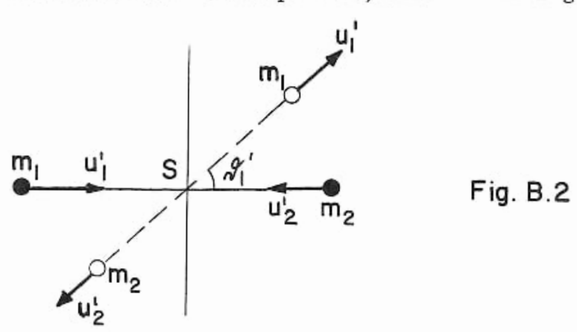


Fig. B.2

Hierin bezeichnen die gestrichenen Grössen diejenigen im Schwerpunktssystem.

B.1.1 Geschwindigkeitsbeziehungen

Wegen der Impulserhaltung ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Laborsystem

$$v_S = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot u_1 \quad . \qquad (B.2)$$

Dann sind die Teilchengeschwindigkeiten im Schwerpunktssystem

$$u_1' = u_1 - v_S = u_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot u_1 \equiv \mu_2 u_1 \quad (B.3)$$

worin

$$\mu_2 \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (B.4)$$

und

$$u_2' = -|v_S| = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot u_1 \equiv -\mu_1 u_1 \quad (B.5)$$

worin

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad . \quad (B.6)$$

Da die gesamte kinetische Energie erhalten bleibt, entfernen sich die Teilchen von dem Schwerpunkt nach dem Stoss mit unveränderten Geschwindigkeitsbeträgen im Schwerpunktssystem:

$$|u_1'| = |v_1'| = \mu_2 u_1 \quad (B.7)$$

$$|u_2'| = |v_2'| = \mu_1 u_1 \quad . \quad (B.8)$$

B.1.2 Beziehungen der kinetischen Energien

Die entsprechenden kinetischen Energien der Teilchen vor und nach dem elastischen Stoss sind:

Tab. B.1

vor/nach Stoss	Teilchen	Laborsystem	Schwerpunktssystem
vor	1	$\frac{1}{2} m_1 u_1^2$	$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \mu_2^2 u_1^2$
vor	2	0	$\frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \mu_1^2 u_1^2$
nach	1	$\frac{1}{2} m_1 v_1^2$	$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \mu_2^2 u_1^2$
nach	2	$\frac{1}{2} m_2 v_2^2$	$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \mu_1^2 u_1^2$
--	Schwerpunkt	$\frac{1}{2}(m_1+m_2) v_S^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\mu_1^2 u_1^2$	0

B.1.3 Winkelbeziehungen

Das Vektordiagramm in Fig. B.3 zeigt die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten, die bei der elastischen Streuung auftreten und aus denen sich die Winkelbeziehungen ableiten lassen.

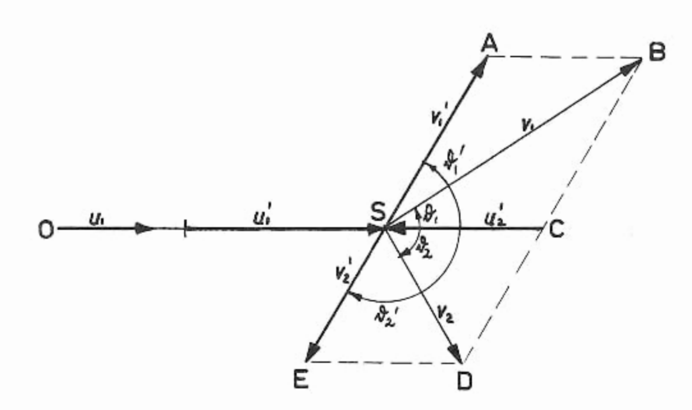


Fig. B.3

Da $\quad |u_2'| = |v_2'| \quad , \quad \overline{SC} = \overline{SE} \; ,$ (B.9)

ergibt sich aus Fig. B.3:

$$\sphericalangle\, ESD = \sphericalangle\, SDE = \sphericalangle\, DSC = \vartheta_2 \left(= \tfrac{1}{2} \vartheta_2'\right) \qquad (B.10)$$

woraus $\quad \sphericalangle\, ASC \equiv \boxed{\vartheta_1' = \pi - 2\,\vartheta_2} \; ,$ (B.11)

und aus dem Sinussatz für $\triangle$ BSC,

$$\frac{v_1'}{\sin \vartheta_1} = \frac{u_2'}{\sin (\vartheta_1' - \vartheta_1)} \; , \qquad (B.12)$$

$$\sin (\vartheta_1' - \vartheta_1) = \frac{m_1}{m_2} \cdot \sin \vartheta_1 \equiv k \sin \vartheta_1 \qquad (B.13)$$

mit

$$\boxed{k \equiv \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \; . \qquad (B.14)$$

Ausserdem

$$tg\, \vartheta_1 = \frac{v_1 \sin \vartheta_1}{u_2' + u_1' \cos \vartheta_1'} = \frac{v_1' \sin \vartheta_1'}{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_1 \cos \vartheta_1'} \qquad (B.15)$$

also

$$\boxed{tg\, \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta_1'}{k + \cos \vartheta_1'}} \qquad (B.16)$$

und aus (B.11):

$$\boxed{\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_1'}{2}} \; , \qquad (B.17)$$

was gemäss Verabredung negativ ist.

Es lässt sich zeigen, dass zwischen dem Streuwinkel ϑ_1, und dem Rückstosswinkel ϑ_2 im Laborsystem die Beziehung

$$\boxed{tg\, \vartheta_1 = \frac{\sin 2\,\vartheta_2}{k - \cos 2\,\vartheta_2}} \qquad (B.18)$$

gilt. Sie ist für verschiedene Werte von k in Fig. B.4 dargestellt.

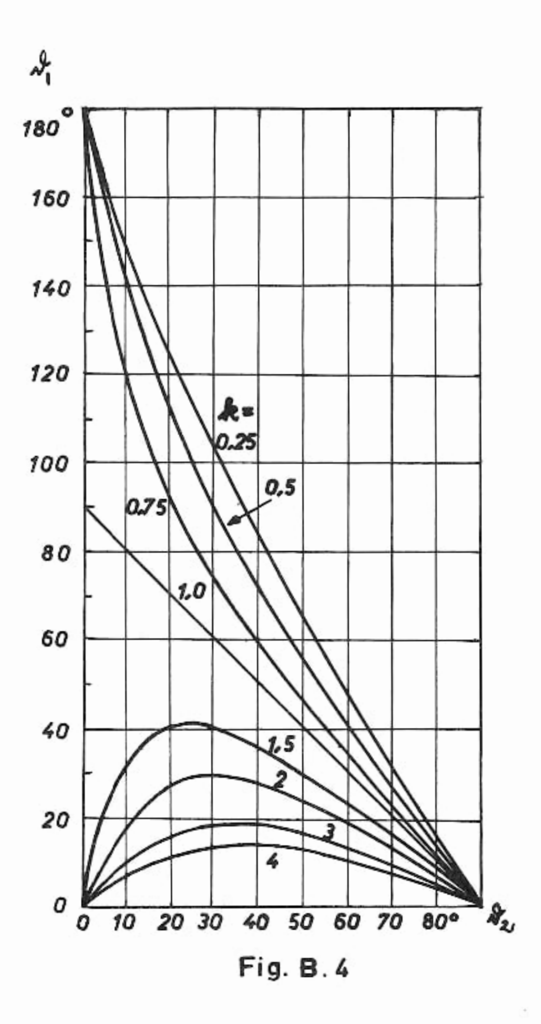


Fig. B.4

B.1.4 Beziehungen zwischen Energie und Streuwinkel im Laborsystem

Aus Fig. B.3 folgt:

a) Wegen der Impulserhaltung muss der senkrechte Abstand des Punktes B von $\overline{SD}$ gleich dem senkrechten Abstand des Punktes 0 von $\overline{SD}$ sein:

$$v_1 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) = u_1 \sin \vartheta_2 \qquad (B.19)$$

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}} \quad . \qquad (B.20)$$

b) Ebenso $v_2 = 2 \cdot \overline{SC} \cdot \cos \vartheta_2$, weil $\overline{SC} = \overline{CD}$

$$v_2 = 2\, u_2' \cos \vartheta_2 = 2\, \mu_1 u_1 \cos \vartheta_2 \qquad (B.21)$$

$$\boxed{\frac{v_2}{u_1} = 2\, \mu_1 \cos \vartheta_2} \quad . \qquad (B.22)$$

c) Ausserdem ist wegen der Erhaltung des Impulses längs $\overline{OC}$:

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\vartheta_1 + m_2 v_2 \cos\vartheta_2 \qquad (B.23)$$

woraus $$\frac{v_2}{u_1} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta_2} \cdot \left(1 - \frac{v_1}{u_1}\cos\vartheta_1\right) . \qquad (B.24)$$

Setzt man aus (B.20) $\frac{v_1}{u_1}$ ein, dann folgt

$$\boxed{\frac{v_2}{u_1} = \frac{k \sin\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}} . \qquad (B.25)$$

d) Dann ist für Teilchen 1 das Verhältnis zwischen kinetischer Anfangs- und Endenergie:

$$\boxed{\frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = \frac{\sin^2\vartheta_2}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}} \qquad (B.26)$$

und das Verhältnis der kinetischen Endenergie des Teilchens 2 zu der Anfangsenergie des Teilchens 1:

$$\boxed{\frac{(E_2)_f}{(E_1)_i} = \frac{k \sin^2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = 4\mu_1\mu_2\cos^2\vartheta_2} . \qquad (B.27)$$

e) Es folgt

$$\boxed{(E_2)_f = E_{max} \cdot \cos^2\vartheta_2} \qquad (B.28)$$

worin $$E_{max} = 4\mu_1\mu_2 \cdot (E_1)_i \qquad (B.29)$$

die maximale kinetische Energie ist, die dem Targetteilchen übertragen werden kann.

B.1.5 Beziehung der Raumwinkel

Im Laborsystem ist der Raumwinkel zwischen zwei Kegeln, die mit den Öffnungswinkeln ϑ_1 und $\vartheta_1 + d\vartheta_1$ gemeinsam von dem Target ausgehen (Fig. B.5)

$$\boxed{d\Omega = 2\pi \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1} . \qquad (B.30)$$

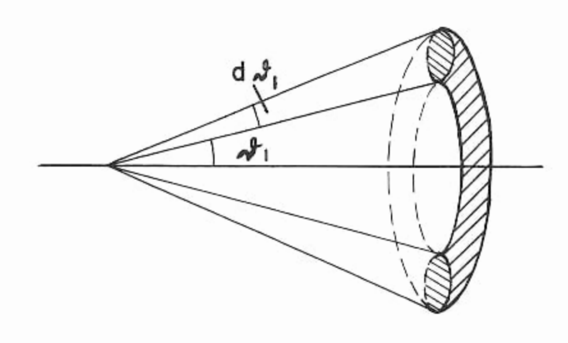


Fig. B.5

Im Schwerpunktssystem ist der entsprechende Raumwinkel

$$\boxed{d\Omega' = 2\pi \sin\vartheta_1' \, d\vartheta_1'} \quad . \tag{B.31}$$

Aus der Beziehung (B.16) zwischen ϑ_1 und ϑ_1' folgt

$$\boxed{d\Omega = \frac{1 + k\cos\vartheta_1'}{\left[1 + 2k\cos\vartheta_1' + k^2\right]^{3/2}} \cdot d\Omega'} \quad . \tag{B.32}$$

B.1.6 Beziehung der Winkelverteilungen

Es werde angenommen, dass die Winkelverteilung der herauskommenden Teilchen im Laborsystem durch $I(\vartheta_1)$ und im Schwerpunktssystem durch $I(\vartheta_1')$ gegeben sei.

Für isotrope Verteilung im Schwerpunktssystem $I(\vartheta_1')$= const ist

$$I(\vartheta_1) \, . \, 2\pi \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 = I(\vartheta_1') \, . \, 2\pi \sin\vartheta_1' \, d\vartheta_1' \tag{B.33}$$

woraus
$$\frac{I(\vartheta_1)}{I(\vartheta_1')} = \frac{\sin\vartheta_1' \, d\vartheta_1'}{\sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1} = \frac{d(\cos\vartheta_1')}{d(\cos\vartheta_1)} \quad . \tag{B.34}$$

Mit (B.16)

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\sin\vartheta_1'}{k + \cos\vartheta_1'} \tag{B.35}$$

ergibt sich

$$\cos\vartheta_1' = -k\sin^2\vartheta_1 \pm \cos\vartheta_1 \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta_1} \quad . \tag{B.36}$$

Also ist

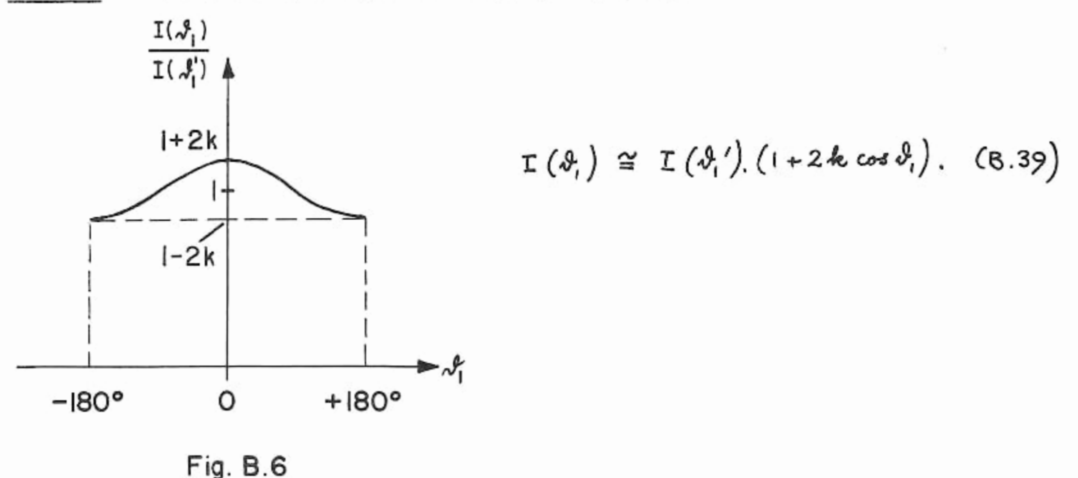
$$\frac{d(\cos\vartheta_1')}{d(\cos\vartheta_1)} = 2k\cos\vartheta_1 \mp \frac{1 - k^2 + 2k^2\cos^2\vartheta_1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta_1}} \quad . \tag{B.37}$$

Da die Beziehung zwischen den Winkelverteilungen aus physikalischen Gründen positiv sein muss, gilt hierin nur das positive Vorzeichen. Dann ist gemäss (B.34)

$$\frac{I(\vartheta_1)}{I(\vartheta_1')} = \frac{\sigma(\vartheta_1)}{\sigma(\vartheta_1')} = \frac{\left[\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta_1} + k\cos\vartheta_1\right]^2}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta_1}} \quad . \tag{B.38}$$

Es seien zwei spezielle Fälle betrachtet:

(a) k << 1: Stoss eines leichten Teilchens auf ein schweres.



$$I(\vartheta_1) \cong I(\vartheta_1') . (1 + 2k\cos\vartheta_1) \, . \tag{B.39}$$

Fig. B.6

(b) k >> 1: Stoss eines schweren Teilchens auf ein leichtes.

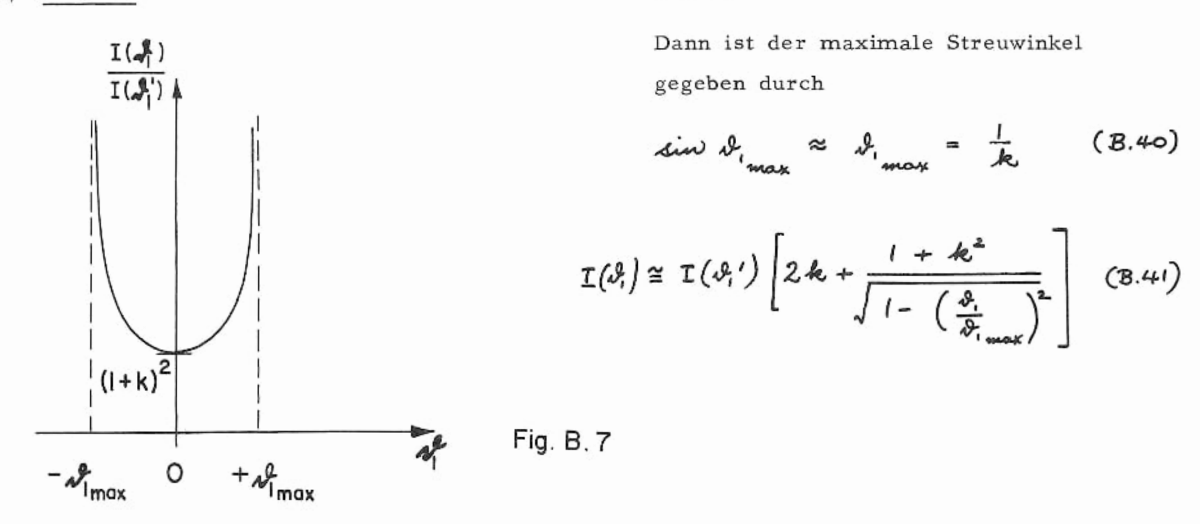


Fig. B.7

Dann ist der maximale Streuwinkel gegeben durch

$$\sin\vartheta_{1max} \approx \vartheta_{1max} = \frac{1}{k} \qquad (B.40)$$

$$I(\vartheta_1) \cong I(\vartheta_1')\left[2k + \frac{1+k^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{1max}}\right)^2}}\right] \qquad (B.41)$$

(c) k = 1: Stoss zwischen gleichschweren Teilchen.

$$I(\vartheta_1) = I(\vartheta_1') \cdot 4\cos\vartheta_1 \, . \qquad (B.42)$$

B.2 Relativistischer Zusammenstoss eines bewegten Teilchens mit einem ruhenden

B.2.1 Geschwindigkeitsbeziehungen

Die physikalischen Verhältnisse und die Vektordiagramme sind dieselben wie zuvor, mit der Bedingung, dass jetzt die relativistischen Ausdrücke für die Geschwindigkeiten und die Addition der Geschwindigkeiten, Impulse und Energien zu verwenden sind.

Es werde folgende Nomenklatur eingeführt: Der Anfangsimpuls

des Teilchens 1 im Laborsystem $\vec{p}_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \frac{i}{c}\cdot E_1)$

" 1 im SP- " $\vec{p}_1{}' = (p_{1x}', p_{1y}', p_{1z}', \frac{i}{c}\cdot E_1')$

" 2 im Labor- " $\vec{p}_2 = 0$

" 2 im SP- " $\vec{p}_2{}' = (p_{2x}', p_{2y}', p_{2z}', \frac{i}{c}\cdot E_2') = -\vec{p}_1{}'$ (B.43)

(SP = Schwerpunkt)

Da im Schwerpunktssystem die Endgeschwindigkeiten der Teilchen ihren betreffenden Anfangsgeschwindigkeiten gleich sind, gilt auch dieselbe Gleichheit für die Beträge der Impulse.

Also ist nach dem Stoss der Impuls

des Teilchens 1 im SP-System = $|\vec{p}_1{}'|$,

" 2 " " = $|\vec{p}_2{}'|$. (B.44)

Die Impulse im Schwerpunktssystem vor und nach dem Stoss sind in ihren Beträgen alle einander gleich, unterscheiden sich allerdings in der Richtung. Schreibt man den Betrag als p_o und zählt die Impulskomponenten in der Richtung +x bzw. +y positiv, dann erhält man die expliziten Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} p_{1x}' &= p_o\cos\vartheta_1' \;; & p_{2x}' &= -p_{1x}' = -p_o\cos\vartheta_1' \\ p_{1y}' &= p_o\sin\vartheta_1' \;; & p_{2y}' &= -p_{1y}' = -p_o\sin\vartheta_1' \\ p_{1z}' &= 0 \;; & p_{2z}' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (B.45)$$

Als Abkürzung für die relativischen Geschwindigkeiten werde im Schwerpunktssystem

$$\gamma_t' \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(\beta_t')^2}} \qquad \beta_t' \equiv \frac{u_t'}{c} \tag{B.46}$$

benützt, wobei der Index t = 1,2 das gemeinte Teilchen angibt.

a) Geschwindigkeitsbeziehungen im Schwerpunktssystem

Vor dem Stoss ist gemäss Definition (A. 24)

$$p_1' = m_1 u_1' \cdot \gamma_1' = m_1 c \beta_1' \gamma_1' = m_1 c \sqrt{(\gamma_1')^2 - 1} \tag{B.47}$$

und

$$p_2' = m_2 c \sqrt{(\gamma_2')^2 - 1} = p_1' , \tag{B.48}$$

so dass

$$\boxed{m_1 \sqrt{(\gamma_1')^2 - 1} = m_2 \sqrt{(\gamma_2')^2 - 1}} \; . \tag{B.49}$$

b) Geschwindigkeitsbeziehungen zwischen Labor- und Schwerpunktssystem

Die relativistische Impulstransformation für das Teilchen 1 vom Labor- ins Schwerpunktssystem lautet, da das Schwerpunktssystem gegenüber dem Laborsystem die Geschwindigkeit v_S besitzt,

$$p_1' = \gamma_2' \left(p_1 - \beta_2' \cdot \frac{E_1}{c} \right) , \tag{B.50}$$

worin

$$E_1 = \gamma_1 m_1 c^2 \tag{B.51}$$

die totale Energie und

$$p_1 = \gamma_1 m_1 u_1 = m_1 c \beta_1 \gamma_1 = m_1 c \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \tag{B.52}$$

der Impuls des Teilchens 1 im Laborsystem vor dem Stoss ist. Dann ist gemäss (B. 50)

$$p_1' = \gamma_2' \left(m_1 c \beta_1 \gamma_1 - m_1 c \beta_2' \gamma_1 \right) . \tag{B.53}$$

Durch Vergleich mit der Definition (A. 24)

$$p_1' = m_1 c \beta_1' \gamma_1' \tag{B.54}$$

folgt

$$\gamma_2' \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1 \sqrt{(\gamma_2')^2 - 1} = \sqrt{(\gamma_1')^2 - 1} \; . \tag{B.55}$$

Aus der obigen Geschwindigkeitsbeziehung im Schwerpunktssystem (B.49) folgt jedoch:

$$\sqrt{(\gamma_1')^2 - 1} = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{(\gamma_2')^2 - 1} = \gamma_2'\sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1\sqrt{(\gamma_2')^2 - 1}$$

also $$\gamma_2'\sqrt{\gamma_1^2 - 1} = \sqrt{(\gamma_2')^2 - 1}\left[\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right]$$

so dass $$\frac{\gamma_1^2 - 1}{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} = 1 - \frac{1}{(\gamma_2')^2}$$

und $$\gamma_2' = \frac{\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 2\gamma_1\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}} \equiv \gamma_S . \qquad (B.56)$$

Analog ist

$$\gamma_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} + \gamma_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\gamma_1\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}} . \qquad (B.57)$$

B.2.2 Energie im Schwerpunktssystem

In der relativistischen Kinematik ist es wichtig, zwischen der totalen Energie E und der kinetischen Energie T zu unterscheiden.

Die totale Energie ist gleich der kinetischen Energie plus der Ruheenergie:

$$E = T + m_0c^2 . \qquad (B.58)$$

Wenn bei dem Zusammenstoss die Massen der betroffenen Teilchen einzeln erhalten bleiben, spielen die Ruheenergien keine Rolle. Dann setzt sich die Stossenergie, die beispielsweise zur Anregung eines Kernes oder für das Zustandekommen einer Reaktion verfügbar ist, aus der Summe der betreffenden kinetischen Energien und, wenn sich die Teilchen vor dem Stoss in einem angeregten Zustand befinden, auch aus potentiellen Energien zusammen. Diese verfügbare Reaktionsenergie ist ihrem Betrag nach diejenige im Schwerpunktssystem (KINETIC ENERGY OF IMPACT). Infolgedessen ist es notwendig, für einen Prozess, dessen Parameter, beispielsweise die kinetischen Energien, nur im Laborsystem gegeben sind, die kinetische Energie im Schwerpunktssystem herzuleiten.

Benützt man die gleiche Schreibweise wie oben, wobei die Suffixe die Teilchen und die gestrichenen Grössen die Werte im Schwerpunktssystem angeben, dann lässt sich die relativistische Energietransformation (A.41) schreiben als

$$E_1' = \gamma_2' \left(E_1 - \beta_2' c\, p_1 \right) = m_1 c^2 \gamma_1' \qquad (B.59)$$

woraus

$$\gamma_2' \left(m_1 c^2 \gamma_1 - \beta_2' m_1 c^2 \beta_1 \gamma_1 \right) = m_1 c^2 \gamma_1' \qquad (B.60)$$

und

$$\gamma_2' \gamma_1 - \sqrt{[(\gamma_2')^2 - 1][\gamma_1^2 - 1]} = \gamma_1' \, . \qquad (B.61)$$

Die entsprechenden kinetischen Energien im Schwerpunktssystem sind

$$T_1' = E_1' - m_1 c^2 = m_1 c^2 (\gamma_1' - 1) \qquad (B.62)$$

$$T_2' = E_2' - m_2 c^2 = m_2 c^2 (\gamma_2' - 1) \, . \qquad (B.63)$$

Die Reaktionsenergie im Schwerpunktssystem ist insgesamt

$$W' = T_1' + T_2' \qquad (B.64)$$

$$\boxed{W' = m_1 c^2 \left\{ \gamma_2' \gamma_1 - \sqrt{[(\gamma_2')^2 - 1][\gamma_1^2 - 1]} - 1 \right\} + m_2 c^2 (\gamma_2' - 1)} \, . \qquad (B.65)$$

Wenn die Energien in eV angegeben werden, dann ist es leicht, (B. 65) in eine bequemere Form zu überführen. Setzt man

$$\frac{T}{mc^2} \equiv \alpha = \frac{eU}{mc^2} \qquad (B.66)$$

wobei U die Beschleunigungsspannung im Laborsystem ist, dann folgt

$$W'_{(eV)} \equiv U_1' + U_2' = \left\{ \gamma_2' \gamma_1 - \sqrt{[(\gamma_2')^2 - 1][\gamma_1^2 - 1]} - 1 \right\} (m_1 c^2)_{(eV)} + (\gamma_2' - 1)(m_2 c^2)_{(eV)} \, . \qquad (B.67)$$

Wenn $m_1 = m_2 = m$, dann wird die kinetische Energie im Schwerpunktssystem

$$\boxed{W' \equiv U' = 2 mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} - 1 \right]} \, . \qquad (B.68)$$

Daraus lassen sich Näherungsformeln für den nicht-relativistischen (N. R.) und den extrem-relativistischen Fall (E. R.) gewinnen:

$$\text{N.R.} \quad (\alpha \ll 1): \qquad U' \cong 2 mc^2 \cdot \frac{\alpha}{4} = \frac{U}{2} \qquad (B.69)$$

$$\text{E.R.} \quad (\alpha \gg 1): \qquad U' \cong 2 mc^2 \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \, . \qquad (B.70)$$

Als ein Beispiel für den Energieunterschied zwischen Labor- und Schwerpunktssystem sei der Stoss zwischen einem Teilchenstrahl von 50 GeV und einer ruhenden Target der gleichen Kernart betrachtet, beispielsweise pp-Streuung. Die totale kinetische Energie im Laborsystem ist also 50 GeV, während die im Schwerpunktssystem nur 7,9 GeV beträgt; um im Schwerpunktssystem 50 GeV zu erhalten, müsste man den einfallenden Strahl auf 1430 GeV beschleunigen! - Eine andere Methode, eine Reaktionsenergie von 50 GeV im Schwerpunktssystem zu erzeugen, wäre die, zwei Beams von je 25 GeV aufeinanderprallen zu lassen (colliding beams). Da die Teilchen vom gleichen Typ sind, fallen hierbei Labor- und Schwerpunktssystem zusammen.

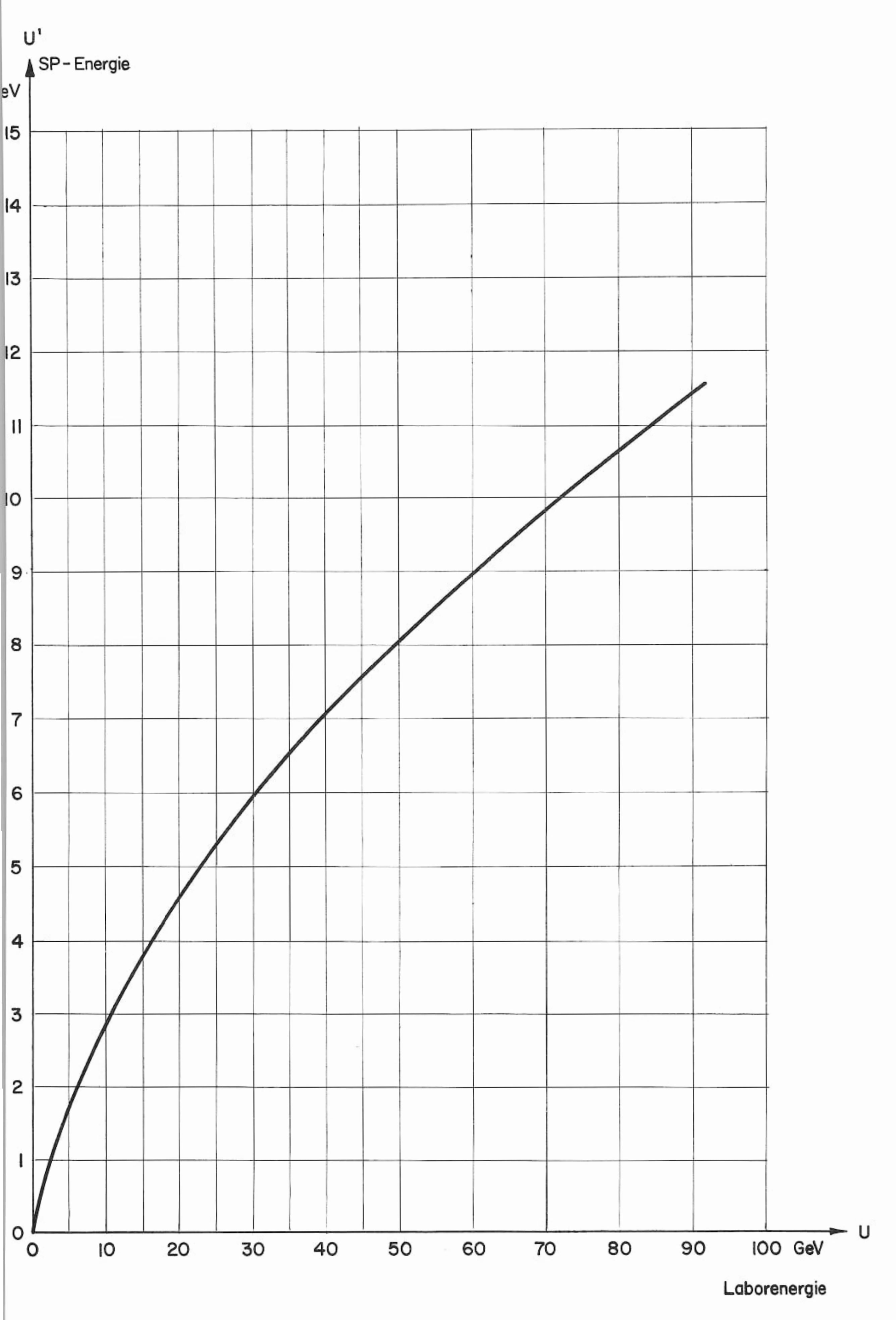

U'
SP - Energie
eV
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 GeV
U
Laborenergie

Fig. B.8

B.2.3 Winkelbeziehungen

Für Teilchen 1 lautet die inverse Transformation der Impulskomponenten nach dem Stoss

$$p_{1x} = \gamma_2'\left(p_{1x}' + \beta_2' \cdot \frac{E_1'}{c}\right) = \gamma_2'\left(p_{1x}' + \beta_2' m_1 c \gamma_1'\right) \qquad (B.71)$$

worin E_1' die totale Energie des Teilchens 1 im Schwerpunktssystem ist und

$$p_{1y} = p_{1y}' \; ; \quad p_{1z} = p_{1z}' = 0 \; . \qquad (B.72)$$

Im Schwerpunktssystem ist nun

$$p_{1x}' = \vec{p}_1' \cdot \cos \vartheta_1' \qquad (B.73)$$

$$p_{1y}' = \vec{p}_1' \cdot \sin \vartheta_1' = p_{1y} \; . \qquad (B.74)$$

Substituiert man in (B.71) mit Hilfe von $p_1' = m_1 c \beta_1' \gamma_1'$, dann folgt

$$p_{1x} = \gamma_2' \vec{p}_1' \left(\cos \vartheta_1' + \frac{\beta_2'}{\beta_1'}\right) \qquad (B.75)$$

und

$$\boxed{\operatorname{tg} \vartheta_1 \equiv \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{\sin \vartheta_1'}{\gamma_2'(\cos \vartheta_1' + \delta)}} \; , \qquad (B.76)$$

worin

$$\boxed{\delta \equiv \frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\gamma_1'}{\gamma_2'}} \; . \qquad (B.77)$$

Man beachte die Ähnlichkeit in der Form mit dem nicht-relativistischen Fall (B.16).

Die Abhängigkeit von ϑ_2 vom Streuwinkel im Schwerpunktssystem erhält man durch ganz analoge Überlegungen am Teilchen 2.

In diesem Fall spielt die Verabredung des Vorzeichens eine wichtige Rolle. Die Definition

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 \equiv \frac{p_{2y}}{p_{2x}} \qquad (B.78)$$

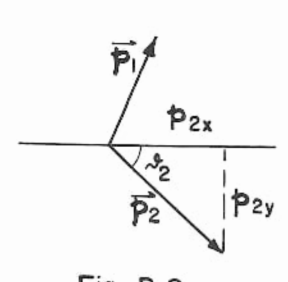


Fig. B.9

macht $\operatorname{tg} \vartheta_2$ automatisch nach Übereinkunft zu einer negativen Grösse, da p_{2y} in die negative y-Richtung weist (Fig. B.9), während natürlich die tatsächliche Grösse von $\operatorname{tg} \vartheta_2$ positiv ist ($\vartheta_2 < 90°$).

Die inverse Lorentz-Transformation des Impulses ist mit der folgenden Vorzeichenübereinkunft

$$\underset{\oplus}{p_{2x}} = \gamma_2'\left(\underset{\ominus}{p_{2x}'} + \underset{\oplus}{\beta_2' \cdot \frac{E_2'}{c}}\right) \qquad (B.79)$$

$$= \gamma_2'\left(p_{2x}' + \beta_2' \gamma_2' m_2 c\right) \; . \qquad (B.80)$$

Da $$p_{2x}' = -p_0 \cos\vartheta_1' \qquad (B.81)$$

und $$m_2 c\, \beta_2' \gamma_2' = +|p_2'| = +p_0 \qquad (B.82)$$

folgt, dass $$p_{2x} = \gamma_2' p_0 (1 - \cos\vartheta_1') \; . \qquad (B.83)$$

Da ausserdem (B.45)

$$p_{2y} = p_{2y}' = -p_0 \sin\vartheta_1' \qquad (B.84)$$

ist, hat man

$$\boxed{\operatorname{tg}\vartheta_2 \equiv \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = -\frac{1}{\gamma_2'} \cdot \frac{\sin\vartheta_1'}{1-\cos\vartheta_1'} = -\frac{1}{\gamma_2'} \operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1'}{2}} \; , \qquad (B.85)$$

worin das Minuszeichen die Verabredung wiedergibt, die auch weiterhin benutzt wird; es ist aber zu unterdrücken, wenn Winkelgrössen betrachtet werden.

B.2.4 Raumwinkelbeziehung

Ebenso wie im nicht-relativistischen Fall ist relativistisch der Raumwinkel zwischen zwei Kegeln im Laborsystem

$$d\Omega_1 = 2\pi \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \qquad (B.86)$$

und im Schwerpunktssystem

$$d\Omega_1' = 2\pi \sin\vartheta_1' \, d\vartheta_1' \; . \qquad (B.87)$$

Die Beziehung zwischen diesen ist jedoch im relativistischen Fall anders als im nicht-relativistischen, weil die Winkelbeziehungen nicht mehr dieselben sind.

$$d\Omega_1 = 2\pi \, d(\cos\vartheta_1) = 2\pi \cdot \frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')} \cdot \frac{d(\cos\vartheta_1')}{d\vartheta_1'} \cdot d\vartheta_1'$$

$$= -2\pi \sin\vartheta_1' \, d\vartheta_1' \cdot \frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')} = -d\Omega_1' \cdot \frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')} \; .$$

Unter Einsetzen des weiter unten ausgerechneten Wertes (B.94) von $\frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')}$,

$$\boxed{d\Omega_1 = -d\Omega_1' \cdot \frac{\gamma_2'(1+\delta\cos\vartheta_1')}{\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]^{3/2}}} \qquad (B.88)$$

mit $$\delta \equiv \frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} \; . \qquad (B.89)$$

B.2.5 Relativistische Winkelverteilung

Analog zu dem früheren Fall (B.34) ist

$$\frac{I(\vartheta_1)}{I(\vartheta_1')} = \frac{\sigma(\vartheta_1)}{\sigma(\vartheta_1')} = \frac{d(\cos\vartheta_1')}{d(\cos\vartheta_1)} \quad . \tag{B.90}$$

Hier gilt jedoch die Winkelbeziehung (B.76)

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\sin\vartheta_1'}{\gamma_2'(\cos\vartheta_1' + \delta)} \tag{B.91}$$

mit (B.77)

$$\delta \equiv \frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} \tag{B.92}$$

Bequemlichkeitshalber werde $\frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')}$ berechnet:

Da $(1-\cos^2\vartheta_1)\cdot(\gamma_2')^2\cdot(\cos\vartheta_1' + \delta)^2 = \sin^2\vartheta_1'\cos^2\vartheta_1$

ist $(\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2 = \cos^2\vartheta_1\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]$

und

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\gamma_2'(\cos\vartheta_1' + \delta)}{\sqrt{\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2}} \quad . \tag{B.93}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')} &= \gamma_2'(\cos\vartheta_1' + \delta)\Big\{-\tfrac{1}{2}\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]^{-3/2} \times \\ &\qquad \times \left[-2\cos\vartheta_1 + 2(\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)\right]\Big\} + \\ &\qquad + \gamma_2'\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]^{-1/2} \\ &= \frac{\gamma_2'(1 + \delta\cos\vartheta_1')}{\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]^{3/2}} \quad . \end{aligned} \tag{B.94}$$

Aus (B.90) folgt

$$\boxed{\frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_1)} = \frac{\sigma(\vartheta_1')}{\sigma(\vartheta_1)} = \frac{d(\cos\vartheta_1)}{d(\cos\vartheta_1')} = \frac{\gamma_2'(1 + \delta\cos\vartheta_1')}{\left[\sin^2\vartheta_1' + (\gamma_2')^2(\cos\vartheta_1' + \delta)^2\right]^{3/2}}} \quad . \quad \text{(B.9}$$

Anstatt das Verhältnis der Winkelverteilungen als eine Funktion des Winkels ϑ_1' im Schwerpunktssystem anzugeben, kann man sie durch die Winkel im Laborsystem, allerdings nur unter Preisgabe der Einfachheit, ausdrücken. Das Verhältnis $\frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_2)}$ ist weniger kompliziert als $\frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_1)}$ und wird zuerst behandelt.

Aus der oben abgeleiteten Beziehung (B.85)

$$tg\,\vartheta_2 = -\frac{1}{\gamma_2'}\,ctg\,\frac{\vartheta_1'}{2} \tag{B.96}$$

folgt, dass

$$\cos\vartheta_1' = 1 - \frac{2}{1+(\gamma_2')^2\,tg\,\vartheta_2} \,. \tag{B.97}$$

Dann ergibt sich durch Substituieren und Differentiation:

$$\frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_2)} = \frac{d(\cos\vartheta_2)}{d(\cos\vartheta_1')} = \frac{\cos^4\vartheta_2 + 2(\gamma_2')^2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + (\gamma_2')^4\sin^4\vartheta_2}{4(\gamma_2')^2\cos\vartheta_2} \tag{B.98}$$

was nach Vereinfachung liefert:

$$\boxed{\frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_2)} = \frac{\sigma(\vartheta_1')}{\sigma(\vartheta_2)} = \frac{(\gamma_2')\cdot\left[1-(\beta_2')^2\cos^2\vartheta_2\right]^2}{4\cos\vartheta_2}} \,. \tag{B.99}$$

Das Verhältnis der Winkelverteilungen $\frac{I(\vartheta_1)}{I(\vartheta_1')}$ wird aus der Winkelbeziehung

$$\cos\vartheta_1' = \frac{-\gamma_1^2\delta\cdot\sin^2\vartheta_1 \pm \cos\vartheta_1\sqrt{\gamma_1^2\sin^2\vartheta_1\cdot(1-\delta^2)+\cos^2\vartheta_1}}{\gamma_1^2\sin^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_1} \tag{B.100}$$

abgeleitet; nach Differentiation ergibt sich

$$\boxed{\frac{I(\vartheta_1)}{I(\vartheta_1')} = \frac{d(\cos\vartheta_1')}{d(\cos\vartheta_1)} = \frac{f(\gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1^2\sin^2\vartheta_1\cdot(1-\delta^2)+\cos^2\vartheta_1}\,\left(\gamma_1^2\sin^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_1\right)^2}} \tag{B.101}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{mit}\quad f(\gamma_1) \equiv\; & \pm\gamma_1^4(1-\delta^2)\sin^4\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_1\cos^2\vartheta_1\left(\pm\gamma_1^4\pm\gamma_1^2\pm\gamma_1^2\delta^2\mp 2\gamma_1^4\delta^2\right)+ \\ & + \cos\vartheta_1\cdot\gamma_1^2\delta\sqrt{\gamma_1^2\sin^2\vartheta_1\cdot(1-\delta^2)+\cos^2\vartheta_1} \;+ \\ & + \cos^4\vartheta_1\cdot\left(\mp\gamma_1^2\pm\gamma_1^2\delta^2\pm 2+2-2\gamma_1^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{B.102}$$

Die Beziehungen zwischen Labor- und Schwerpunktssystem werden in folgenden Quellen behandelt:

Ebert	: "Physikalisches Taschenbuch", 1951, pp. 105,
Schiff	: "Quantum Mechanics", 1955, pp. 96,
Evans	: "The Atomic Nucleus", 1955, pp. 828,
Halliday	: "Introductory Nuclear Physics", 1955, pp. 319,
Mather u. Swan	: "Nuclear Scattering", 1958, pp. 426,
Blaton	: Kgl. Dan. Vid. Selskab., Mat.-Fys. Medd., 1950, 24, No. 20,
Morrison	: Segrè: "Experimental Nuclear Physics", 1953, Vol. II, pp. 3,
Marion u. Ginzbarg	: (Shell Development Co. Report) Tables for the Transformation of Angular Distribution Data from the Laboratory System to the Centre of Mass System (unrelativistic).

ANHANG C

C. WELLENGLEICHUNGEN

C.1 Schrödinger-Gleichung

C.1.1 Gleichung und Definitionen

Es werde die nicht-relativistische Wellengleichung für ein einzelnes Teilchen der Masse m und der potentiellen Energie V aus der klassischen Beziehung

Gesamtenergie = kinetische + potentielle Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \qquad (C.1)$$

aufgestellt. Setzt man hierin die OPERATOREN

$$\vec{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \qquad (C.2)$$

$$E \longrightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \qquad (C.3)$$

ein, die auf die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ einwirken, so ergibt sich die ZEITABHÄNGIGE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 \psi + V(\vec{r}, t) \cdot \psi \quad . \qquad (C.4)$$

Diese lässt sich auch als

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi \qquad (C.5)$$

schreiben, worin

$$\mathcal{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \qquad (C.6)$$

der HAMILTON-OPERATOR (HAMILTONIAN) des Systems ist. Dieser Operator liefert bei Anwendung auf die EIGENFUNKTION ψ_n das Ensemble der physikalisch beobachtbaren EIGENWERTE E_n der Gesamtenergie:

$$\mathcal{H} \psi_n = E_n \psi_n \quad . \qquad (C.7)$$

Physikalisch interpretiert man $|\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}$ als die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit t innerhalb des Volumens $d\vec{r} = dx . dy . dz$ zu lokalisieren. Bei Integration über den ganzen Raum muss die Wahrscheinlichkeit gleich 1 sein, weil sich das Teilchen mit Sicherheit darin befinden muss:

$$\int |\psi|^2 d\vec{r} = \int \psi^* \psi \, d\vec{r} = 1 \quad . \qquad (C.8)$$

Die Festsetzung wird als NORMIERUNG der Wellenfunktion bezeichnet.

Da die Wellenfunktion physikalische Vorgänge charakterisiert, ist es vernünftig, für sie und ihre erste Ableitung Eindeutigkeit und stetigen Verlauf über ihren ganzen Bereich zu verlangen. Eine einfachere, aber gleichwertige Forderung ist zuweilen die Stetigkeit von ψ und seiner logarithmischen Ableitung $\frac{\partial(\ln \psi)}{\partial x} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Ferner darf ψ an keiner Stelle unendlich werden, bzw. es ist zu verlangen, dass

$$|\psi|^2 \, d\vec{r} \longrightarrow 0 \quad \text{wenn} \quad d\vec{r} \longrightarrow 0 \,. \qquad (C.9)$$

Für ein gebundenes Teilchen (diskretes Energiespektrum) muss $\psi(x)$ bei $x = \pm \infty$ null sein, so dass die Wahrscheinlichkeit $|\psi|^2$ das Teilchen bei $\pm \infty$ anzutreffen, verschwindet. Für ein freies Teilchen dessen Bewegung durch eine ebene Welle beschrieben werden kann, darf ψ bei $\pm \infty$ auch verschieden von null sein.

Die WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE (PROBABILITY DENSITY) ist stets positiv definit; sie ist gegeben durch

$$\rho = |\psi(\vec{r},t)|^2 = \psi^* \psi \qquad (C.10)$$

und die WAHRSCHEINLICHKEITSSTROMDICHTE (PROBABILITY CURRENT DENSITY) ist definiert durch

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \qquad (C.11)$$

um die KONTINUITÄTS-GLEICHUNG (EQUATION OF CONTINUITY)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (C.12)$$

zu erfüllen, die die Erhaltung von ρ enthält.

C.1.2 Spezielle Schrödinger-Gleichungen

In Abwesenheit eines äusseren Feldes ist die potentielle Energie des Teilchens gleich null, $V(\vec{r},t) = 0$, und die SCHRÖDINGER-GLEICHUNG für ein FREIES TEILCHEN lautet

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{2m}{i\hbar} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}} \,. \qquad (C.13)$$

Für ein stationäres System ist die Wellenfunktion nur eine Funktion der Raumkoordinaten $\vec{r}$; ihre zeitliche Ableitung verschwindet, so dass sich die allgemeine ZEIT-UNABHÄNGIGE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG durch Einsetzen des Operators $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$ in

$$-\frac{p^2}{2m} + E - V(\vec{r}) = 0 \qquad (C.14)$$

ergibt:

$$\boxed{\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = 0} \,. \qquad (C.15)$$

C.1.3 Unbestimmtheitsrelation

Wenn $F(\vec{r},t)$ eine Funktion oder ein Operator ist, dann ist sein ERWARTUNGSWERT (EXPECTATION VALUE) für den Zustand ψ:

$$\langle F \rangle = \int \psi^* F \psi \, d\tau \,. \qquad (C.16)$$

Die UNBESTIMMTHEIT Δx kann als die Wurzel des mittleren Schwankungsquadrates (ROOT MEAN SQUARE DEVIATION) definiert werden

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \,. \qquad (C.17)$$

Mit dieser Definition ist die HEISENBERGSCHE UNBESTIMMTHEITSRELATION, die die Unschärfe zwischen Impuls und Ort bei gleichzeitiger Beobachtung angibt

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2} \, . \qquad (C.18)$$

Normalerweise nimmt man eine weniger strenge Definition und schreibt

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar \, . \qquad (C.19)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \, . \qquad (C.20)$$

C.2 Klein-Gordon-Gleichung für Teilchen mit Spin 0

Schrödinger formulierte gleichzeitig (Ann. d. Physik 1926, 81, 109) die entsprechende relativistische Gleichung durch Einsetzen der Operatoren (C.2) und (C.3) in die relativistische Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \, ; \qquad (C.21)$$

die resultierende Wellengleichung wurde auch anschliessend unabhängig von Gordon (Z. Phys. 1926, 40, 117) und von Klein (Z. Phys. 1927, 41, 407) vorgeschlagen und wird heutzutage KLEIN-GORDON-GLEICHUNG genannt:

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \, . \qquad (C.22)$$

Nimmt man die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (C.23)$$

an und definiert die Stromdichte wie zuvor

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*\right), \qquad (C.24)$$

dann folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte hier als

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \cdot \psi\right) \qquad (C.25)$$

definiert sein muss; ρ kann dabei ebenso negative wie positive Werte annehmen, da sowohl $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ als auch ψ zu irgendeinem Zeitpunkt nach Belieben vorgeschrieben werden können; sie sind Funktionen der Raumkoordinaten $\vec{r}$, infolgedessen kann von positivem Vorzeichen in einigen Gebieten zu negativem Vorzeichen in anderen wechseln. Die Möglichkeit negativer Wahrscheinlichkeitsdichten führte dazu, dass die Gleichung in ihrer Anerkennung sank, wovon sie durch Pauli und Weisskopf (HPA 1934, 7, 709) gerettet wurde, die sie als eine Feldgleichung behandelten und der zweiten Quantisierung unterwarfen; dann wird ρ als eine Ladungsdichte behandelt und kann infolgedessen negative oder positive Werte annehmen, die nur durch das Vorzeichen der Ladung bestimmt sind. Die Wellenfunktion ψ der Klein-Gordon-Gleichung transformiert sich bei eigentlicher Lorentz-Transformation wie ein Skalar; ihr einziger Freiheitsgrad ist also der der Translation: im Besonderen schliesst sie den Freiheitsgrad des Spins aus; die Klein-Gordon-Gleichung ist also nur auf Teilchen mit Spin null, wie π-Mesonen, anwendbar.

Die obige skalare Transformationseigenschaft enthält, dass ρ, wie oben definiert, die vierte, d. h. die zeitartige Komponente eines Vektors ist, dessen Raumkomponenten durch $\vec{j}$ ausgedrückt werden

$$j_\mu = (\vec{j}, \rho) \qquad (C.26)$$

so dass $\int \rho \, d\tau$ unter eigentlicher Lorentz-Transformation invariant ist. Es ist also plausibel, ρ und $\vec{j}$ wie in der Feldtheorie als Ladungs- und Stromdichten zu inter-

pretieren. Für ein Teilchen der Ladung e sind die Ausdrücke für ρ und $\vec{j}$ mit e zu multiplizieren; im Folgenden wird dieses jedoch ausgelassen. Im nicht-relativistischen Grenzwert reduziert sich ρ, wie hier definiert, auf die nicht-relativistische Form (C.10).

Für die Anwesenheit eines äusseren elektromagnetischen Feldes, das durch sein Vektorpotential $\vec{A}$ und sein skalares Potential ϕ bestimmt ist, erweitert man Energie und Impuls durch die eichinvariante Substitution

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \qquad (C.27)$$

$$E \longrightarrow E - e\phi \qquad (C.28)$$

womit die Wellengleichung zu

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2\psi = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi + m^2c^2\psi \qquad (C.29)$$

wird.

Die Energieniveaux in einem Coulomb-Feld mit $\vec{A} = 0$; $e\phi = -\frac{Ze^2}{r}$ und der Ladungsdichte $\left(\frac{E - e\phi}{mc^2}\right)\psi^*\psi$ sind gegeben durch

$$E = mc^2\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n - \ell - \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2}\right)^2}\right]^{-1/2} \qquad (C.30)$$

worin

$$\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar c}$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Ruheenergie mc^2 ist in E einbezogen.

Die hier ausgedrückte Feinstruktur ist von der Formel von Sommerfeld nach der alten Quantentheorie verschieden und ergibt Werte, die grösser als die im Wasserstoffspektrum beobachteten sind; aber man kann auch nicht erwarten, dass die Klein-Gordon-Gleichung sich auf Elektronen anwenden lässt, die Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ sind. Andererseits sollten für π^--Mesonen in "Bohrschen Bahnen" um den Kern die Voraussagen über die Feinstruktur gültig sein.

C.2.1 Relativistisch invariante Schreibweise

Die Klein-Gordon-Gleichung lässt sich eleganter in relativistisch invarianter Form schreiben, indem man den Vierervektor für Energie und Impuls

$$p^\mu \equiv \left(\vec{p}, \frac{i}{c}\cdot E\right) = \left\{\frac{E}{c}, \vec{p}\right\} \qquad (C.31)$$

bildet, worin jetzt die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} p^0 &\equiv \frac{E}{c} \\ p^1, p^2, p^3 &\equiv p_x, p_y, p_z \end{aligned}\right\} \qquad (C.32)$$

alle reell sind. Man kann die ENERGIE-IMPULS-BEZIEHUNG als

$$\boxed{\sum_\mu p^\mu p_\mu = m^2c^2} \qquad (C.33)$$

und die Operatoren einfach als

$$p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv i\hbar \partial_\mu \qquad (C.34)$$

schreiben.

Man beachte hierbei, dass der KONTRAVARIANTE Vektor p^μ, der sich wie die Koordinaten x, y, z, t transformiert, in den entsprechenden KOVARIANTEN Vektor p_μ überführen lässt, der sich wie der Gradient transformiert, durch die relativistische, lineare Transformation

$$v^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} v_\nu \qquad (C.35)$$

und umgekehrt

$$v_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} v^\nu . \qquad (C.36)$$

Hierin ist $g_{\mu\nu}$ der METRISCHE TENSOR mit den Komponenten (+1, -1, -1, -1) und den Eigenschaften

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \quad ; \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad (C.37)$$

und

$$\sum_\nu g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \mu = \lambda \\ 0 \text{ wenn } \mu \neq \lambda \end{cases} . \qquad (C.38)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung lässt sich mit dieser Notierung Lorentz-invariant für den feldfreien Fall

$$\boxed{\left\{ \Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right\} \psi(x^\mu) = 0} \qquad (C.39)$$

schreiben, worin

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 . \qquad (C.40)$$

Wenn äussere Felder existieren, dann lautet (C.39)

$$\left\{ \sum_\mu \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu\right)^2 - m^2c^2 \right\} \psi(x^\mu) = 0 \qquad (C.41)$$

nachdem

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \qquad (C.42)$$

ersetzt ist, wobei

$$A^\mu \equiv \{ \phi, \vec{A} \} . \qquad (C.43)$$

C.3 Dirac-Gleichung für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$

Negative Wahrscheinlichkeitsdichten lassen sich durch Eliminieren zeitlicher Ableitungen in dem Ausdruck für ρ vermeiden; das kann man seinerseits erreichen, indem man in der Wellengleichung nur zeitliche Ableitungen von erster Ordnung zulässt. Die Raum-Zeit-Symmetrie erfordert dann, dass auch die räumlichen Ableitungen auf die von erster Ordnung beschränkt sind. Ausserdem verlangt das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik, dass die Wellengleichung erster Ordnung linear ist.

Dirac formulierte eine solche lineare Gleichung für den feldfreien Fall durch Einführung der Parameter $\vec{\alpha}$ und β als

$$\boxed{E\psi = c\,(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\,\psi + \beta \cdot mc^2 \psi} \qquad (C.44)$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi + \beta\, mc^2 \psi = 0 \quad . \qquad (C.45)$$

Dies ergibt sich einfach durch Linearisierung der Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (C.46)$$

zu

$$E = \vec{\alpha}.\vec{p}c + \beta\, mc^2 \qquad (C.47)$$

und Einsetzen der Operatoren für E und p.

Der Parameter $\vec{\alpha}$ ist ein Vektor und β ein Skalar; sie erfüllen die Beziehungen:

$$\alpha_x^{\ 2} = \alpha_y^{\ 2} = \alpha_z^{\ 2} = \beta^2 = 1 \qquad (C.48)$$

$$\left[\alpha_x, \alpha_y\right]_+ \equiv \alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0 \quad \& \quad \text{zykl.} \qquad (C.49)$$

$$\left[\alpha_x, \beta\right]_+ \equiv \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0 \quad \& \quad \text{zykl.} \qquad (C.50)$$

Eine Darstellung durch 4 × 4-Matrizen lässt sich durch

$$\vec{\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (C.51)$$

symbolisieren, worin $0, \mathbf{1}, \vec{\sigma}$ 2 × 2-Matrizen und die $\vec{\sigma}$ Paulische Spinmatrizen sind. Explizit ist dann

$$\alpha_x = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \alpha_y = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \alpha_z = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \beta = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad (C.52)$$

und die Wellenfunktion ψ ist eine vierkomponentige Spaltenmatrix

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} . \qquad (C.53)$$

Im Matrixkalkül behandelt man dann Produkte wie beispielsweise $\alpha_x\psi$ als ein Matrizenprodukt

$$\alpha_x\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} , \qquad (C.54)$$

was also mathematisch die Reihenfolge der ψ in ihrer Spalte umkehrt und in der physikalischen Interpretation eine Spinumkehr $\Uparrow \longrightarrow \Downarrow$ bedeutet.

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte zu definieren, wurde die HERMITISCH KONJUGIERTE Wellenfunktion ψ^+ eingeführt, die man durch Umwandlung von Spalten in Reihen und Bilden der konjugierten Komplexen erhält:

$$\psi^+ \equiv \left(\psi_1^{\ *} \ \ \psi_2^{\ *} \ \ \psi_3^{\ *} \ \ \psi_4^{\ *}\right) . \qquad (C.55)$$

Dann ist die WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE in der Matrixschreibweise

$$\rho = \sum_{\mu} |\psi_{\mu}|^2 = \psi^{+} \psi ; \qquad (C.56)$$

sie ist stets positiv definit.

Die STROMDICHTE ist

$$\vec{j} = c \, \psi^{+} \vec{\alpha} \, \psi \qquad (C.57)$$

um die KONTINUITÄTSGLEICHUNG

$$\left(\psi^{+} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^{+}}{\partial t} \psi \right) + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (C.58)$$

zu erfüllen.

Hierbei wurde die Hermitizität der Matrizen für $\vec{\alpha}$ und β,

$$\alpha^{+} = \alpha \quad ; \quad \beta^{+} = \beta \qquad (C.59)$$

implizit angenommen. Diese folgt aus einer Betrachtung der adjungierten Dirac-Gleichung und der Hermitizität des Hamilton-Operators.

Bei Anwesenheit eines äusseren elektromagnetischen Feldes ergibt die Substitution

$$E \longrightarrow E - e\phi \quad ; \quad \vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \qquad (C.60)$$

anstelle von (C.44) die Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(E - e\phi)\,\psi = \left\{ c\,(\vec{\alpha} \cdot [\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A}]) + \beta m c^2 \right\} \psi} \; . \qquad (C.61)$$

Die Energieniveaux in einem Coulomb-Feld $\left(\vec{A} = 0 \, ; \, e\phi = -\frac{Ze^2}{r}\right)$ sind relativistisch unter Einschluss der Ruheenergie mc^2:

$$E = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha}{\left(n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)^2} \right]^{-1/2} \qquad (C.62)$$

mit $\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar c}$ = Feinstrukturkonstante

$k = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$n = 1, 2, \ldots\ldots$

(α darf hier nicht mit $\vec{\alpha}$ verwechselt werden!).

Diese Form ist analog zu der Feinstrukturformel von Sommerfeld und liefert gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Im nicht-relativistischen Grenzfall reduziert sich die Dirac-Gleichung bei $\phi = 0$ und $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ auf die Schrödinger-Gleichung mit einem zusätzlichen Term $-\frac{e\hbar}{2mc}(\vec{\sigma}.\vec{H})$ in dem Hamilton-Operator, der physikalisch der Energie des magnetischen Moments $\frac{e\hbar}{2m_e c}$ des Elektrons in einem magnetischen Feld $\vec{H}$ entspricht. Die $\vec{\sigma}$ sind Pauli-Matrizen und die Wellenfunktion hat jetzt nur zwei Komponenten.

Der nicht-relativistische Grenzwert für ein Zentralfeld $\vec{A} = 0$, $e\phi = V(r)$ ergibt die Schrödinger-Gleichung mit einem Spin-Bahn-Term $\frac{1}{2mc^2 r} \cdot \frac{\partial V(r)}{\partial r} \cdot (\vec{S}.\vec{M})$ wobei

$\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ der Spin-Drehimpuls

und $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ der Bahn-Drehimpuls ist.

C.3.1 Kovariante Form der Dirac-Gleichung (γ-Matrizen)

Um eine prägnante, Lorentz-invariante Darstellung der Dirac-Gleichung zu erhalten, werden die γ -MATRIZEN eingeführt, die definiert sind durch

wobei *)

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma^\mu &\equiv (\gamma^0, \vec{\gamma}) \\ \gamma^0 &\equiv \beta \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} \equiv (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) &\equiv \beta\vec{\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad . \tag{C.63}$$

Die γ genügen den antikommutativen Regeln

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot 1 = 2g^{\mu\nu}\delta^{\mu\nu} ; \tag{C.64}$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \cdot 1 = 2g_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} . \tag{C.65}$$

Man kann zeigen, dass γ^0 hermitisch und $\vec{\gamma}$ anti-hermitisch ist.

Sie werden zunächst in die Dirac-Gleichung (C.45)

$$\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar c}{i} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})\psi + \beta mc^2 \psi = 0 \tag{C.66}$$

eingebaut, indem man von links mit β multipliziert und beachtet, dass $\beta^2 = 1$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial}{\partial(ct)} \equiv c \cdot \frac{\partial}{\partial x^0} \quad . \tag{C.67}$$

Dividiert man durch $\hbar c$ und schreibt

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \tag{C.68}$$

dann hat man

$$\left\{ \frac{\beta}{i} \partial_0 + \left(\sum_k \frac{\beta}{i} \cdot \alpha^k \partial_k \right) + \frac{mc}{\hbar} \right\} \psi = 0 . \quad (k = 1,2,3) \tag{C.69}$$

Dieses lässt sich kovariant schreiben:

KOVARIANTE
FELDFREIE
DIRAC-GLEICHUNG

$$\boxed{\left(\sum_\mu \gamma^\mu \partial_\mu \right) \psi + \frac{imc}{\hbar} \cdot \psi = 0} \quad . \tag{C.70}$$

Noch knapper lässt sich dies mit Hilfe der "Dagger-Konvention" von Feynman (PR 1949, 76, 749):

$$A\!\!\!/ \equiv \sum_\mu \gamma^\mu A_\mu = \sum_\mu \gamma_\mu A^\mu \equiv \gamma_0 A^0 - (\vec{\gamma} \cdot \vec{A}) \tag{C.71}$$

$$\nabla\!\!\!\!/ \equiv \sum_\mu \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) \tag{C.72}$$

schreiben:

$$\boxed{\left(\nabla\!\!\!\!/ + \frac{imc}{\hbar} \right) \psi = 0} \quad . \tag{C.73}$$

*) Es gibt auch andere Definitionen und Darstellungen der γ's, z.B. wird sehr oft $\vec{\gamma} \equiv -i\beta\vec{\alpha}$ gesetzt. Diese können als Folge haben, dass $(\gamma_5)^2 = +1$ (vgl. (C.108)), sind aber im Wesentlichen nicht verschieden von der obigen Form (C.63).

Eine andere Form, in IMPULS-DARSTELLUNG und FEYNMAN-NOTIERUNG

$$\not{p} \equiv \sum_\mu \gamma^\mu p_\mu = \sum_\mu \gamma_\mu p^\mu \qquad (C.74)$$

ist

$$\boxed{(\not{p} - mc)\,\psi = 0}\,, \qquad (C.75)$$

wie sich aus der kovarianten Dirac-Gleichung (C.70) mit $p^\mu = i\hbar\,\partial_\mu$ ergibt.

Die ρ und $\vec{j}$ lassen sich durch die γ^μ ausdrücken und dann zu einem Vierervektor

$$\frac{j^\mu}{c} \equiv \left\{\rho,\ \frac{\vec{j}}{c}\right\} \qquad (C.76)$$

zusammensetzen, indem man eine sogenannte "adjungierte" Wellenfunktion

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \beta = \psi^+ \gamma^0 \qquad (C.77)$$

bildet, so dass

$$\bar{\psi}^* = \gamma^0 \psi \ . \qquad (C.78)$$

Man beachte, dass die hermitisch adjungierte Wellenfunktion eigentlich ψ^+ ist.

Aus der Definition (C.63) der γ^μ folgt, dass

$$\beta\gamma^k = \alpha^k \qquad (C.79)$$

woraus $\quad j^k = c\,\psi^+ \alpha^k \psi = c\,\psi^+ \beta\gamma^k \psi = c\,\bar{\psi}\gamma^k \psi \qquad (C.80)$

und $\quad \rho \equiv \dfrac{j^0}{c} = \psi^+ \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\gamma^0 \psi \ . \qquad (C.81)$

Diese zwei Gleichungen lassen sich zu

$$\frac{j^\mu}{c} = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \qquad (C.82)$$

zusammenfügen, und dieses Produkt ist hermitisch. Der Vierervektor $\frac{j^\mu}{c}$ ist divergenzfrei $\left[\partial_\mu\left(\frac{j^\mu}{c}\right) = 0\right]$ und lässt sich physikalisch als ein quantenmechanischer Ladungsdichte-Stromdichte-Vierervektor interpretieren. Ein Vergleich mit dem klassischen Vierervektor

$$i^\mu \equiv \left(\rho,\ \frac{\rho}{c}\cdot\vec{v}\right) \qquad (C.83)$$

legt es nahe, dass die Rolle der klassischen Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}$ hier von dem Operator $c\vec{\alpha}$ übernommen wird, weil

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\rho} \longrightarrow \frac{c\,\psi^+\vec{\alpha}\,\psi}{\psi^+\psi} \longrightarrow c\,\vec{\alpha} \ . \qquad (C.84)$$

Da $\alpha' \equiv \alpha_x$ die Eigenwerte $\pm$ 1 hat, erscheint es, als ob die x-Komponente der Geschwindigkeit die Eigenwerte $\pm$ c hätte. Dies lässt sich als eine "ZITTERBEWEGUNG" interpretieren, d.h. eine schnelle unregelmässige Bewegung des Elektrons, die den Spin verursacht, während die mittlere Geschwindigkeit durch den Impuls bestimmt wird $(\vec{v} = \vec{p}/m)$.

C.3.2 Diracsche Positronentheorie

ψ hat die vier Komponenten ψ^{μ}; es gibt für jeden gegebenen Wert von p^{μ} vier Eigenlösungen, wovon das eine Paar einem Teilchen mit positiver Energie und zwei möglichen Spineinstellungen und das andere Paar einer negativen Energie, wiederum mit zwei Spineinstellungen, entspricht. Diese paarweise Zuordnung legt eine formale Vereinfachung zur 2-Komponenten-Spinorform nahe

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad u \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad v \equiv \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{C.85}$$

und man kann schreiben

$$u = \begin{pmatrix} u_{+1} \\ u_{-1} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{+1} \\ v_{-1} \end{pmatrix}. \tag{C.86}$$

Es lässt sich zeigen, dass damit die feldfreie Dirac-Gleichung (C. 44) als

$$E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \tag{C.87}$$

geschrieben werden kann.

Nimmt man die z-Achse als eine bevorzugte Richtung, dann ist

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \longrightarrow \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z . \tag{C.88}$$

Mit dieser Substitution stellt (C. 87) vier lineare Gleichungen dar,

$$(E - mc^2)\, u_{+1} = p_z v_{+1} \quad \text{(C.89)} ; \quad (E + mc^2)\, v_{+1} = p_z u_{+1} \quad \text{(C.91)}$$

$$(E - mc^2)\, u_{-1} = - p_z v_{-1} \quad \text{(C.90)} ; \quad (E + mc^2)\, v_{-1} = - p_z u_{-1} \quad \text{(C.92)}$$

von denen sich (C. 89) und (C. 91) auf Spin "up" und (C. 90) und (C. 92) auf Spin "down" beziehen.

Zunächst werde Spin "up" bei positiver Energie ($\Uparrow +$) betrachtet. Man kann nach Belieben normieren und

$$\left.\begin{aligned} u_{+1} &= 1 \\ u_{-1} &= v_{-1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.93}$$

setzen. Dann erhält man aus (C. 89)

$$v_{+1} = \frac{E - mc^2}{p_z} = \frac{(E - mc^2)}{p_z} \cdot \frac{(E + mc^2)}{(E + mc^2)} = \frac{p_z}{E + mc^2} . \tag{C.94}$$

Ebenso ergibt (C. 91)

$$v_{+1} = \frac{p_z}{E + mc^2} \tag{C.95}$$

und (C. 90) sowie (C. 92)

$$u_{-1} = v_{-1} = 0 . \tag{C.96}$$

Analog für Spin "down" bei negativer Energie ($\Downarrow -$); setzt man

$$v_{-1} = 1 \quad ; \quad u_{+1} = v_{+1} = 0 \quad ; \tag{C.97}$$

dann ergibt (C. 90)

$$u_{-1} = - \frac{p_z}{E - mc^2} = \frac{p_z}{|E| + mc^2} \quad \text{weil} \quad E = -|E| \tag{C.98}$$

und (C. 92)

$$u_{-1} = - \frac{E + mc^2}{p_z} = - \frac{(E + mc^2)}{p_z} \cdot \frac{(E - mc^2)}{(E - mc^2)} = \frac{p_z}{|E| + mc^2} . \tag{C.99}$$

Die anderen Parameter lassen sich in ähnlicher Weise berechnen und sind:

$$\overset{\Uparrow +}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{\Downarrow +}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}}, \quad \overset{\Uparrow -}{\begin{pmatrix} -\frac{p_z}{|E|+mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{\Downarrow -}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_z}{|E|+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad . \qquad (C.100)$$

Um nachträglich auf das Einheitsvolumen zu normieren, muss

$$u^2 + v^2 = 1 \qquad (C.101)$$

gesetzt werden. Summiert man die Quadrate der obigen Spinoren, so erhält man

$$\left[1 + \frac{p_z^2}{(|E| + mc^2)^2} \right] = \frac{2\,|E|}{|E| + mc^2} \quad . \qquad (C.102)$$

Also ist jeder der Spinoren mit dem Normierungsfaktor

$$\sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2\,|E|}} \qquad (C.103)$$

zu multiplizieren. —

Die physikalische Interpretation gewinnt man, indem man wahlweise den Operator σ_z und $\mathcal{H}$ auf die Spinoren wirken lässt; man erhält dabei

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z \psi &= \pm \psi && \text{für } \Uparrow \text{ oder } \Downarrow \\ \mathcal{H} \psi &= \pm |E| \psi && \text{für } E \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} . \end{aligned}\right\} \qquad (C.104)$$

Es gibt keine Lösungen, für die irgendeine andere Spinkomponente als die in Bewegungsrichtung (σ_z) scharf ist. Die Lösungen mit negativer Energie entsprechen DIRAC-LÖCHERN, d.h. POSITRONEN.

C.3.3 Transformationseigenschaften der γ-Matrizen-Produkte

Es lassen sich neue Matrizen bilden durch Multiplikation zweier oder mehrerer γ miteinander. Wie sich zeigen lässt, gibt es insgesamt nicht mehr als 16 unabhängige Produkte der γ^μ, die sich wie folgt einteilen lassen:

Tab. C.1

Produkttyp	Zahl der unabhängigen Produkte	Transformations-eigenschaft
$1 \equiv \gamma^\mu \gamma^\mu$	1	(S) Skalar
γ^μ	4	(V) Vektor
$i\,\gamma^\mu \gamma^\nu$	6	(T) Tensor 2. Ranges
$i\,\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda$	4	(A) Achsialvektor
$\gamma_5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$	1	(P) Pseudoskalar

In jedem Fall beziehen sich die Transformationseigenschaften der γ^μ auf ihr Transformationsverhalten, wenn sie zwischen $\bar{\psi}$ und ψ gestellt wird, und die i dienen dazu, die resultierenden Matrizen hermitisch zu machen.

Die γ_5 -Matrix wird aus Gründen mathematischer Bequemlichkeit eingeführt; sie wird γ_5 genannt, um Verwechslungen mit einem anderen Schema von γ's zu vermeiden, wo die Matrizen als $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ statt $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ wie hier, bezeichnet werden.

Ihr Wert ist in unserer Darstellung:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ -i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad (C.105)$$

symbolisch: $$\gamma_5 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (C.106)$$

Der Index von γ_5 lässt sich nicht nach oben stellen; die Matrix hat kovarianten Charakter. Sie ist antikommutativ mit allen anderen kovarianten γ's :

$$[\gamma_5, \gamma_\mu]_+ \equiv \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0 \qquad (C.107)$$

und ihr Quadrat ist gleich -1:

$$(\gamma_5)^2 = -1 . \qquad (C.108)$$

Es sei im Folgenden gezeigt, wie die Transformationseigenschaften der γ -Produkte aus der Lorentz-Invarianz der feldfreien Dirac-Gleichung

$$\left(\frac{1}{i}\, \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \qquad (C.109)$$

und der sogenannten "adjungierten" Gleichung für $\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{0}$

$$\left(i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \bar{\psi} = 0 \qquad (C.110)$$

entstehen. Hierin ist die Summation fortgelassen, was so verstanden werden soll, dass die Summation über alle doppelt vorkommenden Indizes ausgeführt wird.

Die Lorentz-Transformationen lauten

$$x^{\mu'} = a_{\mu\nu}\, x^{\nu} \qquad (C.111)$$

$$x^{\nu} = a_{\mu\nu}\, x^{\mu'} \qquad (C.112)$$

mit

$$a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} . \qquad (C.113)$$

Die Transformation der Wellenfunktion

$$\psi' = \tau\,\psi \qquad (C.114)$$

ergibt nach Einsetzen

$$\left(\frac{1}{i}\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu'} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi' = \left(\frac{1}{i}\,\gamma^{\mu}\, a_{\mu\nu}\, \partial_{\nu}\tau + \frac{mc}{\hbar}\cdot\tau \right) \psi \qquad (C.115)$$

wobei

$$\partial_{\mu'} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} . \qquad (C.116)$$

Dann ist die transformierte Dirac-Gleichung

$$\left(\frac{1}{i}\, \underline{\tau^{-1}\gamma^{\mu}\,\tau\, a_{\mu\nu}}\; \partial_{\nu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \qquad (C.117)$$

Der erste Faktor in der Klammer soll gleich $\left(\frac{1}{i}\,\gamma^{\nu}\partial_{\nu} \right)$ sein, so dass die unterstrichene Grösse gleich γ^{ν} sein muss; sie lässt sich als erste der drei Bedingungen, die man durch Vergleich erhält, schreiben:

$$\gamma^{\nu} = \tau^{-1}\gamma^{\mu}\,\tau\, a_{\mu\nu} \qquad (C.118)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\,\tau^{-1} \qquad (C.119)$$

$$\psi' = \tau\,\psi . \qquad (C.120)$$

Der Charakter von τ lässt sich deutlich machen, wenn man eine Drehung um einen Winkel ϑ um die z-Achse betrachtet:

$$\tau = e^{\frac{\vartheta}{2}\cdot\gamma^{1}\gamma^{2}} = \cos\frac{\vartheta}{2} + \gamma^{1}\gamma^{2}\sin\frac{\vartheta}{2} , \qquad (C.121)$$

oder bei Raumspiegelung $(\vec{x}' = -\vec{x},\; t' = t)$ ist

$$\tau = \gamma^{4} \quad \text{mit} \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix} \qquad (C.122)$$

Die Transformationen für die γ-Produkte in Tab. C.1 lauten dann:

$$\left.\begin{array}{llll}
(1) & \bar\psi\psi = \bar\psi'\tau^{-1}\tau\psi' = \bar\psi'\psi' & : \text{Skalar} \\
(2) & \bar\psi_1\gamma^\mu\psi_2 = \bar\psi_1\tau^{-1}\gamma^\mu\tau\psi_2 = \bar\psi_1'\gamma^\nu\psi_2'a_{\mu\nu} & : \text{Vierervektor} \\
(3) & \bar\psi_1\, i\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_2 = \bar\psi_1'\, i\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_2' & : \text{Tensor} \\
(4) & \bar\psi_1\, i\gamma^\mu\gamma_5\psi_2 = \bar\psi_1'\, i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi_2' & : \text{Achsialvektor} \\
(5) & \bar\psi_1\gamma_5\psi_2 = -\bar\psi_1'\gamma_5\psi_2' & : \text{Pseudoskalar}
\end{array}\right\} \quad (C.123)$$

Zu (4) ist zu bemerken, dass das Produkt von drei γ's, d.h. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda$ stets auf die Form $\gamma^\mu\gamma_5$ gebracht werden kann.

C.3.4 Spinorform der Dirac-Gleichung

Gehen wir zurück zu der Spinorschreibung der Wellenfunktion (C.85):

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad v \equiv \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \qquad (C.124)$$

worin bei eigentlichen Lorentz-Transformationen die Transformationseigenschaften des v-Paares kontragredient zu denen des u-Paares sind, so dass

$$\psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_4 = \text{invariant.} \qquad (C.125)$$

Man kann dann wie in (C.87) die Dirac-Gleichung in der Form

$$\left[\begin{pmatrix} \vec\sigma_i & 0 \\ 0 & \vec\sigma_i \end{pmatrix} cp_i + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (C.126)$$

schreiben. Dieses ist eine Spinor-Gleichung, die in ein Paar zweikomponentiger Spinor-Gleichungen aufgespalten werden kann:

$$c\,\sigma_i\,p_i\,v + mc^2 u = E u \qquad (C.127)$$

$$c\,\sigma_i\,p_i\,u - mc^2 v = E v\,. \qquad (C.128)$$

Aus (C.128) folgt, dass

$$v = \frac{c\,\sigma_i\,p_i}{E + mc^2}\cdot u\,. \qquad (C.129)$$

Beim Übergang zur nicht-relativistischen Grenze

$$E \approx mc^2\,; \quad p_i \approx mv_i \qquad (C.130)$$

findet man

$$v \approx \frac{c\,\sigma_i\,p_i}{2mc^2}\cdot u \approx \frac{c\,\sigma_i\,v_i}{2c^2}\cdot u = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_i}{c}\cdot\sigma_i\cdot u\,. \qquad (C.131)$$

Im Vergleich zu u ist also die Spinor-Wellenfunktion v von der Grössenordnung $\frac{v}{c}$, also klein (< 1). u und v sind also dementsprechend die grossen und kleinen Komponenten von ψ. Wie in Abschnitt C.3.2 gezeigt wurde, gehören die u zu den positiven Energiezuständen und beschreiben Elektronen, während die v den negativen Energiezuständen (Positronen) zuzuordnen sind, die im nicht-relativistischen Fall vernachlässigt werden.

Es ist zu beachten, dass die obigen Überlegungen von der speziellen Dirac-Darstellung abhängen.

C.4 Weyl-Gleichung

Die feldfreie Dirac-Gleichung (C.45) lautet

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}\right)\psi + \beta\, mc^2 \psi = 0 \qquad (C.132)$$

worin bei Benutzung der Definition (C.76) die Stromdichte (C.57)

$$\vec{j} = c\,\psi^+ \vec{\alpha}\,\psi \qquad (C.133)$$

und die Ladungsdichte (C.56)

$$\rho = \psi^+\psi = \frac{1}{c}\cdot j^0 \qquad (C.134)$$

ist. Dann stellen die Grössen

$$\vec{j} = c\,u^+ \vec{\sigma}\, u \quad ; \quad j^0 = c\,u^+ u \qquad (C.135)$$

$$\vec{j} = c\,v^+ \vec{\sigma}\, v \quad ; \quad j^0 = c\,v^+ v \qquad (C.136)$$

die aus den zweikomponentigen Spinoren u, v gebildet werden, auch die Komponenten eines Vierervektors mit der Identität

$$(j^0)^2 = \sum_{k=1}^{3} (j^k)^2 \qquad (C.137)$$

dar. Daraus folgt dann, dass die Matrix β nicht in kovariante Wellengleichungen eingehen kann, die aus den Komponenten u, v gebildet werden. In einer zweikomponentigen Wellengleichung muss also der Term, der die Ruhemasse m enthält, identisch verschwinden, so dass eine zweikomponentige Wellengleichung nur Teilchen der Masse null beschreibt. Sie ist von der Form

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\sum_{k=1}^{3} \sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0}\,, \qquad (C.138)$$

worin $\varphi \equiv u, v$, oder kürzer

$$\boxed{\left(\sigma_k \partial_k + \partial_0\right)\varphi = 0}\,, \qquad (C.139)$$

wenn man über doppelt vorkommende Indizes summiert.

Sie wird als WEYL-GLEICHUNG bezeichnet und bezieht sich auf ein masseloses Teilchen, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt; sie ist relativistisch invariant und führt zu Eigenwerten sowohl positiver als auch negativer Energie.

Die Kontinuitätsgleichung, die aus der Weyl-Gleichung folgt, lautet

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 . \qquad (C.140)$$

Eine bedeutsame Eigenschaft der Weyl-Gleichung ist ihr paritätsverletzender Charakter. Aus diesem Grund wurde sie in der "vorparitätischen" Zeit zurückgewiesen. Es lässt sich zeigen, dass sie Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ beschreibt; sie wurde infolgedessen von Lee und Yang benutzt, um eine zweikomponentige Neutrinotheorie zu konstruieren.

Tatsächlich stellt die Spinor-Gleichung (C. 138) das Paar

$$(\partial_0 + \sigma_k \partial_k)\, u = 0 \qquad (C.141)$$

$$(\partial_0 - \sigma_k \partial_k)\, v = 0 \qquad (C.142)$$

dar, bzw. in Impulsdarstellung

$$(p_0 + \sigma_k p_k)\, u = 0 \qquad (C.143)$$

$$(p_0 - \sigma_k p_k)\, v = 0 , \qquad (C.144)$$

worin

$$p_\mu \equiv \{ p_0, \vec{p} \} \equiv \{ \tfrac{E}{c}, \vec{p} \} . \qquad (C.145)$$

Wenn man für die Wellenfunktion φ eine ebene Welle mit dem Energieeigenwert E und dem Impuls $\vec{k}$ annimmt, also

$$\varphi = \varphi_0\, e^{i(k_k x_k + Et)} \qquad (C.146)$$

dann ist

$$p_0 \varphi = \frac{E}{c} \varphi \qquad (C.147)$$

$$p_k \varphi = k_k \varphi . \qquad (C.148)$$

Dann werden (C. 141) und (C. 142)

$$\left(\frac{E}{c} \pm \sigma_k k_k \right) \varphi_0 = 0 \qquad (C.149)$$

und wenn sich das Teilchen in z -Richtung bewegt, so dass sein Impuls

$$\vec{k} \equiv (0, 0, k) \qquad (C.150)$$

ist, dann wird

$$\left(\frac{E}{c} \pm \sigma_3 k \right) \varphi_0 = 0 . \qquad (C.151)$$

Also ist die Energie

$$E = \pm c . k . \qquad (C.152)$$

Es folgt

$$\sigma_3 k \varphi = \mp \frac{E}{c} \varphi , \qquad (C.153)$$

d.h.

$$\sigma_3 \varphi = \mp \varphi . \qquad (C.154)$$

Da σ_3 der Spinoperator in der z -Richtung ist, folgt, dass die Spineigenwerte $\pm$ 1 sind, die antiparalleler und paralleler Spinorientierung, bzw. links- oder rechtshändiger Helizität entsprechen. Man ordnet diese dem Neutrino bzw. dem Antineutrino zu

(Feynman und Gell-Mann), was in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen ist. Lee und Yang wählten ursprünglich irrtümlicherweise die entgegengesetzte Zuordnung.

C. 5 Andere Wellengleichungen

Für Teilchen mit Spin 1 stellte Proca 1937 eine relativistische Wellengleichung auf, die 1937/38 von Bhabha und Kemmer der zweiten Quantisierung unterworfen wurde.

1938 führte Kemmer einen Satz von vier Tensorgleichungen für relativistische Bosonen (Spin 0 oder 1) durch Linearisierung der Klein-Gordon-Gleichung ein.

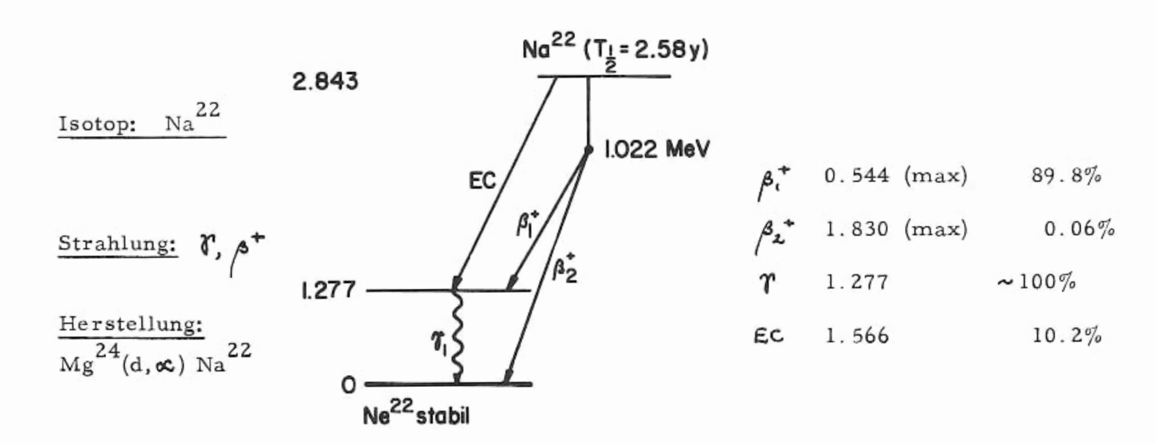
Eine ausführlichere Behandlung dieser Gleichungen findet sich bei Roman: "Theory of Elementary Particles" (1960); sie treten gegenwärtig in der Kernphysik oder der Physik der Elementarteilchen nicht wesentlich in Erscheinung.

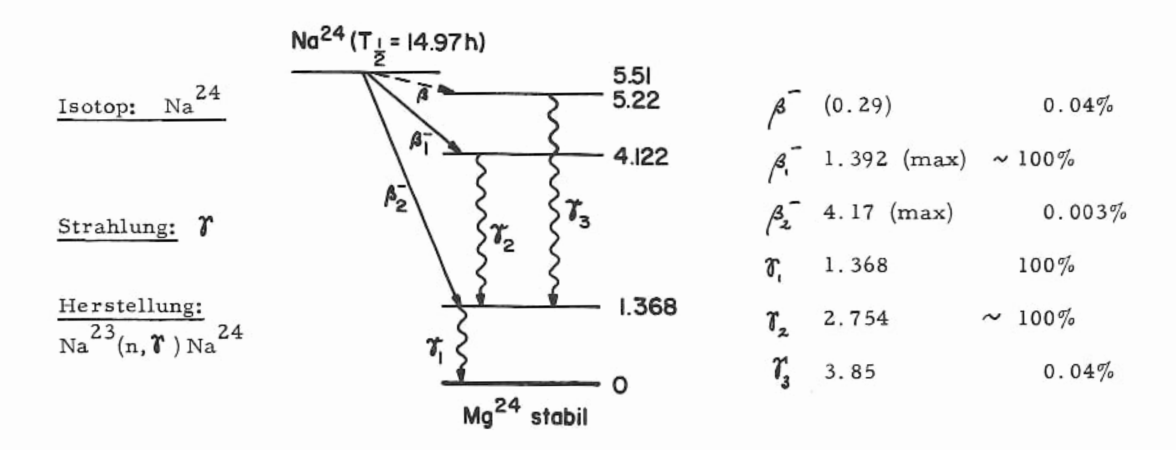
ANHANG D

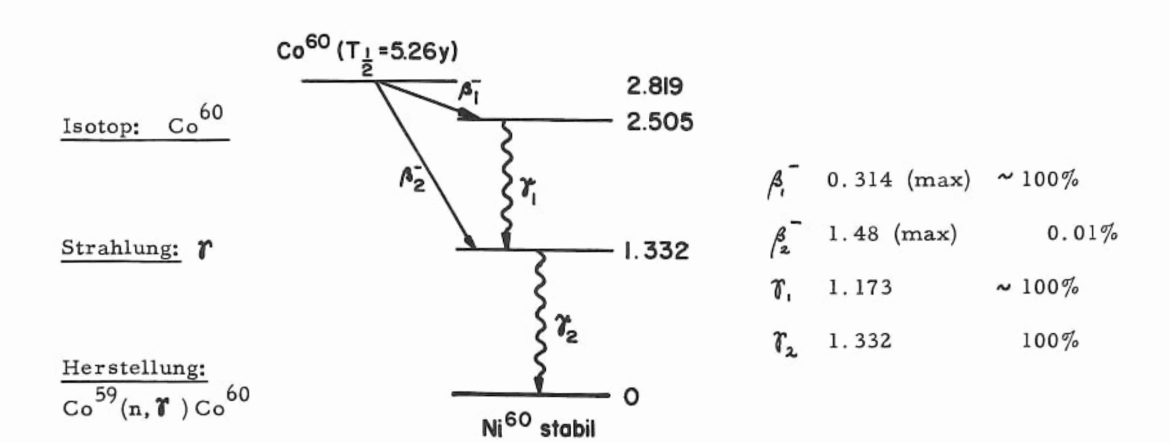
D. ZERFALLSSCHEMATA EINIGER WICHTIGER, RADIOAKTIVER QUELLEN

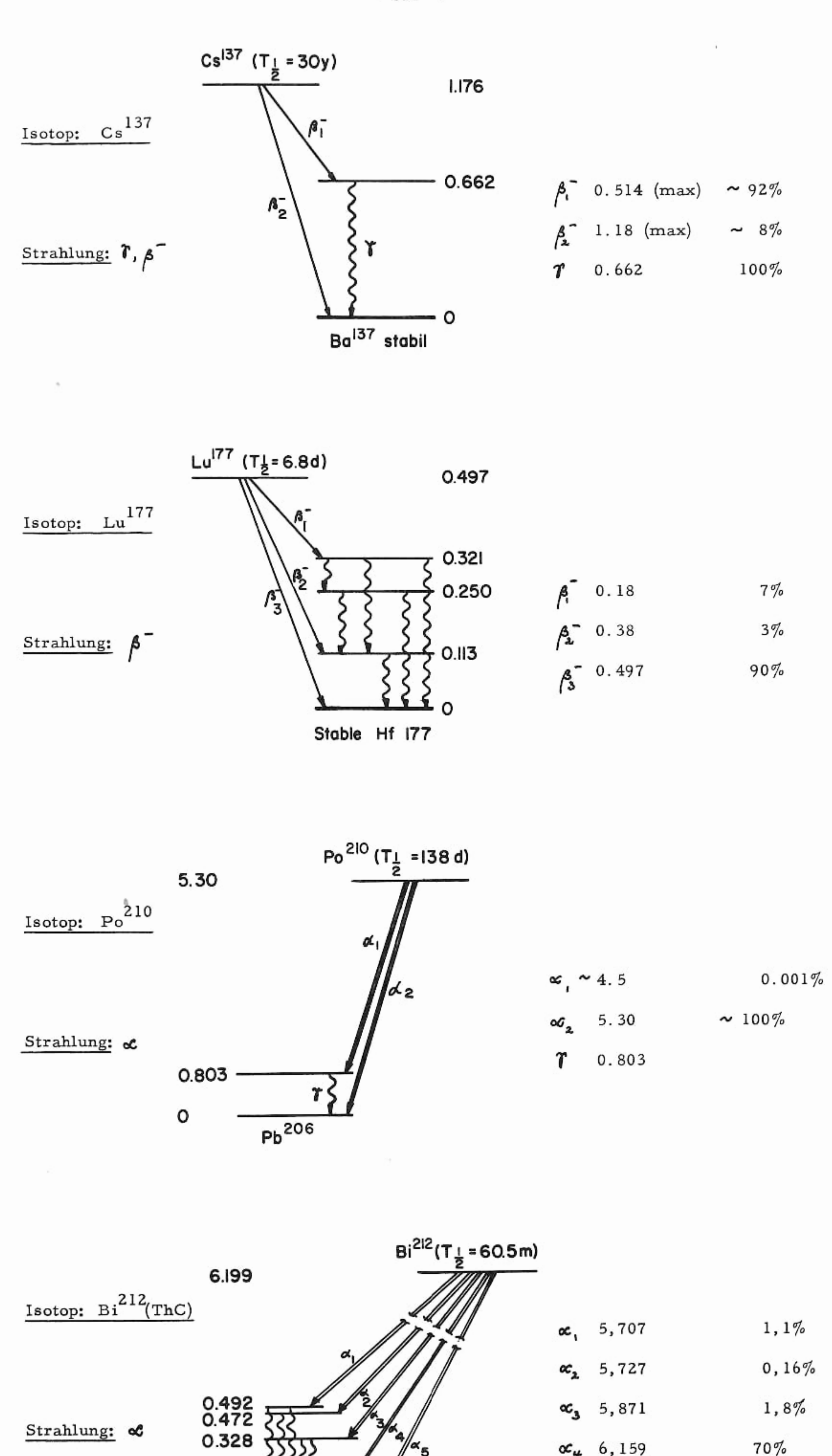
Im Folgenden sind die vereinfachten Zerfallsschemata einiger häufig verwendeter radioaktiver Quellen aufgeführt.

Links ist der wichtigste Strahlungstyp des Emitters angegeben. Rechts sind konkurrienden Strahlungen mit ihren Energien in MeV und ihren relativen Intensitäten tabelliert. Bei den β-Daten ist die maximale Energie E_{max} des kontinuierlichen β-Spektrums zitiert.









Cs137 (T1/2 = 30y)
1.176
Isotop: Cs137
0.662
Strahlung: γ, β⁻
0
Ba137 stabil
β1⁻ 0.514 (max) ~ 92%
β2⁻ 1.18 (max) ~ 8%
γ 0.662 100%
Lu177 (T1/2 = 6.8d)
0.497
Isotop: Lu177
0.321
0.250
Strahlung: β⁻
0.113
0
Stable Hf 177
β1⁻ 0.18 7%
β2⁻ 0.38 3%
β3⁻ 0.497 90%
Po210 (T1/2 = 138 d)
5.30
Isotop: Po210
Strahlung: α
0.803
0
Pb206
α1 ~ 4.5 0.001%
α2 5.30 ~ 100%
γ 0.803
Bi212 (T1/2 = 60.5m)
6.199
Isotop: Bi212 (ThC)
Strahlung: α
0.492
0.472
0.328
0.040
0
Tl208
α1 5,707 1,1%
α2 5,727 0,16%
α3 5,871 1,8%
α4 6,159 70%
α5 6,199 27%

ANHANG E

E. KONSTANTEN UND UMRECHNUNGSFAKTOREN DER ATOM- UND KERNPHYSIK

Ruhemassen:		
Atomare Masseneinheit	1 AME	$1,65969 \cdot 10^{-24}$ g $\hat{=}$ 931,14 MeV
Masse des Elektrons	m_e	$9,1083 \cdot 10^{-28}$ g
		0,00054879 AME $\hat{=}$ 0,51098 MeV
Masse des Protons	M_p	1,007593 AME $\hat{=}$ 938,211 MeV
Masse des Neutrons	M_n	1,008982 AME $\hat{=}$ 939,505 MeV
Masse des Deuterons	M_d	2,01419 AME $\hat{=}$ 1875,55 MeV
Masse des α-Teilchens	M_α	3,99290 AME $\hat{=}$ 3717,95 MeV
Masse des H-Atoms	M_H	1,008142 AME $\hat{=}$ 938,721 MeV
Masse des Deuterium	M_D	2,01474 AME $\hat{=}$ 1876,01 MeV
Masse des He^4	M_{He^4}	4,003876 AME $\hat{=}$ 3728,17 MeV
Verhältnis Proton- zu Elektronmasse	$\frac{M_p}{m_e}$	1836,1
Umrechnungsfaktoren	1 AME	$\hat{=}$ 931,14 MeV
	1 MeV	$\hat{=}$ $1,0740 \cdot 10^{-3}$ AME
	1 eV	$1,6021 \cdot 10^{-12}$ erg
	1 g	$6,0252 \cdot 10^{23}$ AME $\hat{=}$ $5,6100 \cdot 10^{26}$ MeV
Reduzierte Masse des Elektrons im H-Atom	$\mu_e = m_e \cdot \frac{M_p}{M_H}$	$9,1034 \cdot 10^{-28}$ g
		0,0054850 AME $\hat{=}$ 0,510702 MeV
Schrödinger-Konstante für H-Atom	$\frac{2\mu_e}{\hbar^2}$	$1,6375 \cdot 10^{27}$ erg^{-1} cm^{-2}
für festgehaltenen Kern	$\frac{2 m_e}{\hbar^2}$	$1,6384 \cdot 10^{27}$ erg^{-1} cm^{-2}
Physikalische Konstanten:		
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2,99793 \cdot 10^{10}$ cm. sec^{-1}
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6,6252 \cdot 10^{-27}$ erg. sec
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,0544 \cdot 10^{-27}$ erg. sec
Elementarladung	e	$4,8029 \cdot 10^{-10}$ el. st. -cgs
		$1,6021 \cdot 10^{-20}$ el. magn. -cgs
		$1,6021 \cdot 10^{-19}$ Coulomb
Spezifische Ladung des Elektrons	e/m_e	$5,2731 \cdot 10^{17}$ el. st. -cgs/g
		$1,7589 \cdot 10^{7}$ el. magn. -cgs/g
Faraday-Konstante	$F = Le$	$2,8937 \cdot 10^{14}$ el. st. cgs/g-Mol
*Loschmidtsche Konstante ($0^{16} = 16$)	L	$6,0249 \cdot 10^{23}$ g^{-1}. Mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	k	$1,3804 \cdot 10^{-16}$ erg. $^{o}C^{-1}$
Rydberg-Konstante für M = ∞	R_∞	109737,31 cm^{-1}
für H-Atom	R_H	109677,58 cm^{-1}

*) In der nicht-deutschen Literatur gilt statt dessen folgende Bezeichnungsweise:

Avogadrosche Konstante	N	$6,0249 \cdot 10^{23}$ g^{-1} Mol^{-1}
Loschmidtsche Konstante	$L = \frac{N}{V_o}$	$2,6872 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}

Bohrscher Radius	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{r_0}{\alpha^2}$	$5,2917 . 10^{-9}$ cm
Feinstrukturkonstante	$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$	$7,2973 . 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$
Klassischer Elektronenradius	$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$	$2,8179 . 10^{-13}$ cm
Thomson-Querschnitt für Elektronen	$\sigma_{Th} = \frac{8}{3} \pi r_0^2$	0,6652 barn
Fermi Konstante	g	$1,41 . 10^{-49}$ erg. cm^3

Magnetische Momente:

Bohrsches Magneton	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2 m_e c}$	$0,9273 . 10^{-20}$ erg. $Gauss^{-1}$
Kernmagneton	$\mu_K = \frac{e\hbar}{2 M_p c}$	$0,50504 . 10^{-23}$ erg. $Gauss^{-1}$
Magn. Moment des Elektrons	μ_e	$1,0011\ \mu_B = 0,9284 . 10^{-20}$ erg. $Gauss^{-1}$
" " " Protons	μ_p	$2,7928\ \mu_K = 1,4104 . 10^{-23}$ erg. $Gauss^{-1}$
" " " Neutrons	μ_n	$-1,9131\ \mu_K$
" " " Deuterons	μ_d	$0,8565\ \mu_K$

Compton-Wellenlängen:

Elektron	$\lambda_{C_e} = \frac{h}{m_e c}$	$2,4263 . 10^{-10}$ cm
	$\bar{\lambda}_{C_e} = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{r_0}{\alpha}$	$3,8615 . 10^{-11}$ cm
Proton	$\lambda_{C_p} = \frac{h}{M_p c}$	$1,3214 . 10^{-13}$ cm
	$\bar{\lambda}_{C_p} = \frac{\hbar}{M_p c}$	$2,1031 . 10^{-14}$ cm
Neutron	$\lambda_{C_n} = \frac{h}{M_n c}$	$1,3196 . 10^{-13}$ cm
	$\bar{\lambda}_{C_n} = \frac{\hbar}{M_n c}$	$2,10019 . 10^{-14}$ cm

Wellenlängen:

Photon der Energie $E_\gamma = h\nu$	$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_\gamma}$	$\frac{0,012397}{E_\gamma \text{ (MeV)}} . 10^{-8}$ cm
Thermische Neutronen	$\lambda_{th.n.} = \frac{h}{p}$	$\frac{2,8600 . 10^{-9}}{\sqrt{E_n (eV)}}$ cm
bei T = 300 °K		$\approx 1,81 . 10^{-8}$ cm
	$\bar{\lambda}_{th.n.}$	$\frac{4,551 . 10^{-10}}{\sqrt{E_n (eV)}}$ cm
Nicht-relativistische Elektronen	λ_e	$\frac{1,2264 . 10^{-7}}{\sqrt{E_e (eV)}}$ cm
Nicht-relativistische Protonen	λ_p	$\frac{2,8620 . 10^{-9}}{\sqrt{E_p (eV)}}$ cm

Bindungsenergien:

Totale Bindungsenergie der Elektronen in einem Atom (Thomas-Fermi-Modell)	$\mathcal{B}_e(Z)$	$15{,}73\ Z^{7/3}$ eV
Bindungsenergie eines Elektrons in der K-Schale des H-Atoms	$I_o = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{e^2}{2a_o}$	13,59765 eV
Ionisationsenergie der n-ten Schale (Abschirmung vernachlässigt)	$I = I_o \cdot \frac{Z^2}{n^2}$	
Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon	E_B	~8 MeV
Bindungsenergie des Deuterons	E_d	2,225 MeV

Verschiedene Konstanten:

Zeitumrechnung	1 h	3600 sec
	1 d	$8{,}64.10^4$ sec
	1 y	$3{,}156.10^7$ sec
Mechanisches Wärmeäquivalent	1 Joule	≙ 0,24 cal
	1 cal	≙ 4,2 Joules = $4{,}2.10^7$ erg
Zeeman-Aufspaltung	$\frac{e}{4\pi m_e c^2}$	$4{,}6689.10^{-5}$ cm^{-1} $Gauss^{-1}$
Gyromagnetisches Verhältnis für das Proton im H-Atom (mit diamagnetischer Korrektur)	γ	$2{,}6753.10^4$ rad. $sec.^{-1}$ $Gauss^{-1}$

Lebensdauer:

Halbwertszeit	$T_{1/2} = \tau \ln 2$	0,693 τ sec
Mittlere Lebensdauer des Neutrons	τ_n	$(1{,}01 \pm 0{,}03).10^3$ sec
Halbwertszeit des Neutrons	$(T_{1/2})_n$	$11{,}7 \pm 0{,}3$ min = 702 ± 18 sec

Geschwindigkeiten:

Elektronen	v	$5{,}931.10^7 \sqrt{E_e(eV)}$ cm. sec^{-1}
Thermische Elektronen (T = 300 °K)	$v_{th.e.} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$	$1{,}117.10^8$ cm. sec^{-1}
Thermische Neutronen ($\frac{1}{40}$ eV)		$2{,}187.10^5$ cm. sec^{-1}

Einheiten:

1 barn	1 b	10^{-24} cm^2
1 Fermi	1 f	10^{-13} cm
1 Curie	1 c	3,70. 10^{10} Zerfälle/sec
1 Röntgen	1 r	Röntgenstrahldosis, die bei Durchqueren von Luft NTP 1 el. st. -cgs positiver Ionen pro cm^3 befreit, d.h. 83 erg/g abgibt.

ANHANG F

F. TABELLE DER ORDNUNGSZAHLEN UND ATOMGEWICHTE

Die Tabelle stellt die Atomgewichte aller bekannten Elemente dar (Internationale Komm. 1956). Werte für einige neue Elemente beziehen sich auf unstabile Isotope. Werte in Klammern sind Massenzahlen für das stabilste Isotop.

ELEMENT	SYMBOL	Z	ATOMGEWICHT
Actinium	Ac	89	227
Aluminium	A	13	26,98
Americium	Am	95	(243)
Antimon, Stibium	Sb	51	121,76
Argon	A	18	39,944
Arsen	As	33	74,91
Astatin	At	85	(211)
Barium	Ba	56	137,36
Berkelium	Bk	97	(249)
Beryllium	Be	4	9,013
Blei, Plumbum	Pb	82	207,21
Bor	B	5	10,82
Brom	Br	35	79,916
Cadmium	Cd	48	112,41
Calcium	Ca	20	40,08
Californium	Cf	98	(249)
Cäsium	Cs	55	132,91
Cerium	Ce	58	140,13
Chlor	C	17	35,457
Chrom	Cr	24	52,01
Cobalt	Co	27	58,94
Columbium (Niobium)	Nb	41	92,91
Curium	Cm	96	(245)
Dysprosium	Dy	66	162,51
Einsteinium	E	99	(254)
Eisen, Ferrum	Fe	26	55,85
Erbium	Er	68	167,27
Europium	Eu	63	152,0
Fermium	Fm	100	(252)
Fluor	F	9	19,00
Francium	Fr	87	(223)
Gadolinium	Gd	64	157,26
Gallium	Ga	31	69,72
Germanium	Ge	32	72,60
Gold, Aurum	Au	79	197,0
Hafnium	Hf	72	178,58
Helium	He	2	4,003
Holmium	Ho	67	164,94

ELEMENT	SYMBOL	Z	ATOMGEWICHT
Indium	In	49	114,82
Iridium	Ir	77	192,2
Jod	I	53	126,91
Kalium	K	19	39,100
Kohlenstoff, Carbon	C	6	12,011
Krypton	Kr	36	83,8
Kupfer, Cuprum	Cu	29	63,54
Lanthan	La	57	138,92
Lithium	Li	3	6,940
Lutetium	Lu	71	174,99
Magnesium	Mg	12	24,32
Mangan	Mn	25	54,94
Mendelevium	Mv	101	(256)
Molybdän	Mo	42	95,95
Natrium	Na	11	22,991
Neodymium	Nd	60	144,27
Neon	Ne	10	20,183
Neptunium	Np	93	(237)
Nickel	Ni	28	58,71
Niobium, Columbium	Nb	41	92,91
Nobelium	No	102	(253)
Osmium	Os	76	190,2
Palladium	Pd	46	106,7
Phosphor	P	15	30,975
Platin	Pt	78	195,09
Plutonium	Pu	94	(242)
Polonium	Po	84	210
Praseodymium	Pr	59	140,92
Promethium	Pm	61	(145)
Protactinium	Pa	91	231
Quecksilber, Hydrargyrum	Hg	80	200,61
Radium	Ra	88	226,05
Radon	Rn	86	222
Rhenium	Re	75	186,22
Rhodium	Rh	45	102,91
Rubidium	Rb	37	85,48
Ruthenium	Ru	44	101,1
Samarium	Sm, Sa	62	150,35
Sauerstoff, Oxygenium	O	8	16,000
Scandium	Sc	21	44,96
Schwefel	S	16	32,066
Selen	Se	34	78,96
Silizium	Si	14	28,09
Silber, Argentum	Ag	47	107,880
Stickstoff. Nitrogenium	N	7	14,008
Strontium	Sr	38	87,63
Tantal	Ta	73	180,95

ELEMENT	SYMBOL	Z	ATOMGEWICHT
Technetium	Tc	43	(99)
Tellur	Te	52	127,61
Terbium	Tb	65	158,93
Thallium	T	81	204,39
Thorium	Th	90	232,05
Thulium	Tm	69	168,94
Titan	Ti	22	47,90
Uran	U	92	238,07
Vanadium	V	93	50,95
Wasserstoff, Hydrogenium	H	1	1,0080
Wismut, Bismutum	Bi	83	209,00
Wolfram	W	74	183,86
Xenon	Xe	54	131,30
Ytterbium	Yb	70	173,04
Yttrium	Y	39	88,92
Zink	Zn	30	65,38
Zinn, Stannum	Sn	50	118,70
Zirkonium	Zr	40	91,22

ANHANG G

G. TABELLE DER ELEMENTARTEILCHEN

Teilchen		Symbol	Spin	Masse (m_e)	Masse (MeV)	Lebensdauer (sec)	Zerfallsschema
Photon		γ	1	0	0	∞	—
Leptonen		ν	$\frac{1}{2}$	0	0	∞	—
		$e^{\pm}$	$\frac{1}{2}$	1	0,510 976	∞	—
		$\mu^{\pm}$	$\frac{1}{2}$	206,86	105,70	$2,261.10^{-6}$	$e^{\pm} + \nu + \bar{\nu}$
Mesonen	π-Mesonen	π°	0	264,37	135,04	$< 4.10^{-16}$	$\gamma + \gamma$ $e^{+} + e^{-} + \gamma$ $2e^{+} + 2e^{-}$ $e^{+} + e^{-}$
		$\pi^{\pm}$	0	273,27	139,63	$2,56.10^{-8}$	$\mu^{\pm} + \nu$ $e^{\pm} + \nu$ $\pi^{\circ} + e^{\pm} + \nu$
	K-Mesonen	K^{+}	0	966,8	494,0	$1,224.10^{-8}$	$\pi^{+} + \pi^{+} + \pi^{-}$ $\pi^{+} + \pi^{\circ} + \pi^{\circ}$ $\pi^{\circ} + \pi^{\circ}$ $\mu^{+} + \pi^{\circ} + \nu$ $e^{+} + (\pi^{\circ}) + \nu$ $\mu^{+} + \nu$
		K^{-}	0	965,6	493,4	$1,25.10^{-8}$	$\pi^{+} + \pi^{-} + \pi^{-}$ $\pi^{-} + \pi^{\circ}$ $\mu^{-} + \nu$ $e^{-} + (\pi^{\circ}) + \nu$
		K_1°	0	974,4	497,9	$1,00.10^{-10}$	$\pi^{+} + \pi^{-}$ $\pi^{\circ} + \pi^{\circ}$ $\pi^{+} + \pi^{-} + \pi^{\circ}$ $\pi^{\circ} + \pi^{\circ} + \pi^{\circ}$ $\mu^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$
		K_2°	0	974,4	497,9	$6,1.10^{-8}$	$e^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$
Nukleonen		p	$\frac{1}{2}$	1836,116	938,211	∞	—
		n	$\frac{1}{2}$	1838,648	939,505	$1,01.10^{3}$	$e^{-} + p + \bar{\nu}$
Hyperonen		Λ°	$\frac{1}{2}$	2182	1115,45	$2,505.10^{-10}$	$\{ p + \pi^{-}$; $n + \pi^{\circ}$
		Σ^{+}	$(\frac{1}{2})$	2328	1189,55	$0,83.10^{-10}$	$\{ p + \pi^{\circ}$; $n + \pi^{+}$
		Σ^{-}	$(\frac{1}{2})$	2341,6	1196,39	$1,59.10^{-10}$	$n + \pi^{-}$
		Σ°	$(\frac{1}{2})$	2329,9	1191,94	$<10^{-11}$ (theor 10^{-19})	$\Lambda^{\circ} + \gamma$
		Ξ^{-}	?	2583	1319,1	$1,9.10^{-10}$	$\Lambda^{\circ} + \pi^{-}$
		Ξ°	?	2579	1311	$\sim 1,5.10^{-10}$	$\Lambda^{\circ} + \pi^{\circ}$

SACHREGISTER

P. MARMIER · KERNPHYSIK I

P. MARMIER

KERNPHYSIK II

Vorlesung von Prof. Dr. P. Marmier

KERNPHYSIK II

ausgearbeitet von

Dr. Eric Sheldon



4. Unveränderte Auflage

Druck Benziger Einsiedeln/Zürich

KERNPHYSIK II.

INHALTSVERZEICHNIS

ANHANG ZU KERNPHYSIK II

15. KERNMODELLE

15. 1 Einführung

Um eine theoretische Erklärung der beobachteten Kerneigenschaften und der nuklearen Prozesse zu liefern, sowie um numerische Parameter und experimentelles Verhalten der Kerne vorherzusagen, muss man ein passendes Modell der verschiedenen Kerne einführen. Dabei ist man grundsätzlich um solche Konfigurationen und Wechselwirkungsformen der beteiligten Nukleonen bemüht, welche mit empirischen Eigenschaften verträglich sind, wie z. B. mit der ungefähr konstanten Dichte der Kernmaterie (Abschn. 1. 5), den Nukleon-Bindungsenergien (Fig. 1. 2), den magnetischen Dipol- sowie elektrischen Quadrupol-Momenten und Kernspins. Ferner sollte das Modell auch theoretische Resultate liefern, welche mit den experimentellen Ergebnissen aus Streuung, Spaltung und Kernreaktionen übereinstimmen. Kein einzelnes Modell kann all diese Anforderungen in zufriedenstellender Weise erfüllen: die Gültigkeit der gegenwärtig bekannten Kernmodelle ist in jedem Fall auf einen gegebenen Anwendungsbereich beschränkt. So beruht z. B., wie in Abschnitt 1. 6 erläutert, das Flüssigkeitsmodell, welches den Kern als eine inkompressible Flüssigkeit behandelt, wesentlich auf der Annahme einer konstanten Dichte der Kernmaterie und liefert dadurch eine Methode zur Berechnung von Bindungsenergien und daraus der Kernmassen. Weiterhin kann es das Verhalten bei Kernspaltung zumindest qualitativ beschreiben. Um jedoch eine theoretische Berechnung der Winkelverteilungen von Reaktionsprodukten oder der Kernspins im Grundzustand zu liefern, werden andere Modelle benötigt.

Wechselwirkungen und Anordnungen der Nukleonen werden durch zwei grundsätzlich verschiedene Klassen von theoretischen Zugängen erschlossen:

a) Modelle schwacher Wechselwirkung (unabhängige Partikel).

b) Modelle starker Wechselwirkung.

Bevor auf diese näher eingegangen wird, ist es nützlich, festzustellen, dass die Nukleonen im Kern mit Hilfe der nicht-relativistischen Quantenmechanik zu untersuchen sind.

15. 2 Erläuterung des Zustands von Nukleonen im Kern

15. 2. 1 Nicht-relativistischer Zustand

In diesem Abschnitt soll halbquantitativ gezeigt werden, dass für Nukleonen im Kern die nicht-relativistische Behandlung genügt, dass man jedoch eher die Quantenmechanik als die klassische Mechanik benützen muss.

Als eine rohe Näherung kann man annehmen, dass die kinetische Energie eines Nukleons von der gleichen Grössenordnung wie die Bindungsenergie im Kern ist ($\sim$ 8 MeV/Nukleon); infolgedessen kann man

$$\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{\text{Kinetische Energie}}{\text{Ruheenergie}} \approx \frac{8\ \text{MeV}}{938\ \text{MeV}}, \qquad (15.1)$$

also

$$v \approx \frac{1}{10}\, c \qquad (15.2)$$

setzen, und die nicht-relativistische Behandlung reicht aus.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass die Elektronen in leichten und mittelschweren

Atomen auch nicht-relativistisch behandelt werden können; beispielsweise ist die "Geschwindigkeit" eines Elektrons in der K-Schale des Wasserstoffatoms $\sim \frac{1}{100}$ c.

15. 2. 2 Quantenmechanischer Zustand

Es soll nun gezeigt werden, dass Nukleonen quantenmechanisch behandelt werden müssen. Beim Übergang von der Hamilton-Jacobi-Mechanik zur Quantenmechanik macht man den Ansatz

$$\psi = A(x)\, e^{-\frac{iW}{\hbar}} , \qquad (15.3)$$

der implizit die Quantisierung der Energie in geeigneten Einheiten andeutet. Der klassische Grenzwert $\hbar \to 0$ ist mit sehr grossen Werten von $\frac{W}{\hbar}$ verknüpft; wenn der Wert jedoch für ein gegebenes stationäres System klein ist, dann ist eine quantenmechanische Behandlung erforderlich.

Dann ist

$$\frac{W}{\hbar} = \frac{\oint p\,ds}{\hbar} \approx \frac{pR}{\hbar} = \frac{p}{M_p c} \cdot \frac{R}{\lambda} , \qquad (15.4)$$

worin s die Bahnlänge,

$R = 1{,}2 \,.\, A^{1/3}$ f der Kernradius,

$$R_{max} \approx 1{,}4 \,.\, 7 f \approx 9 f , \qquad (15.5)$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} \sim \frac{\hbar}{M_p c} = 0{,}21 f \text{ die de-Broglie-Wellenlänge} , \qquad (15.6)$$

ist.

Hierin wurde die Nukleonengeschwindigkeit $\approx$ c gesetzt, um den kleinsten Wert von λ und damit den grössten Wert von $\frac{W}{\hbar}$ zu erhalten.

$$\frac{W}{\hbar} \approx \sqrt{\frac{p^2}{2M_p} \cdot \frac{2}{M_p c^2}} \cdot \frac{R}{\lambda} \approx \sqrt{\frac{2E_B}{M_p c^2}} \cdot \frac{R}{\lambda} \sim \sqrt{\frac{2\,.\,8}{938}} \cdot \frac{9}{0{,}2} ; \qquad (15.7)$$

$$\frac{W}{\hbar} \lesssim 6 . \qquad (15.8)$$

Infolgedessen ist eine quantenmechanische Behandlung der Nukleonen erforderlich.

In analoger Weise kann man einen Beweis für die Nicht-Existenz freier Elektronen in stationären Zuständen innerhalb des Kernvolumens gewinnen. Hierzu setzt man

$$\frac{W}{\hbar} \approx \frac{pR}{\hbar} = \frac{m_e c R}{\hbar} = \frac{R}{\lambda_c} , \qquad (15.9)$$

worin λ_c = 386 f die Compton-Wellenlänge des Elektrons ist. Also ist

$$\frac{W}{\hbar} \lesssim \frac{9}{386} \cong \frac{1}{43} \qquad (15.10)$$

und damit $W \ll \hbar$, was unmöglich ist, da zumeist $W = \hbar$ sein muss. Setzt man infolgedessen

$$\frac{W}{\hbar} = 1 \qquad (15.11)$$

und ermittelt die Ausdehnung des erforderlichen Volumens in einem Wasserstoffatom, wo seine Geschwindigkeit durch v/c $\approx$ 1/137 gegeben ist, dann ist

$$1 = \frac{W}{\hbar} = \frac{pr}{\hbar} = \frac{m_e v . r}{\hbar} = \frac{m_e c}{\hbar} \cdot \frac{v}{c} . r = \frac{vr}{c \lambda_c} \qquad (15.12)$$

und daraus

$$r = \frac{c\,\lambda_c}{v} = 386 \,.\, 10^{-13} \,.\, 137 \approx 0{,}53 \,.\, 10^{-8} \text{ cm} . \qquad (15.13)$$

Dies ist in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Bohrschen Radius des Wasserstoffatoms.

15. 3 Schalenmodell

15. 3. 1 Nukleonen-Schalen und magische Zahlen

In Analogie zur atomphysikalischen Struktur der Elektronenschalen lag es nahe, ein "SCHALENMODELL" ("SHELL MODEL") des Kernes aufzustellen. Dieses umfasst abgeschlossene Schalen aus $2(2\ell + 1)$ Neutronen oder Protonen, welche nur schwach aneinander gebunden sind und daher keine Kollektivbewegung ausführen. Obwohl die Nukleonen bestimmten Schalen zugeordnet werden, darf man sich ihre Bewegung im Kern allerdings nicht als Umdrehung und Spin in denjenigen atomarer Elektronen analogen Bahnen vorstellen. Dieses "independent-particle"-Modell wurde nach einer Periode geringerer Beliebtheit von Mayer und von Jensen weiter entwickelt und hat bemerkenswerte Erfolge bei der Interpretation der Kerneigenschaften erzielt.

Obwohl das Flüssigkeitsmodell (Modell starker Wechselwirkung) Kernbindungsenergien bis zu einem gewissen Grade erklären kann, liefert es keine Erklärung für die auffälligen Maxima in der Darstellung des Bindungsenergieverlaufs durch $^B/_A$ gegen A (Fig. 1. 2). Diese Maxima ergeben sich für diejenigen stark gebundenen Kerne, welche eine "MAGISCHE ZAHL" Neutronen oder Protonen besitzen:

$$\left.\begin{array}{l} Z \text{ oder } N = 2,\ 8,\ 20,\ (28),\ 50,\ 82\ ; \\ N = 126\ . \end{array}\right\}^{*} \qquad (15.14)$$

Solche Kerne besitzen weitere auffällige und charakteristische Eigenschaften; so übertrifft z. B. die relative Häufigkeit von Isotopen mit magischen Neutronenzahlen bei weitem (Fig. 15. 1)

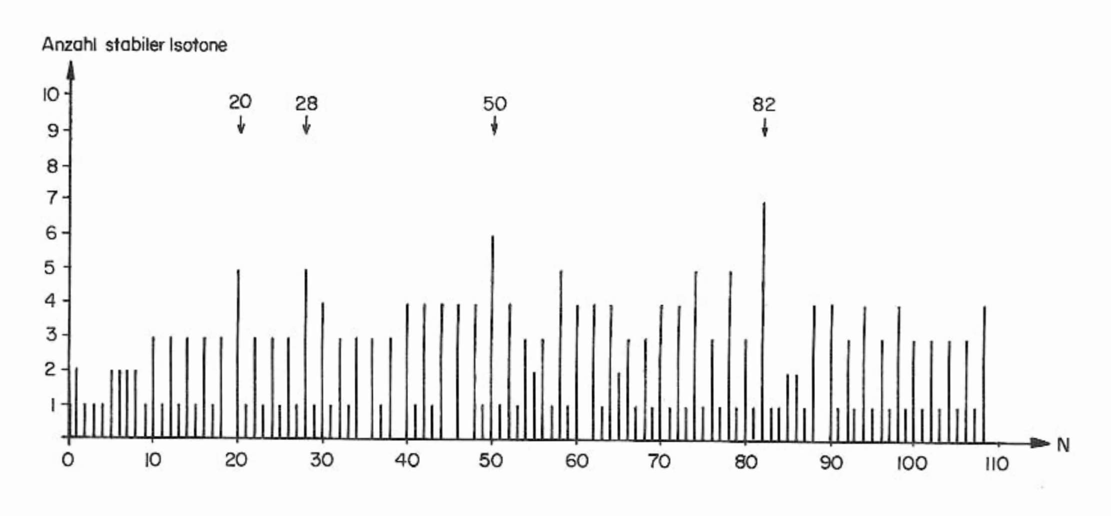


Fig. 15. 1

diejenige der anderen Isotope jedes beliebigen Elements (so gibt es z. B. 7 stabile Isotone für N = 82 und 6 für N = 50, vgl. Fig. 1. 5).

Ferner ist die Häufigkeit eines Elements mit magischer Protonenzahl stets grösser (Fig. 15. 2) als die benachbarter Elemente.

*N.B.: Die Werte der magischen Zahlen sind durch die Formeln

$$M = \frac{1}{3}\, n(n^2 - 1) \text{ bei LS-Kopplung}, \quad (n = 2, 3, 4)$$

und

$$M = \frac{1}{3}\, n(n^2 + 5) \text{ bei jj-Kopplung} \quad (n = 4, 5, 6, 7)$$

gegeben.

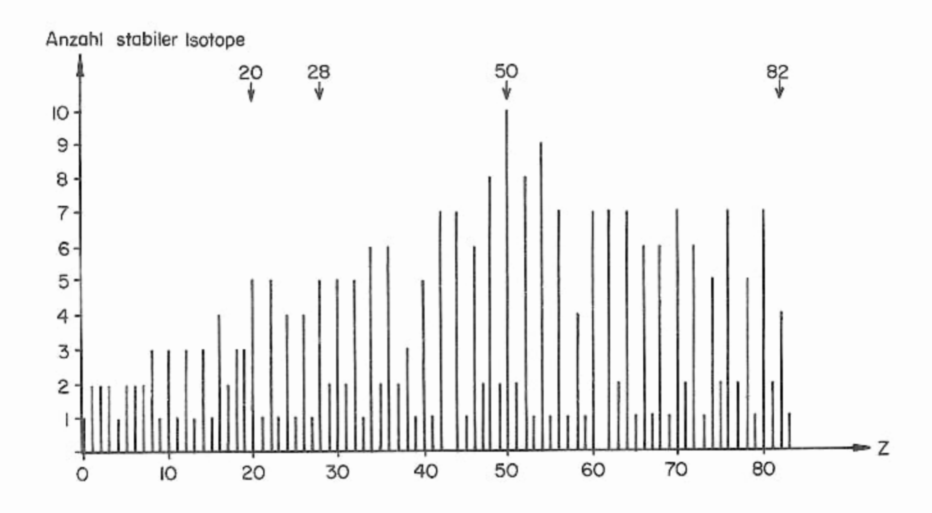


Fig 15.2

In Fig. 15.3 ist ausserdem die merkwürdige "Periodizität" bezüglich der magischen Zahlen für die Energien der niedersten angeregten Niveaus von gg-Kernen dargestellt.

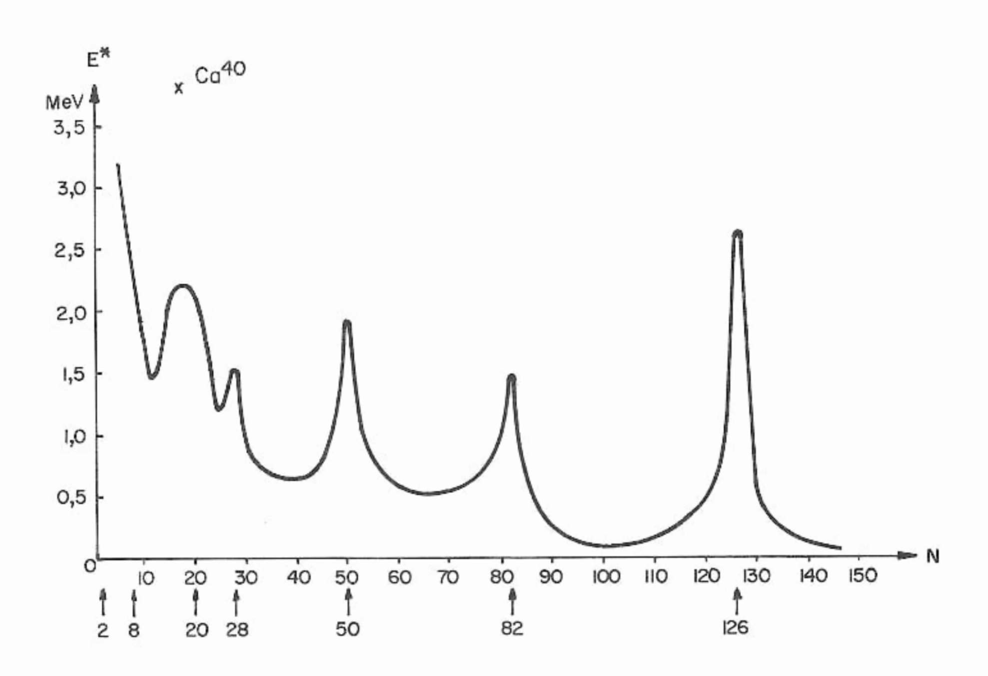


Fig. 15.3

15. 3. 2 Energieniveaus im Kern

Im Schalenmodell (schwache Wechselwirkung) wird angenommen, dass sich jedes Nukleon ziemlich unabhängig in einem Potentialtopf bewegt, welcher das durchschnittliche, von den übrigen Nukleonen erzeugte Kraftfeld darstellen soll. Dieses einheitliche Zentralfeld bedeutet eine dem Schalenmodell inhärente Annahme; denn im Gegensatz zur Situation in der Atomphysik enthält der Kern keinen als Kraftzentrum wirkenden massiven Zentralkörper. Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte muss der Potentialtopf eine scharfe Begrenzung haben, welche z. B. viel schärfer als die Begrenzung des atomaren Coulomb-Potentials ist. Für die Rechnungen besonders geeignet sind die folgenden beiden Potentiale:

(a) Kastenpotentiale (besonders für schwere Kerne):

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0 \quad \text{für} \quad r \leq a \\ V &= 0 \quad \text{für} \quad r > a . \end{aligned}\right\} \qquad (15.15)$$

(b) Oszillator-Topfpotentiale (speziell für leichte Kerne):

$$V = V_0 r^2 . \qquad (15.16)$$

Es gibt Anzeichen dafür, dass das tatsächliche Kernpotential eine zwischen diesen beiden Extremfällen liegende Form annimmt. Die Wellenfunktion des Kerns wird dargestellt durch das Produkt der Ein-Teilchen-Wellenfunktionen oder einer linearen Kombination davon, in Verbindung mit der Antisymmetrisierungs-Vorschrift, welche das Pauli'sche Ausschlussprinzip berücksichtigt. Die Energieniveaus eines linearen, harmonischen Oszillators werden durch

$$E = \hbar\omega\,(n + 1/2) \qquad (15.17)$$

gegeben; betrachtet man einen dreidimensionalen Oszillator-Topf, so erhält man wiederum ein Spektrum äquidistanter Energieniveaus gemäss

$$E = \hbar\omega\,(n + 3/2) . \qquad (15.18)$$

n ist hier die in Abschn. 9. 2. 8 definierte Hauptquantenzahl.

Es gilt hier

$$n \equiv n_x + n_y + n_z , \qquad (15.19)$$

wobei n_x, n_y, n_z ganze Quantenzahlen sind, so dass man

für n = 0 als Anzahl der möglichen Kombinationen hat:	1
" n = 1 " " " " " "	3
" n = 2 " " " " " "	6
" n = 3 " " " " " "	10
" n = 4 " " " " " "	15
" n = 5 " " " " " "	21 .

d.h., $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Um die Besetzungszahlen jedes Niveaus zu erhalten, muss man die obigen Kombinationszahlen noch verdoppeln, damit die beiden möglichen Spineinstellungen berücksichtigt sind. Das Schema der Ein-Teilchen-Niveaus hat dann die in Tab. 15. 1 dargestellte Form.

Tab. 15. 1

	Besetzungszahl in jedem Niveau	Totale Anzahl Nukleonen im Kern	Bahndrehimpuls ℓ
——— n = 5	42	112	1, 3, 5
——— n = 4	30	70	0, 2, 4
——— n = 3	20	40	1, 3
——— n = 2	12	20	0, 2
——— n = 1	6	8	1
——— n = 0	2	2	0

Offensichtlich kann das Modell in seiner obigen Form nur die Werte der niedrigeren, nicht jedoch die der höheren magischen Zahlen erklären.

Die Oszillator-Niveaus sind jedoch entartet und können durch Betrachtung der Bahndrehimpuls-Quantenzahl ℓ des Nukleonensystems in Multipletts aufgespalten werden (ℓ nimmt dabei die in Tab. 15. 1 verzeichneten Werte an).

Wenn man zu einem Kastenpotential übergeht, ist die Entartung des Oszillatorpotentials aufgehoben: die entarteten Zustände spalten in der Reihenfolge ihres ℓ-Werts auf, wobei die Niveaus der höchsten Drehimpulse am niedrigsten liegen. Die Diskrepanz in den magischen Zahlen bleibt trotz Aufhebung der Entartung bestehen; sie ist durch eine Vorschrift überwindbar, welche alle p-, d-, f-... Zustände in zwei verschiedene aufspaltet und dann das niedrigste Niveau jeder n-Schale in das Gebiet der nächstniedrigeren n-Schale hinunterfallen lässt (Fig. 15. 4). Diese ad-hoc-Vorschrift liefert als Besetzungszahlen gefüllter Schalen die "magischen": N oder Z = 2, 8, 28, 50, 82, 126; man kann eine solche Vorschrift durch die Annahme begründen, dass das mittlere Kernpotential einen Anteil in Form einer attraktiven Spin-Bahn-Kraft besitzt,

$$K_{s.B.} = \zeta \sum_i (\vec{\ell}_i \cdot \vec{s}_i), \qquad (15.20)$$

welcher zusätzlich auf jedes Teilchen i wirkt. Diese Art von Kräften hebt die in jedem Ein-Teilchen-Niveau bestehende Entartung bezüglich der zwei möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i = \vec{\ell}_i \pm \tfrac{1}{2}, \qquad (15.21)$$

auf welche die beiden Spinorientierungen entsprechen. Im Endresultat werden also die Oszillatorniveaus, welche bezüglich ℓ-Werten einer gegebenen Parität entartet sind, in ℓ-Multipletts von Unterschalen aufgespalten, welche wegen des im wesentlichen negativen Vorzeichens von ζ absinken; die Unterschalen werden dann weiter durch die Spin-Bahn-Kraft in zwei den verschiedenen Spineinstellungen entsprechende Niveaus aufgespalten. So wird in jede Hauptschale ein "Eindringling" aus dem nächsthöheren ℓ-Band herabgedrückt; dessen Parität ist von der aller übrigen Niveaus der Hauptschale unterschieden. Je nach der Grösse der Spin-Bahn-Aufspaltung kann sich die Anordnung der Energieniveaus auch verändern ("Überkreuzen" = "cross-over").

Das "mittlere Kernfeld" des Schalenmodells reicht in vielen Fällen nicht aus, um neben den Grundzuständen auch die angeregten Niveaus zu berechnen; im Rahmen des Schalenmodells muss man zu diesem Zweck auch die Teilchen-Teilchen-Kräfte störungstheoretisch berücksichtigen. Haben diese reinen Zentralkraft-Charakter, so wird das LS-Kopplungsschema (Abschn. 9. 3. 2) verwendet; im extremen Fall reiner Spin-Bahn-Wechselwirkung zwischen den Teilchen hat man dagegen ideale jj-Kopplung. Der empirische Erfolg des jj-Kopplungsschemas ist noch immer seine hauptsächliche

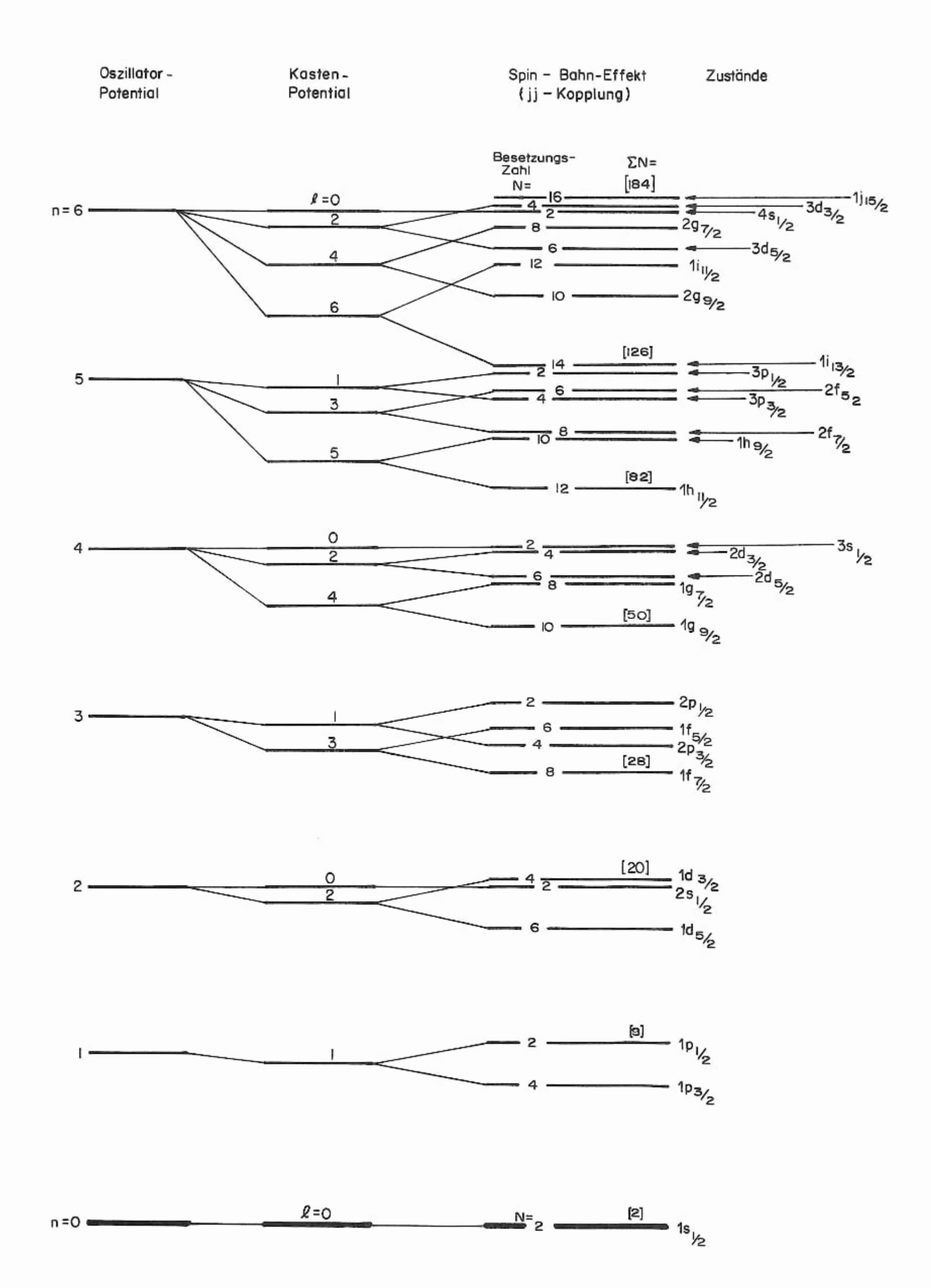

Oszillator-Potential
Kasten-Potential
Spin - Bahn-Effekt (jj-Kopplung)
Zustände
Besetzungs-Zahl N=
ΣN=
[184]
[126]
[82]
[50]
[28]
[20]
[8]
[2]
n=6
5
4
3
2
1
n=0
ℓ=0
1jl5/2
3d3/2
4s1/2
2g7/2
3d5/2
1i11/2
2g9/2
1i13/2
3p1/2
2f5/2
3p3/2
2f7/2
1h9/2
1h11/2
3s1/2
2d3/2
2d5/2
1g7/2
1g9/2
2p1/2
1f5/2
2p3/2
1f7/2
1d3/2
2s1/2
1d5/2
1p1/2
1p3/2
1s1/2

Fig. 15.4

Rechtfertigung. Aus den geringen Werten der magnetischen Kernmomente würde man eher auf ein LS-Kopplungsschema schliessen; im Gegensatz zum jj-Schema vermag dieses aber Kernspins und die in der Nähe der magischen Zahlen auftretenden Besonderheiten nicht zu erklären. Eine weitere Verbesserung der theoretischen Beschreibung wird durch das sogenannte intermediäre Kopplungsschema erzielt, wodurch alle Konfigurationen des gleichen Oszillatorniveaus störungstheoretisch berücksichtigt werden können.

Da die kurzreichweitigen Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen sehr stark sind, nahm man ursprünglich an, dass sie die Schalenmodell-Hypothese eines gleichmässigen mittleren Kernfeldes hinfällig machen und zu starken lokalen Fluktuationen führen würden. Dies wird jedoch durch das Pauli-Prinzip verhindert: da sich in jedem gegebenen Zustand nur ein Teilchen auf einmal befinden kann, werden die individuellen Nukleonen zwar einem stark fluktuierenden Potential ausgesetzt sein, sich aber trotzdem auf gleichmässigen, kollisionslosen Bahnen bewegen, weil gar keine freien niederenergetischen Bahnen existieren, in welche sie hineingestreut werden könnten. Für Nukleonen innerhalb des Kerns scheint dieser ziemlich "transparent", während er einem einfallenden Nukleon undurchsichtig erscheint, weil es gestreut oder in ein unbesetztes hohes Niveau eingefangen werden kann. Diese wesentliche Rolle des Pauli-Prinzips beim "Glätten" der Nukleonbewegung ist erst in neuerer Zeit eingesehen worden.

15.3.3 Ein-Teilchen-Schalenmodell

In der einfachsten Form des Schalenmodells, der EIN-TEILCHEN-Form, wird zusätzlich angenommen, dass Neutronen und Protonen getrennt jeweils paarweise mit verschwindendem totalem Drehimpuls angeordnet sind, so dass der Kernspin I gleich dem totalen Drehimpuls j des restlichen individuellen Nukleons bzw. restlicher Nukleonen (LEUCHTNUKLEONEN) wird. Die abgeschlossenen Schalen tragen also zum Kernspin nichts bei, d.h. bei gg-Kernen sollte der Kernspin I = 0 sein, was experimentell bestätigt ist. Mit der Annahme, dass gepaarte Nukleonen einen stabilen RUMPF (CORE) mit I = 0 bilden, können unter alleiniger Verwendung der Leuchtnukleon-Wellenfunktionen Eigenschaften des Kern-Grundzustands berechnet werden, wie z.B. Spin, magnetisches Moment und ft-Werte (Abschn. 10.9.1) beim β - Zerfall.

15.3.4 Kernspin im Grundzustand

Beispiel: ${}_8O^{16}$ ist ein doppelt-magischer Kern hoher Bindungsenergie mit I = 0. Bei O^{17} beginnt das Leuchtneutron das $1d_{5/2}$-Niveau zu füllen (Fig. 15.5). Weil es $j = 5/2$ hat, sollte der Kernspin des Grundzustandes von O^{17} $I = 5/2$ sein, was mit dem experimentellen Befund übereinstimmt.

	Besetzungszahlen	Anzahl p	Anzahl n
$1d_{5/2}$	6		1
$1p_{1/2}$	2	2	2
$1p_{3/2}$	4	4	4
$1s_{1/2}$	2	2	2

Fig. 15.5

In analoger Weise wird der Spin des Grundzustands von ${}_{20}Ca^{43}$ als $I = 7/2$ vorhergesagt, wieder in Übereinstimmung mit den Experimenten, denn die äussersten 3 Neutronen ausserhalb der geschlossenen Schalen sind im $1f_{7/2}$ Niveau, und zwei von ihnen haben antiparallele, also einander aufhebende Drehimpulse.

Es stellt sich heraus (Fig. 15. 6), dass das Ein-Teilchen-Schalenmodell Kernspins allgemein sehr gut voraussagen kann, insbesondere bei Berücksichtigung der Regel, dass vorzugsweise Schalen höherer j-Werte durch Paare von Nukleonen aufgefüllt werden. Diese Regel ist besonders

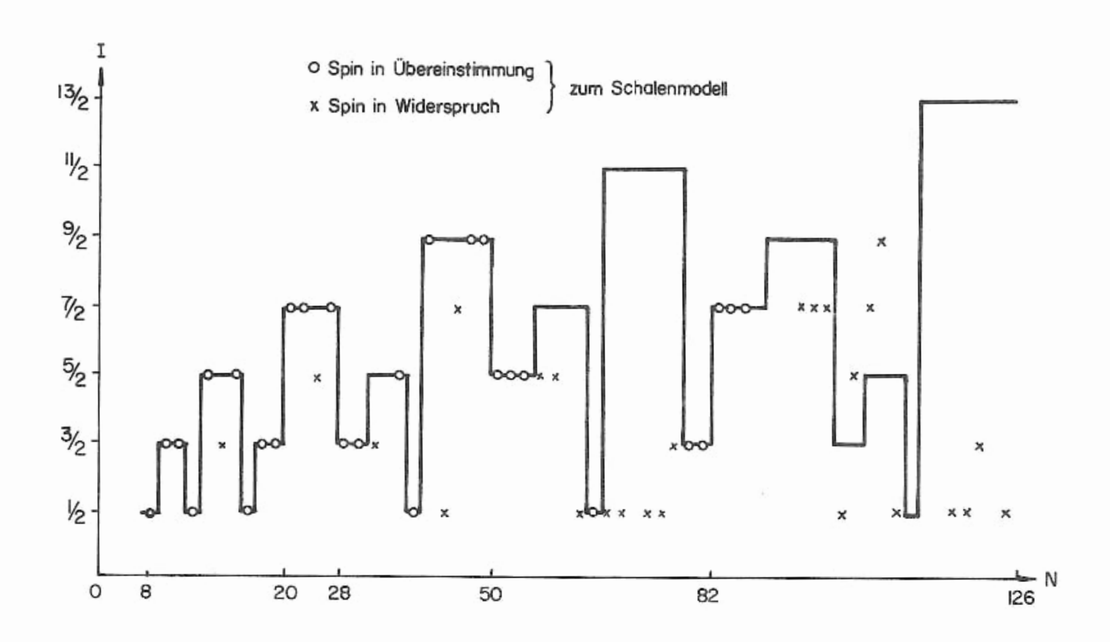


Fig. 15.6

für die $h_{11/2}$ - und $j_{13/2}$ -Niveaus wichtig; sie bedeutet, dass die Bindungsenergie eines Teilchenpaars mit höheren j-Werten zunimmt, was auch aus der Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen den Teilchen erhalten wird. Auf diese Weise lassen sich 14 der 24 beobachteten Ausnahmefälle in Fig. 15. 6 erklären. Von den übrigen Ausnahmefällen betreffen fünf :

Ne^{21} mit Konfiguration $(d_{5/2})^3$ und Spin $I = 3/2$
Na^{23} " " $(d_{5/2})^3$ " " $I = 3/2$
Ti^{47} " " $(f_{7/2})^5$ " " $I = 5/2$
Mn^{55} " " $(f_{7/2})^3$ " " $I = 5/2$
Se^{79} " " $(g_{9/2})^7$ " " $I = 7/2$.

Hier wurde die Niveaubesetzung durch eine gegebene Nukleongattung mit der Nomenklatur $(\ell j)^k$ bezeichnet, wobei k die Anzahl gleicher Nukleonen in der betreffenden Schale bedeutet. Die allgemeine Nomenklatur enthält auch die Hauptquantenzahl in der Form $(n\,\ell\, j)^k$, wobei Protonen- und Neutronen-Besetzungszahlen durch ein Paar solcher Klammern angegeben werden können; die erste Klammer betrifft Protonen, die zweite Neutronen. Beispiel:

$$ {}_{15}P^{33} \quad : \quad (2s_{1/2})(1d_{3/2})^2 \; . \qquad (15.22) $$

Von den oben behandelten Kernspin-Ausnahmefällen bleiben fünf übrig, welche alle im Gebiet N ≈ 100... 110 und A ≈ 170 liegen; man hat Gründe (z. B. die grossen elektrischen Quadrupolmomente) für die Annahme, dass die Kerne dort von der Kugelgestalt stark abweichende Oberflächenform haben.

15.3.5 Magnetische Kernmomente

Die mit dem obigen Modell errechneten Werte sind mit den in Abschn. 9.7.1 durch semiklassische Methoden erhaltenen identisch:

Tab. 15.2

	p unpaarig	n unpaarig
$I = \ell + 1/2$	$\mu = I + 2{,}29$	$\mu = -1{,}91$
$I = \ell - 1/2$	$\mu = I - 2{,}29 \frac{I}{I+1}$	$\mu = 1{,}91 \frac{I}{I+1}$

und sollten daher auf den Schmidt-Linien liegen. Wie man aus Fig. 9.12 u. 9.13 entnimmt, ist die Übereinstimmung nur mässig gut; die experimentellen Punkte liegen zwischen den Linien, weichen aber meist nicht mehr als 1 Kernmagneton von ihrer zugehörigen Linie ab. Die Punkte, welche den Schmidt-Linien am nächsten liegen, gehören Kernen, die nur ein Teilchen ausserhalb einer abgeschlossenen Schale haben; dort ist das Ein-Teilchen-Modell am besten gültig und findet sich einigermassen gut bestätigt.

15.3.6 ft-Werte

Wie in Abschn. 10.9.1 definiert und ausgeführt, sind die ft-Werte beim β-Zerfall eine Funktion der β-Energie und daher der Kern-Energieniveaus. Bei Rechnungen mit dem Ein-Teilchen-Modell findet man, dass theoretisch zwischen den experimentell beobachteten übererlaubten β-Übergängen von Spiegelkernen ($\log ft \approx 3,5$) und den erlaubten Übergängen ($\log ft \approx 5$) nicht unterschieden wird. Gewisse Verbesserungen des Ein-Teilchen-Modells ergeben jedoch diesen Unterschied auch theoretisch. Allerdings fallen theoretische ft-Werte häufig niedriger als die experimentell beobachteten aus. Das Modell wird also grundsätzlich experimentell bestätigt, bedarf aber bezüglich Details noch der Verbesserung. Eine gewisse Bestätigung ist darin zu sehen, dass das Modell viele Beispiele von β-Zerfällen grosser ft-Werte erklärt, welche den Auswahlregeln $\Delta I = 0, 1$; $\Delta\pi = no$ für erlaubten Zerfall gehorchen. Die ℓ-Werte nämlich, welche diesen Kernen mit Hilfe des Schalenmodells zugeordnet werden, weisen auf Drehimpulsänderung $\Delta\ell = 2$ beim Zerfall hin, was einen erlaubten Zerfall verhindert und die grossen ft-Werte erklärt.

15.3.7 Kern-Quadrupolmomente

Unter Verwendung des Ausdrucks für den Operator des Quadrupolmoments erhält man als theoretischen Quadrupol-Beitrag eines einzelnen Protons:

$$eQ = \langle r^2 (3\cos^2\vartheta - 1) \rangle_{m=j} = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle . \qquad (15.23)$$

Daraus folgt als Schalenmodell-Formel für einen Kern vom Radius R_o mit einem einzelnen Proton ausserhalb einer geschlossenen Schale

$$\boxed{eQ_{ug} = -\frac{2I-1}{2I+2}\, e \cdot \frac{3}{5} R_o^2 .} \qquad \text{(ug-Kerne).} \qquad (15.24)$$

Für Kerne mit einem einzelnen Loch in einer Protonen-Schale hat das Quadrupolmoment den gleichen Betrag und umgekehrtes Vorzeichen. Für Kerne in einem Ein-Leuchtneutron-Zustand hat das Quadru-

polmoment den Wert

$$\boxed{eQ_{gu} = \frac{Z}{A^2}\,(eQ_{ug})\ .} \qquad \text{(gu-Kerne)} \qquad (15.25)$$

Hier treten wesentliche Abweichungen von den experimentellen Werten auf, welche meist positiv und häufig 10-fach grösser als die betreffenden theoretischen Werte sind. Ferner findet sich experimentell kein systematischer Unterschied zwischen Kernen ungerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl. Nur bei Kernen in der Nähe magischer Zahlen findet sich ein gewisses Mass an Übereinstimmung zwischen experimentellen und theoretischen Werten.

Kerne mit einem einzelnen Nukleon ausserhalb geschlossener Schalen haben negative Quadrupolmomente, während Kerne mit einem einzigen "Loch" in sonst gefüllten Schalen positive Quadrupolmomente besitzen; z. B. S^{33}, das ein Neutron in dem $1d_{1/2}$-Zustand besitzt, hat ein negatives Quadrupolmoment, während S^{35} mit einem Loch in diesem Zustand dagegen ein positives Quadrupolmoment hat.

15. 3. 8 Übergangswahrscheinlichkeiten

Ähnliche Unstimmigkeiten wie in Abschn. 15. 3. 7 existieren für die elektrischen und magnetischen Multipol-Übergangswahrscheinlichkeiten: Weisskopf hat diese berechnet als:

$$W(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{3}{3+\lambda}\cdot R_0^{\lambda}\right)^2 \cdot S \qquad \text{für Leuchtproton-Kerne}\ , \qquad (15.26)$$

$$W(E\lambda) = 0 \qquad \text{für Leuchtneutron-Kerne}\ , \qquad (15.27)$$

$$W(M\lambda) = \left(\frac{e\hbar}{2m_e c}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}\left(\frac{3}{2+\lambda}\cdot R_0^{\lambda-1}\right)^2\left(g_\ell + \frac{2}{\lambda+1}\,g_s\right) S \qquad (15.28)$$

$$\text{für } \lambda = |I_f - I_i|\ ,$$

wobei zur besseren Deutlichkeit die Multipolordnung mit λ statt mit dem üblichen ℓ aus Abschn. 11. 3 u. 11. 4 bezeichnet wurde. Der Spinfaktor S wird mit Hilfe von 3-j-Symbolen (Anh. H. 4) gegeben durch

$$S = (2I_f + 1)(2\lambda + 1)\begin{pmatrix} I_f & \lambda & I_i \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \qquad (15.29)$$

wo I_f und I_i Kernspins im Anfangs- und Endzustand bedeuten. Diese Ausdrücke lassen sich näherungsweise durch die in Abschn. 11. 8 gegebenen Formeln ausdrücken.

Beim Vergleich mit experimentellen Werten findet man sehr starke Abweichungen, welche von einem Faktor 10 bis zu Faktoren 10^{10} reichen können!

Man folgert daraus, dass das Ein-Teilchen-Schalenmodell in der obigen Form zwar in grossen Zügen Kernspins und magnetische Kernmomente, in geringerem Umfange auch β-Zerfallswahrscheinlichkeiten beschreiben kann, also grundsätzlich vernünftig ist; aber es ist zu grob, um das detaillierte Verhalten jedes Kerns zu beschreiben und muss darum weiter verbessert werden, insbesondere durch Modifikation des Kopplungsschemas und der Annahmen über das mittlere Potential.

15.3.9 Verbesserungen des Ein-Teilchen-Modells

In der Ein-Teilchen-Form des Schalenmodells wird die (theoretisch nicht notwendige) Annahme gemacht, dass die Drehimpulse der "schwach gebundenen" Nukleonen ausserhalb geschlossener Schalen sich paarweise aufheben, so dass nur die restlichen, ungepaarten Nukleonen die Kerneigenschaften bestimmen. Diese Vernachlässigung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen enthält ein zu grobes Näherungsverfahren: alle Zustände einer Konfiguration $(n \ell j)^k$ sind hier entartet, obwohl es davon i.a. sehr viele gibt:

$(j_{3/2})^2 : I = 0, 2$

$(j_{3/2})^3 : I = 3/2$

$(j_{5/2})^2 : I = 0, 2, 4$

$(j_{5/2})^3 : I = 3/2, 5/2, 9/2$

$(j_{7/2})^2 : I = 0, 2, 4, 6$

$(j_{7/2})^3 : I = 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, 15/2$

$(j_{7/2})^4 : I = 0, 2, 2, 4, 4, 5, 6, 8$.

Auffällig ist das starke Anwachsen der Zahl entarteter Zustände für $k > 2$; die Rechnungen werden dann sehr kompliziert, weil selbst bei Abwesenheit von Mehr-Körper-Kräften die Einzelheiten der Zwei-Körper-Wechselwirkung bekannt sein müssen. Um die störungstheoretischen Rechnungen zu vereinfachen, wird allgemein solch kurze Reichweite der die Entartung aufhebenden Zwei-Körper-Kräfte angenommen, dass sie näherungsweise durch eine δ -Funktion lokalisiert werden können ("δ -Kräfte"). Diese Annahme ist bei den schwereren Kernen besser gültig; das jj-Kopplungsschema, welches wegen der starken Wechselwirkung zwischen Konfigurationen mit $j = \ell + 1/2$ und $j = \ell - 1/2$ (Spin-Wechselwirkung) für leichte Kerne sowieso versagt, ist deshalb hauptsächlich auf schwere und mittelschwere Kerne beschränkt geblieben, z. B. A = 208. Die auf diese Weise errechneten magnetischen Momente sind allgemein in weit besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Werten (vgl. Tab. 15.3).

Bei leichten Kernen muss man jedoch alle möglichen Wechselwirkungen *) zwischen den Nukleonen ausserhalb geschlossener Schalen zulassen. Man hat Kräfte endlicher Reichweite anzusetzen; diese müssen bestehen aus einer Zentralkraftkomponente (die für sich allein genommen ein LS-Kopplungsschema ergäbe) und einem Spin-Bahn-Anteil (der allein genommen durch ein j-j-Kopplungsschema beschreibbar wäre). Dies bedeutet Einführung des sogenannten "intermediären Kopplungsschemas".

---

*) Die Form des Schalenmodells, welche Wechselwirkungen aller Teilchen berücksichtigt, wird oft das "Modell individueller Teilchen" genannt; ein Spezialfall davon ist das intermediäre Kopplungsschema.

Tab. 15.3

Kern	Konfiguration	μ (in Einheiten μ_K)		
		Ein-Teilchen	jj	Exp.
Li^7	$(p_{3/2})^3$	3,79	3,04	3,26
Be^9	$(p_{3/2})^{-3}$	- 1,91	- 1,16	- 1,18
B^{11}	$(p_{3/2})^{-1}$	3,79	3,79	2,69
C^{13}	$(p_{1/2})^1$	0,64	0,64	0,70
N^{15}	$(p_{1/2})^{-1}$	- 0,26	- 0,26	- 0,28
O^{17}	$(d_{5/2})^1$	- 1,91	- 1,91	- 1,89
F^{19}	$(s_{1/2})^{-1}$	2,79	2,79	2,63
Mg^{25}	$(d_{5/2})^{-3}$	- 1,91	- 0,64	- 0,96
Al^{27}	$(d_{5/2})^{-1}$	4,79	4,79	3,64
Cl^{35}	$(d_{3/2})^3$	0,13	0,26	0,82
Cl^{37}	$(d_{3/2})^{-3}$	0,13	0,13	0,68
Sc^{45}	$(f_{7/2})^5$	5,79	5,10	4,76

15.3.10 Schalenmodell mit intermediärer Kopplung

Da das intermediäre Kopplungsschema zwischen extremer jj- und LS-Kopplung liegt, kann man es mit Aussicht auf Erfolg z. B. bei den leichten Kernen Li^6 und B^{10} anwenden. Ersterer hat die Konfiguration: abgeschlossene Schale plus ein 1p-Nukleon; letzterer die Konfiguration: abgeschlossene Schale minus ein 1p-Nukleon, was vom Standpunkt des Schalenmodells analog aussieht. LS-Kopplung würde für beide Kerne im Grundzustand Spin I = 1 vorhersagen, jj-Kopplung ergäbe I = 3. Tatsächlich hat Li^6 einen Spin I = 1 und B^{10} einen Spin I = 3. Das intermediäre Kopplungsschema liefert gute qualitative Übereinstimmung sowohl für die Grundzustände als auch für Niveaus bis zu einer Anregungsenergie von etwa 6 MeV.

Als Beispiel für den bemerkenswerten Grad der Übereinstimmung, welchen man mit dem intermediären Kopplungsschema für leichte Kerne erhält, sind in Fig. 15.7 und 15.8 die experimentell beobachteten Niveaus von B^{10} und Be^{10} dargestellt im Vergleich mit den theoretisch für zwei mögliche Kombinationen der Modellparameter errechneten Werten.

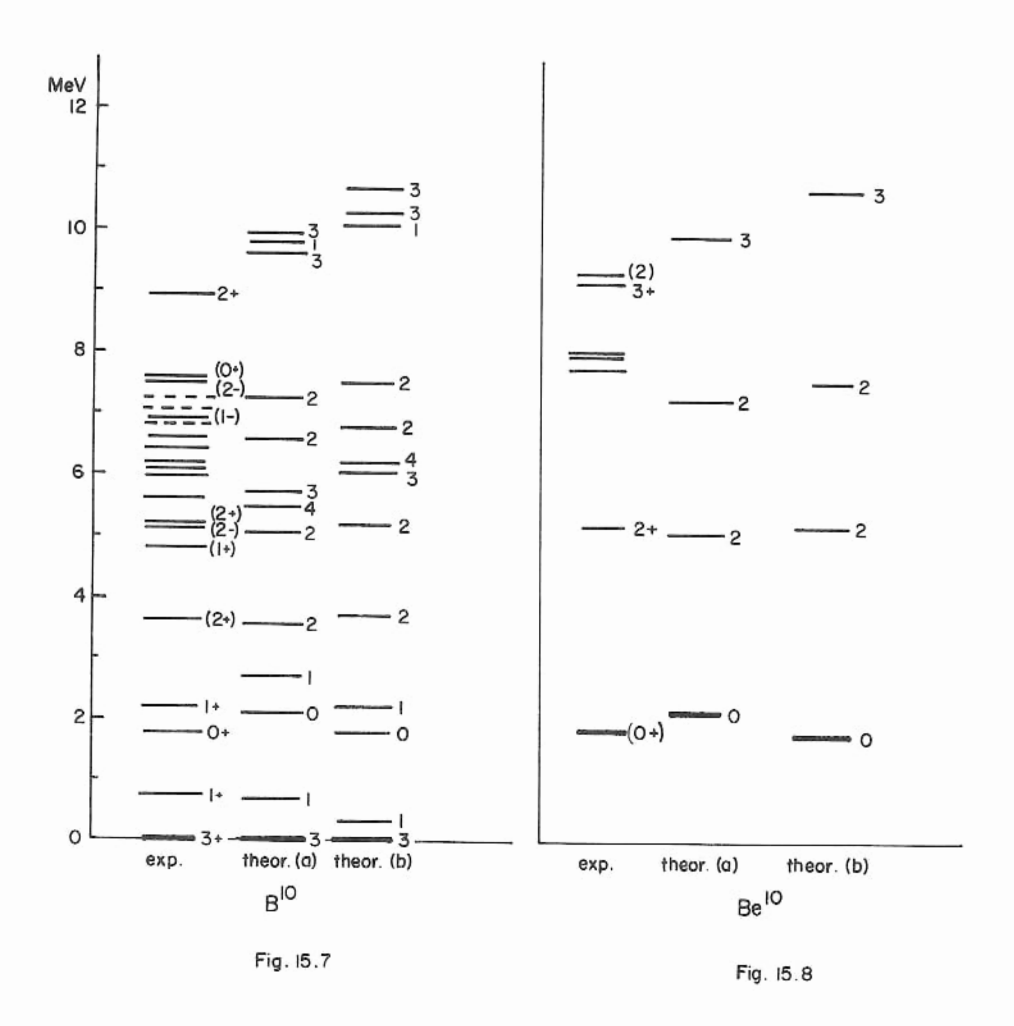


Fig. 15.7

Fig. 15.8

Die Methode der intermediären Kopplung liefert auch für die magnetischen Kernmomente Werte in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Ein bemerkenswertes Beispiel ist B^{11}, wo sowohl LS- als auch jj-Kopplung um etwa 0,5 bis 1,0 Kernmagnetonen höhere Werte als die Experimente liefern, während bei intermediärer Kopplung die Diskrepanz auf nur 0,1 μ_K reduziert wird.

Allgemein werden die meisten Fehler der gröberen Versionen des Schalenmodells durch das intermediäre Kopplungsschema beseitigt, insbesondere bei den leichten Kernen. Unter Umständen müssen auch noch die Tensorkraft und Isospin-Gesichtspunkte berücksichtigt werden. Wegen seiner gegenwärtigen Kompliziertheit kann das Modell jedoch i. a. nur in der Nachbarschaft abgeschlossener Kernschalen verwendet werden. Trotzdem gibt es Anzeichen dafür, dass die Annahme eines kugelförmigen Kerns auf Widersprüche mit den Experimenten (z. B. für elektrische Quadrupolmomente) führt. Diese Widersprüche können nur beseitigt werden, wenn man Deformation des Kerns in Sphäroid- oder Ellipsoid-Form zusammen mit Oberflächen-Schwingungen betrachtet; diese werden im nuklearen "KOLLEKTIV-MODELL" behandelt, welches als nächstes erläutert werden wird. Es existiert eine starke Beziehung zwischen dem Schalenmodell des Kerns und dem Kollektiv-Modell, obwohl das letztere kollektive Bewegung der Nukleonen annimmt, in einem nicht mehr kugelsymmetrischen und zeitlich variablen Potential. Eine ähnliche Beziehung besteht zum α-Teilchen-Modell (vgl. Phys. Rev. 1954, 96, 348; Proc. Phys. Soc. 1956, A69, 600).

15.3.11 Literatur zum Schalenmodell

Feenberg: "Shell Theory of the Nucleus", 1955

Mayer & Jensen: "Elementary Theory of Nuclear Shell Structure", 1955

Elliott & Lane: "The Nuclear Shell Model" in Handbuch der Physik (Flügge), 1957, 39, 241

Elliott: "The Shell Model" in Endt & Demeur: "Nuclear Reactions", 1959, 1, 42

Jensen: "The Shell Model" in Siegbahn: "Beta & Gamma-Ray Spectroscopy", 1955, p. 414.

15.4 Kollektivmodell (Vereinigtes Modell deformierter Kerne)

15.4.1 Kern-Deformation

Selbst eine geringe Abweichung eines Kerns von der Kugelgestalt, wie sie möglicherweise schon durch ein einzelnes Nukleon ausserhalb einer geschlossenen Schale bewirkt werden könnte, wäre in der Lage, die grossen elektrischen Quadrupolmomente zu erklären. Obwohl man z. B. erwarten würde, dass die Voraussagen des Schalenmodells nicht nur für den doppelt-magischen, schweren Kern $_{82}Pb^{208}$ (vgl. Fig. 15.9), sondern auch für seine nächsten Nachbarn wie etwa $_{83}Bi^{209}$ gültig sind, so zeigt der letztere Kern bemerkenswerterweise doch charakteristische Abweichungen vom Schalenmodell-Verhalten, so z. B. beim magnetischen Moment. Das Leuchtproton von Bi^{209} befindet sich entweder im $h_{9/2}$-Niveau, oder, im Falle des Niveau-Überkreuzens, möglicherweise im $g_{9/2}$-Niveau; die betreffenden Werte des magnetischen Moments werden vom Schalenmodell theoretisch zu 2, 6 bzw. 6, 8 Kernmagnetonen errechnet, während der experimentelle Wert 4,08 μ_K beträgt. Andererseits kann die Abweichung von der Kugelform nur gering sein: das elektrische Quadrupolmoment ist nicht gross (Q = -0,4, während der theoretische Ein-Teilchen-Wert $Q_{th} = -0,32$ beträgt), und das Spektrum der Anregungsniveaus entspricht den Vorhersagen des Schalenmodells.

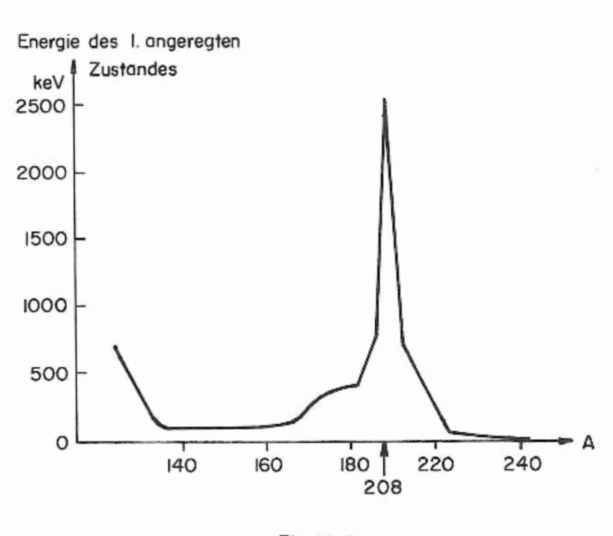


Fig. 15.9

Nicht nur die Existenz von Quadrupolmomenten vom über zwanzigfachen Betrag der Voraussagen des Ein-Teilchen-Modells, sondern z. B. auch nukleare E2 - γ -Übergänge mit gegenüber diesem Modell um einen Faktor 100 kürzerer Lebensdauer unterstützen die Vermutung, dass schwere, nicht-magische Kerne in mehr oder weniger grossem Ausmass deformiert sind. Diese Deformation kann durch relativ geringe Störungen bewirkt werden, da bei den schweren Kernen die oberflächenverkleinernden Oberflächenspannungen nahezu von den oberflächenvergrössernden Coulomb-Kräften aufgehoben werden. Auf diese Weise kann ein Kern in eine Ellipsoid-Form mit longitudinaler Symmetrieachse

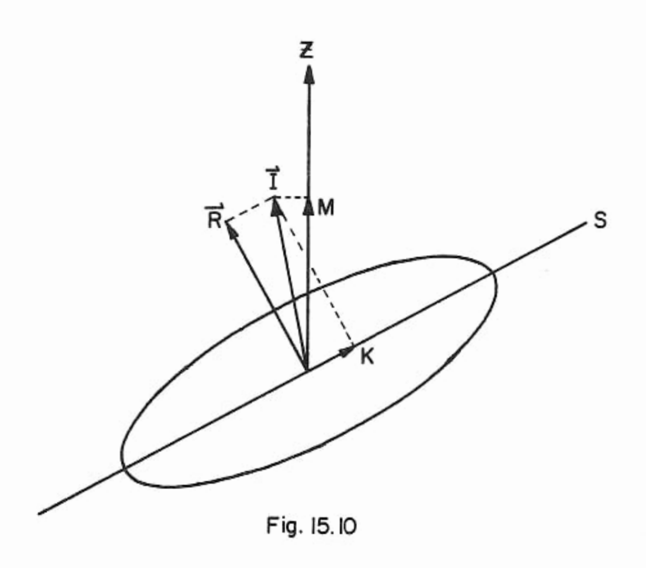


Fig. 15.10

deformiert werden (Fig. 15. 10), oder er nimmt sogar nichtaxiale Gestalt an (ein Vergleich theoretischer und experimenteller Daten für nichtaxiale Kerne wird von Grigoriev und Avotina (Nucl. Phys. 1960, 19, 248) gegeben).

Die Spektra der Anregungsenergien von gg-Kernen können näherungsweise in drei Klassen eingeteilt werden:

(i) Schalenmodell-Spektra ,
(ii) Vibrations-Spektra ,
(iii) Rotations-Spektra .

Die Niveau-Schemata für Spektra der ersten Klasse stimmen mit der Annahme direkter jj-Kopplung der Nukleonen in ungefüllten Schalen für das Modell unabhängiger Teilchen bei magischen oder fast-magischen Kernen überein. Bei Kernen, welche etwas weiter von Konfigurationen geschlossener Nukleon-Schalen entfernt sind, fallen die Spektra in die zweite Klasse und entsprechen der Existenz von kollektiven Schwingungen der Nukleonen im Kern um einen sphärischen Gleichgewichtszustand. In dieser Klasse tritt der zweite angeregte Zustand immer bei ungefähr der doppelten Energie des ersten Anregungszustandes auf. Bei denjenigen gg-Kernen schliesslich, welche weit von Konfigurationen geschlossener Schalen entfernt sind (wie z. B. die seltenen Erden, $155 < A < 185$ und $A > 225$), gehören die Spektra der dritten Klasse an und zeigen auffallende Regelmässigkeiten in den Abständen der Energieniveaus; so liegt z. B. der zweite Anregungszustand (stets 4 +) bei einer Energie von ziemlich genau $\frac{10}{3}$ der Energie des ersten Anregungszustands. Die meisten dieser Spektren werden sehr genau durch die Annahme beschrieben, dass sie Energieniveaus einer Rotationsbewegung permanent deformierter, sphäroidförmiger Kerne um eine Achse R senkrecht zur Symmetrieachse S darstellen. Kompressionsschwingungen (von der Art der Schallwellen) oder kollektive Schwingungen der Neutronen gegen die Protonen (Dipolschwingungen) haben allgemein merklich höhere Frequenzen als die oben behandelten und gehören daher nicht in den im Folgenden diskutierten Bereich der niederenergetischen Kernphänomene.

Aus Platzgründen werden im Folgenden nur kollektive Rotations-Bewegungen behandelt. Details der Vibrationen und des "vereinigten" Modells werden nicht diskutiert. Die wesentlich neuen Aspekte können schon aus der Behandlung der Rotationsbewegung ersehen werden; diese liefern relativ klare Voraussagen, während diejenigen der Vibrationsanregungen nicht so eindeutig sind. Man kann ein "Rotationsniveau" deutlich identifizieren, während die Kennzeichnung eines Niveaus als Vibrationsanregung nicht so sicher ist. Die Energien der PHONONEN, d. h. der Vibrationsquanten, liegen im Bereich von ≈ 100 keV bis 1 MeV und sind nicht mehr klein gegen typische innere Anregungsenergien (1 bis 2 MeV), so dass eine nicht vernachlässigbare Wechselwirkung zwischen intrinsischer Nukleonbewegung und den Vibrationen um den Gleichgewichtszustand des Kerns auftreten kann.

15.4.2 Kernspins

Man muss sich merken, dass in einem nicht mehr kugelsymmetrischen Feld der Gesamtdrehimpuls j einzelner Teilchen nicht länger eine brauchbare Quantenzahl ist; er gehorcht z. B. nicht mehr den üblichen Vektor-Additions- und Erhaltungssätzen. Wenn axiale Symmetrie noch vorhanden ist, so bleibt aber die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Symmetrieachse erhalten: die resultierende Projektion Ω des Kernspins ergibt sich aus der Summe der projizierten Gesamtdrehimpulse der kollektiv wirkenden Nukleonen des Kerns. Für ein einzelnes Nukleon erhält man die Projektion des Gesamtdrehimpulses aus der Summe der Projektionen des Bahndrehimpulses und des Spins: man kann in einem mittleren Kernfeld von nur axialer Symmetrie nicht vom Gesamtdrehimpuls eines Nukleons sprechen, sondern nur von dessen Komponente in Richtung der Symmetrieachse.

Geht man von der Schalenmodellvorstellung aus, wo die Teilchenkonfiguration aus einem einzelnen Teilchen ausserhalb eines ziemlich stabilen kugelsymmetrischen Rumpfs besteht, so kann man je nach der Kopplungsstärke verschiedene Kopplungsschemata konstruieren. Diese sind zusammen mit vielen anderen Eigenschaften des VEREINIGTEN MODELLS (UNIFIED MODEL) in der Originalarbeit von Bohr und Mottelson (Kgl. Dan. Mat.-Fys. Medd. 1953, 27, No. 16) behandelt. Wenn zwischen dem Teilchen und den Oberflächenschwingungen des Rumpfs schwache Kopplung besteht, kann man die störungstheoretische Methode verwenden, wobei als Wellenfunktion des Teilchens diejenige des Schalenmodells benutzt und die quantisierten Oberflächenschwingungen als PHONONEN behandelt werden. Dies ist bei starker Kopplung nicht mehr möglich; dort wird die Kernoberfläche durch den vom relativ energiereichen Leuchtnukleon ausgeübten zentripetalen Druck zu merklich axial-symmetrischer Form deformiert. Dort sind die Verhältnisse ähnlich der Darstellung in Fig. 15.11. Der Gesamtdrehimpuls des Leuchtnukleons präzessiert um die Symmetrieachse S und hat eine konstante Projektion Ω_p. Der Gesamt-Kernspin $\vec{I}$ wird als Summe von $\vec{j}$ und dem Gesamtdrehimpuls $\vec{R}$ der oszillierenden Rumpfoberfläche betrachtet. Das stark gekoppelte System aus Teilchen und Oberfläche rotiert wie ein symmetrischer Kreisel, welcher durch die Quantenzahlen I, K (Komponente von $\vec{I}$ in Richtung der Symmetrieachse) und M (Projektion von $\vec{I}$ auf eine beliebige, raumfeste z-Achse) charakterisiert ist.

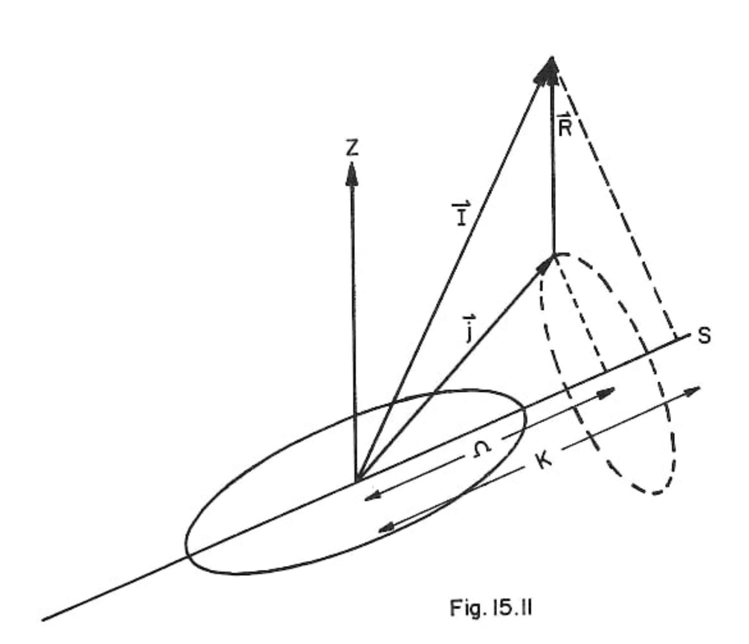


Fig. 15.11

Die Summe der einzelnen Ω_p ergibt das resultierende Ω, welches auf der niedrigsten Rotationsstufe gleich K ist, weil hier $\vec{j}$ in Richtung von S liegt und $\vec{R}$ senkrecht dazu ist, wie in Fig. 15.10 dargestellt. Da die Deformation axialsymmetrisch ist, werden die möglichen Quantenzustände des Kerns aus der Betrachtung der Reflexionssymmetrie gewonnen; so folgt z. B., dass die Parität des aus den Leuchtnukleonen gebildeten Zustands die Parität des Gesamt-Kernzustands bestimmt. Da die Kernwellenfunktion bei starker Kopplung invariant gegen Rotation um 180° ist, folgt für den Grundzustand eines gg-Kerns (I_o = K = Ω = 0, wo I_o der Kernspin im Grundzustand), dass die Spins der niedrigsten Rotations-

energie-Bande nicht ungerade sein können, sondern gegeben sind durch

$$I = 0, 2, 4, 6 \ldots \quad ; \quad \text{gerade Parität.} \tag{15.30}$$

Weiter hat ein uu-Kern (oder ein gg-Kern mit intrinsisch angeregter Partikelstruktur, so dass $\Omega \neq 0$) im Grundzustand den Spin $I_o = K = \Omega$, und die niedrigste Rotationsbande hat

$$I = I_o, \, I_o + 1, \, I_o + 2, \ldots \quad ; \quad \text{Parität wie im Grundzustand .} \tag{15.31}$$

Fig. 15. 12 enthält ein Beispiel eines Niveauschemas, welches einige Rotationsniveaus enthält. Es handelt sich um den gg-Kern $_{72}Hf^{180}$; das 11 + Niveau hat keinen Rotationscharakter, was sich aus der Art der Multipolstrahlung zwischen benachbarten Niveaus zeigen lässt. Den beobachteten Energieniveaus sind in Klammern die nach der im folgenden Abschnitt beschriebenen Methode berechneten Rotationsniveau-Energien beigefügt.

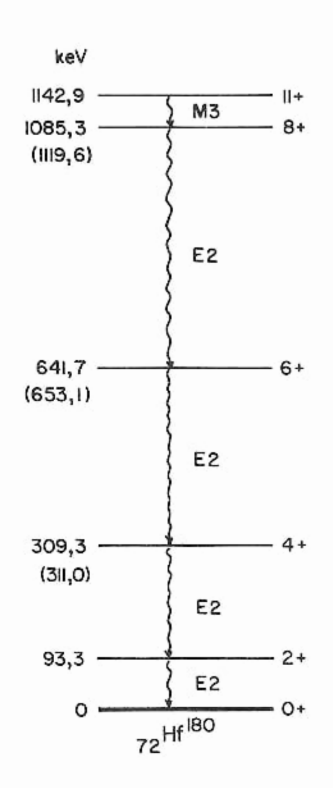


Fig. 15.12

15. 4. 3 Niveauenergien

Das Energiespektrum eines deformierten, aber noch axialsymmetrischen Kerns ist dem eines symmetrischen Kreisels analog: für Sphäroid-Deformation eines als inkompressibler Flüssigkeitstropfen behandelten Kerns ist die Energie eines Rotationszustands vom Kernspin I und Trägheitsmoment J

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2}{2J} \, I \, . \, (I + 1) \; .} \tag{15.32}$$

Daraus ist von besonderem Interesse festzustellen, dass unter Benutzung der einfachen ersten Näherung,

$$\bar{R} = R_o A^{1/3} \tag{15.33}$$

aus (15. 32) folgt, dass die Lage der Rotationsniveaus eine $A^{-5/3}$-Abhängigkeit besitzt.

Bereits 1938 wurden von Teller u. Wheeler die Energiezustände, bedingt durch Rotation eines Kernes, diskutiert, doch schloss man fälschlicherweise, dass niedrig-liegende Niveaus dieser Art nicht vorkommen. Die Behandlung der Rotationsniveaus, 1953 von Bohr und Mottelson durchgeführt, wurde bereits früher durch eingehende theoretische Ansätze von Guggenheimer (Proc. Roy. Soc. 1943, 181A, 169) und die Weiterentwicklung durch Preiswerk (H. P. A. 1949, 22, 372 und 1950, 23, 7) studiert. Der letztere gab einen Überblick über die Kernniveaus, deren Energien mit Hilfe eines Rotationsmodells berechenbar sind. Die $A^{-5/3}$-Abhängigkeit ergab sich aus diesen Vorstellungen unmittelbar; ausserdem wurde ein mittlerer Wert von

$$R_o = 1,37 \text{ f} \tag{15.34}$$

erhalten, trotz der damals ungenauen spektroskopischen Daten. Preiswerk bemerkte, dass die Niveauabstände einiger Kerne mittlerer Masse im Rational-Verhältnis zueinander stehen, und zeigte, dass diese nach einem einfachen, starren, kugelsymmetrischen Modell zu erwarten sind, also direkt aus (15.32) mit I = 1, 2, 3, 4.

Für Kerne um A ~ 70, wo eine Abweichung von der Kugelgestalt vermutet wurde, hat Preiswerk für die Energien der Anregungszustände den allgemeineren Ausdruck

$$E = \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{J_a}\cdot I(I+1) + \left(\frac{1}{J_b} - \frac{1}{J_a}\right)K^2\right] \tag{15.35}$$

angesetzt, der zwei Trägheitsmomente J_a, J_b und eine Quantenzahl K (mit $|K| \leq I$) enthält. Das Auftreten von niederenergetischen γ-Linien (~ keV) in den Spektra von Ta und Seltenen Erden wurde als Bestätigung dieser Vorstellungen angesehen. Sechs Jahre später hat die Arbeit von Bohr u. Mottelson die Richtigkeit von Preiswerks grundlegendem Vorgehen erwiesen, obgleich einige Feinheiten, wie z. B. seine Vorstellung vom Trägheitsmoment, nicht ganz stimmten.

Das Trägheitsmoment eines Kerns der Massenzahl A ist nämlich

$$\boxed{J = \frac{2}{5} A M_n (\Delta R)^2,} \tag{15.36}$$

wo M_n die Nukleonenmasse und ΔR die Differenz zwischen grosser und kleiner Halbachse des Sphäroids ist. (Es wird $\Delta R \ll \overline{R}$ angenommen, $\overline{R}$ der mittlere Kernradius). Wie man aus (15.35) sieht, strebt $J \to 0$, wenn die Kernform sich der Kugelgestalt nähert. Wesentlich ist, dass man die Kernrotation nicht als diejenige eines massiven Ellipsoids betrachtet, weil z. B. $J \not\to 0$ für eine massive Kugel, sondern es handelt sich eher um ein der Hydrodynamik analoges Problem.

In der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten besteht die notwendige Bedingung, dass die Komponente der Durchschnittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit normal zur Wand verschwindet, wenn die Wand fest ist. Bei bewegter Wand muss sie gleich der senkrechten Komponente der Wandgeschwindigkeit sein. Eine in einem rotierenden, kugelförmigen Behälter in Ruhe befindliche Flüssigkeit erfüllt diese Forderung; in einem um eine Zentralachse rotierenden, nichtsphärischen Behälter haben die Wände aber eine normale Geschwindigkeitskomponente, und die Flüssigkeit wird von den Wänden mitbewegt.

Man betrachte den Kern als eine inkompressible Flüssigkeit von der Gestalt eines Ellipsoids mit den Halbachsen der Länge a (senkrecht zu S) und b (parallel zu S). Dann lässt sich zeigen, dass die kinetische Energie des rotierenden Flüssigkeitsellipsoids gegeben ist durch

$$E_{rot} = \frac{M}{10}\,\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}\cdot\omega^2, \tag{15.37}$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Vergleicht man dies mit dem allgemeinen Ausdruck für die kinetische Energie eines rotierenden Körpers mit Trägheitsmoment $\mathcal{J}$ bezüglich der Rotationsachse,

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 , \qquad (15.38)$$

so folgt

$$\mathcal{J} = \frac{M}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} . \qquad (15.39)$$

Das Trägheitsmoment eines massiven Ellipsoids ist

$$\mathcal{J}_0 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2), \qquad (15.40)$$

so dass also das Verhältnis

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \qquad (15.41)$$

im Grenzfall $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ verschwindet (Kugel), und für $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ gleich eins wird.

Ferner folgt aus dem Ausdruck für das Ellipsoidvolumen

$$V = \frac{4}{3} \pi (a^2 b) \qquad (15.42)$$

der MITTLERE RADIUS eines ellipsoidförmigen Kerns

$$\overline{R} = (a^2 b)^{1/3} . \qquad (15.43)$$

Die Energieniveaus für gg-Kerne werden gemäss (15. 32) gegeben zu

$$E_I = \frac{I(I+1) \hbar^2}{2 \mathcal{J}} , \qquad (15.44)$$

woraus im einzelnen folgt

$$E_0 = 0 \;;\; E_2 = \frac{3 \hbar^2}{\mathcal{J}} \;;\; E_4 = \frac{10 \hbar^2}{\mathcal{J}} \;;\; E_6 = \frac{21 \hbar^2}{\mathcal{J}} , \text{u.s.w.} \qquad (15.45)$$

Hier ergeben sich als Verhältnisse der Niveau-Energiedifferenzen

$$(E_2 - E_0) : (E_4 - E_2) : (E_6 - E_4) : \ldots \;::\; 3 : 7 : 11 : \ldots , \qquad (15.46)$$

oder bezogen auf den Grundzustand des Kerns als Basis

$$E_2 : E_4 : E_6 : E_8 : \ldots \;::\; 1 : \frac{10}{3} : 7 : 12 : \ldots \qquad (15.47)$$

Die Experimente zeigen mit dieser theoretischen Voraussage ausgezeichnete Übereinstimmung (Fig. 15. 13) für die Seltenen Erden und schwere, α -aktive Kerne. Für den doppelt-

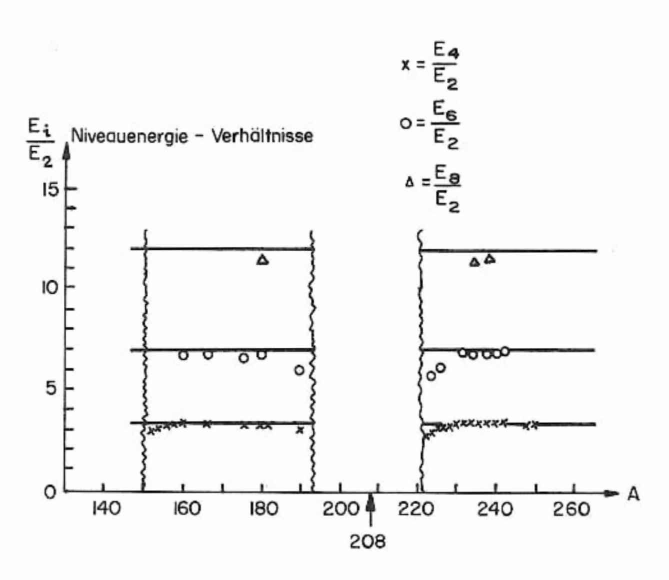


Fig. 15.13

magischen (sphärischen) Kern Pb^{208} existieren keine Rotationsniveaus. An den Rändern des Bereichs der Rotationsspektra findet man experimentell eine systematische Abweichung vom idealen Verhalten, welche durch einen Korrekturterm der Form

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} I(I+1) - \mathcal{B} I^2 (I+1)^2 \qquad (15.48)$$

wiedergegeben wird, analog denjenigen Fällen in der Molekulartheorie, wo Rotations-Vibrations-Kopplung auftritt. Solche Korrekturterme stammen allgemein von schwacher Kopplung der Kernrotation an andere Freiheitsgrade.

Man findet, dass die ersten Anregungsniveaus der Kerne der Seltenen Erden bei etwa 80 keV liegen, woraus $\mathcal{J} = 1,9 \cdot 10^{-47} g.cm^2$ folgt, während die untersten Niveaus der schweren, α -aktiven Kerne bei etwa 40 keV auftreten, was $\mathcal{J} = 3,8 \cdot 10^{-47} g.cm^2$ ergibt.

15. 4. 4 Magnetische Momente

Man kann zeigen, dass das GYROMAGNETISCHE VERHÄLTNIS, d. h. das Verhältnis des magnetischen Kernmoments zum durch die Rotation des Gesamtkerns bewirkten mechanischen Drehimpuls, gegeben ist durch

$$\gamma' = \frac{Ze}{2AM_nc}, \qquad (15.49)$$

(M_n ist die Nukleonmasse), oder in Kernmagneton-Einheiten (μ_K)

$$\boxed{\gamma = \frac{Z}{A}.} \qquad (15.50)$$

Nun ist das gesamte magnetische Moment $\vec{\mu}$ eines rotierenden,deformierten Kerns zusammengesetzt aus einem durch die individuellen Nukleonen im "ruhenden" Kern bewirkten Anteil zuzüglich einem durch die Rotation des Gesamtkerns verursachten Beitrag :

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{n} + \frac{Z}{A} \vec{K}. \qquad (15.51)$$

Hier ist μ_0 die Projektion des magnetischen Moments des unpaarigen Nukleons auf die Symmetrieachse und $\vec{n}$ ein Einheitsvektor in dieser Achse. $\vec{K}$ ist der Drehimpuls der Kernrotation; dieser Vektor liegt parallel zur Symmetrieachse und darf nicht mit der Quantenzahl K verwechselt werden, welche die Projektion von $\vec{I}$ auf die Symmetrieachse darstellt.

Das MAGNETISCHE MOMENT μ des Kerns wird definiert als Projektion von $\vec{\mu}$ in die Richtung des Spins $\vec{I}$,

$$\vec{\mu} = \mu \frac{\vec{I}}{I}, \text{ d.h. } \mu = \frac{(\vec{\mu}.\vec{I})}{I+1} \text{ da } \mu = \frac{(\vec{\mu}.\vec{I})\,I}{(\vec{I}.\vec{I})}. \qquad (15.52)$$

Aus (15.51) folgt

$$(\vec{\mu}.\vec{I}) = \mu_0 (\vec{n}.\vec{I}) + \frac{Z}{A} (\vec{K}.\vec{I}) \qquad (15.53)$$

$$= \mu_0 I + \frac{Z}{A} I \qquad (15.54)$$

unter Verwendung von

$$\vec{I} = \Omega \vec{n} + \vec{K}, \qquad (15.55)$$

woraus sich

$$(\vec{I}.\vec{I}) = I(I+1) = \Omega (\vec{n}.\vec{I}) + (\vec{K}.\vec{I}) \qquad (15.56)$$

$$= \Omega I + (\vec{K}.\vec{I}) \qquad (15.57)$$

ergibt,und weil im Grundzustand $\Omega = I$ ist, gilt

$$(\vec{K}.\vec{I}) = I(I+1) - I^2 = I. \qquad (15.58)$$

Das MAGNETISCHE MOMENT EINES ROTIERENDEN KERNS ist dann gemäss (15. 52) und (15. 54)

$$\boxed{\mu = \left(\mu_0 + \frac{Z}{A}\right) \frac{I}{I+1}.} \qquad (15.59)$$

Für ein "Leuchtneutron" als unpaariges Nukleon gilt $\mu_0 = \pm 1{,}91$, so dass mit der Näherung $Z/A \cong 0{,}45$ für das magnetische Moment von gu-Kernen folgt :

$$\mu = 2{,}4 \frac{I}{I+1} \quad \text{für} \quad j = \ell + \tfrac{1}{2}, \qquad (15.60)$$

$$\mu = -1{,}5 \frac{I}{I+1} \quad \text{für} \quad j = \ell - \tfrac{1}{2}. \qquad (15.61)$$

Bei einem "Leuchtproton" als unpaariges Teilchen ist μ_0 die Summe der Projektionen des intrinsischen magnetischen Moments des Protons ($\mu_p = 2{,}8$) und seines magnetischen Bahnmoments ($I \pm 1/2$) auf die Symmetrieachse

$$\mu_0 = \pm 2{,}8 + (I \mp \tfrac{1}{2}), \qquad (15.62)$$

d. h.

$$\mu_0 = \pm 2{,}3 + I, \qquad (15.63)$$

woraus folgt

$$\mu = 2{,}75 \frac{I}{I+1} + \frac{I^2}{I+1} \quad \text{für} \quad j = \ell + \tfrac{1}{2} \qquad (15.64)$$

$$\mu = -1{,}85 \frac{I}{I+1} + \frac{I^2}{I+1} \quad \text{für} \quad j = \ell - \tfrac{1}{2}. \qquad (15.65)$$

Die magnetischen Momente aller Rotationszustände können in der folgenden Weise beschrieben werden, indem man innere Nukleonbewegungen mit der kollektiven Rotationsbewegung des Gesamtkerns koppelt. Wie in Abschn. 9.7 erläutert, hängt das magnetische Moment μ mit dem Kernspin I durch den nuklearen g - Faktor zusammen :

$$\vec{\mu} = g \vec{I}. \qquad (15.66)$$

Dieser Zusammenhang wurde hier gemäss

$$\vec{\mu} = g_K \vec{K} + g_R \vec{R} \qquad (15.67)$$

verallgemeinert, wobei der erste Term den Beitrag der intrinsischen Bewegung der Nukleonen im Ruhesystem des Kerns zum magnetischen Moment darstellt (und daher durch die Struktur, d. h. das Modell des betreffenden Kerns bestimmt ist), während der zweite Term von der Rotation des Gesamtkerns um eine beliebige, im Laboratorium raumfeste z-Achse stammt. Die Proportionalitätsfaktoren g_K und g_R sind rein phänomenologische Konstanten; obwohl ihr Wert nicht direkt bestimmt werden kann, kann man sie aus den Übergangswahrscheinlichkeiten magnetischer Multipolstrahlung gewinnen (vgl. Abschn. 15.4.6).

Wie man aus Fig. 15.10 ersicht, ist

$$\vec{I} = \vec{K} + \vec{R}, \qquad (15.68)$$

und es folgt weiter, da $\vec{\mu}$ der z-Achse parallel ist, dass

$$\vec{M} = \vec{I}. \qquad (15.69)$$

Das gemessene magnetische Moment μ ist definiert als das Matrixelement

$$\mu = \langle \mu_z \rangle_{M=I} = \langle I, M=I \mid (\mu_z)_{op} \mid I, M=I \rangle. \qquad (15.70)$$

Man kann zeigen, dass für einen Vektoroperator

$$\langle \mu_z \rangle_M = \frac{M \langle \vec{\mu} \cdot \vec{I} \rangle}{I(I+1)} \qquad (15.71)$$

gilt, so dass

$$\mu = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{I} \rangle}{I+1} = \frac{1}{I+1} \left\{ (g_K - g_R) \langle \vec{K} \cdot \vec{I} \rangle + g_R I(I+1) \right\}, \qquad (15.72)$$

wobei das quantenmechanische Quadrat

$$\vec{I}^2 = I(I+1) \qquad (15.73)$$

sowie (15.67) und (15.68) benutzt wurden.

Für die unterste Rotationsbande (Grundzustand) ist

$$K = I \qquad (15.74)$$

und daraus ergibt sich

$$\mu_{\text{Grundzust.}} = \frac{I^2}{I+1} (g_K - g_R) + g_R I = \frac{I}{I+1} (g_R + I g_K). \qquad (15.75)$$

Für einen starren Körper gilt

$$g_R = \frac{Z}{A} \sim 0{,}4. \qquad (15.76)$$

Im Fall eines rotierenden Körpers nimmt g_R Werte an, welche sich davon gelegentlich um eine Grössenordnung unterscheiden.

15.4.5 Elektrische Quadrupolmomente

Das spektroskopisch ermittelte Quadrupolmoment Q charakterisiert die Asymmetrie der durchschnittlichen Ladungsdichte. Bei der theoretischen Behandlung des Kerns als inkompressibler Flüssigkeit tritt dagegen das auf die Kernsymmetrieachse bezogene intrinsische Quadrupolmoment Q_o auf, d.h. das Quadrupolmoment, welches man erhielte, wenn die Symmetrieachse stets in die Richtung des Gesamtdrehimpulses $\vec{I}$ weisen würde:

$$Q_o = \frac{4}{5} Z R_o^2 \frac{\Delta R}{\bar{R}} ; \qquad (15.77)$$

dabei ist ΔR der Längenunterschied der grossen und kleinen Halbachse des Sphäroids, und $\bar{R}$ dessen mittlerer Radius.

Die Beziehung zwischen Q und Q_o hängt von der Art der Kopplung ab; bei starker Kopplung erhält man für hochdeformierte Kerne im Grundzustand (I_o = K)

$$Q = \frac{I_o}{I_o + 1} \cdot \frac{2I_o - 1}{2I_o + 3} \cdot Q_o , \qquad (15.78)$$

woraus $Q < Q_o$ folgt. In Tab. 15.4 sind durch Coulomb-Anregung ermittelte Werte von Q für schwere ug- und gu-Kerne zusammen mit den entsprechenden Q_o-Werten aufgeführt.

Tab. 15.4

Kern	I_o	Q_o (barn)	Q (barn)
$_{63}Eu^{153}$	5/2	7,7	2,5
$_{64}Gd^{155}$	3/2	8,0	1,1
$_{69}Tm^{169}$	1/2	8,0	0
$_{71}Lu^{175}$	7/2	8,2	5,7
$_{73}Ta^{181}$	7/2	6,8	4,3
$_{75}Re^{185}$	5/2	5,4	2,8
$_{92}U^{233}$	5/2	14	≈ 6
$_{92}U^{235}$	7/2	9	≈ 8
$_{94}Pu^{239}$	1/2	8,3	0

Aus den gemessenen Q_o-Werten kann man Näherungsaussagen über die Form des Kerns entnehmen, z.B. den Grad der Deformation, welcher durch den DEFORMATIONSPARAMETER β charakterisiert ist. Die Oberfläche eines sphäroidförmigen Kerns ist definiert durch

$$R = \bar{R} \left[1 + \beta \, Y_{20} (\cos \vartheta) \right] . \qquad (15.79)$$

Hier ist Y_{IM} eine Kugelfunktion, welche die Winkelabhängigkeit der Kernwellenfunktion beschreibt. Es ist

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2} \quad . \qquad (15.80)$$

Dann hat die grosse Halbachse die Länge

$$a = \bar{R}\left(1 + \beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\right). \qquad (15.81)$$

Die kleine Halbachse hat die Länge

$$b = \bar{R}\left(1 - \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\right), \qquad (15.82)$$

woraus mit

$$\frac{a-b}{\bar{R}} \equiv \frac{\Delta R}{\bar{R}} = \frac{3\beta}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4\pi}} = 0,94\beta \qquad (15.83)$$

folgt :

$$\boxed{\beta = 1,06\ \frac{\Delta R}{\bar{R}} \approx 2\ \frac{a-b}{a+b} \quad .} \qquad (15.84)$$

Nimmt man ferner gleichförmige Ladungsverteilung innerhalb des Sphäroids an, so erhält man das intrinsische Quadrupolmoment für gg-Kerne näherungsweise aus

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}}\ Z\bar{R}^2\beta\left(1 + 0,36\,\beta + \ldots\right). \qquad (15.85)$$

Beispiel: Für Z = 60, β = 0,25 ergibt das Kollektivmodell ein intrinsisches Quadrupolmoment der Grössenordnung

$$Q_0 \sim \frac{3}{4} \cdot 60 \cdot 0,25\ \bar{R}^2 \sim 9\,\bar{R}^2, \qquad (15.86)$$

während das Ein-Teilchen-Modell den viel kleineren Wert

$$Q_{E-T} \sim \frac{3}{5}\ \bar{R}^2 \qquad (15.87)$$

ergibt.

Für schwere gg-Kerne findet man $\beta \sim 0,3$, wie man Tab. 15.5 entnehmen kann:

Tab. 15.5

Kern	Trägheitsmoment $\frac{3\hbar^2}{J}$ (keV)	Quadrupolmoment $\lvert Q_0 \rvert$ (barn)	Deformations-Parameter β
$_{60}Nd^{150}$	130	4,8	0,25
$_{62}Sm^{152}$	122	5,7	0,28
$_{64}Gd^{154}$	123	6,3	0,30
$_{66}Dy^{160}$	86	7,8	0,35
$_{68}Er^{164}$	90	7,8	0,33
$_{70}Yb^{170}$	84	7,5	0,30
$_{72}Hf^{176}$	89	7,5	0,29
$_{74}W^{182}$	100	7,1	0,26
$_{76}Os^{186}$	137	5,5	0,20
$_{90}Th^{232}$	52	10	0,25
$_{92}U^{238}$	44	11	0,28

15.4.6 Multipol-Übergangswahrscheinlichkeiten

(a) Übergänge innerhalb einer Rotations-Bande

Alle bekanntgewordenen elektromagnetischen Übergänge innerhalb einer Rotationsbande sind entweder reine E2-Übergänge (für $\lvert\Delta I\rvert = 2$) oder eine Mischung aus M1- und E2-Übergängen (für $\lvert\Delta I\rvert = 1$). Eine bemerkenswerte Eigenschaft der letzteren Übergänge ist es, dass M1- und E2-Komponenten häufig mit vergleichbarer Intensität auftreten (Mischungsverhältnis ≈ 1); auf Grund der Ein-Teilchen-Theorie würde man erwarten, dass wegen ihrer niedrigeren Multipolordnung die M1-Übergänge vorherrschen. Die Kollektiveffekte von vielen Teilchen, die zu merklichen Deformationen und daher zu Rotationsspektren führen können, sind hier auch dadurch ausgezeichnet, dass die für E2-Übergänge massgebenden,individuellen Matrixelemente sich kohärent

addieren und deren Phasen dabei die Gesamtstärke vergrössern, was bei M1-Matrixelementen nicht der Fall ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit für γ-Strahlung der Multipolordnung λ und Energie E_γ kann als Produkt von strukturabhängigen und strukturunabhängigen Termen geschrieben werden:

$$W(\lambda) \equiv \frac{1}{\tau} = \left[\frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda\{(2\lambda+1)!!\}^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2\lambda+1} \right] . \ B(\lambda), \qquad (15.88)$$

wobei der strukturabhängige Term B(λ) als REDUZIERTE ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEIT bezeichnet wird und die Schreibweise

$$(2\lambda+1)!! \equiv (2\lambda+1).(2\lambda-1).(2\lambda-3). \ldots . 5.3.1 \qquad (15.89)$$

verwendet wird. E_γ ist in der Einheit erg ausgedrückt. Die reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten können auf die statischen, elektrischen oder magnetischen Momente der Kernzustände bezogen werden, so dass für E2-Übergänge innerhalb einer Rotationsbande von Zustand (I_i K) nach (I_f K) gilt:

$$B(E2, I_i \rightarrow I_f) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_o^2 \, |< I_i K 20 | I_f K >|^2 . \qquad (15.90)$$

Hier ist der letzte Term ein Clebsch-Gordan-Koeffizient für die Drehimpuls-Kopplung, welcher im Anh. H. 2 behandelt ist.

Man kann also aus der experimentell gemessenen Lebensdauer eines E2-Übergangs B(E2) gemäss (15. 88) berechnen und daraus dann Q_o bestimmen. So wird es möglich, Q und den Deformationsparameter β auf nicht-spektroskopischem Wege zu bestimmen.

Da für aufeinanderfolgende Niveaus der Grundzustands-Rotationsbande in gg-Kernen $\Delta I = 2$ ist, sind die Übergänge zwischen ihnen reine E2-Strahlung; bei ug- und gu-Kernen ist $\Delta I = 1$, so dass es sich im allgemeinen um gemischte M1- und E2-Übergänge handelt.

Für M1-Strahlung gilt, ausgenommen wenn $\Omega = K = 1/2$, für die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit

$$B(M1, I_i \rightarrow I_f) = \frac{3}{4\pi} \mu_K^2 (g_K - g_R)^2 K^2 |< I_i K 10 | I_f K >|^2 . \qquad (15.91)$$

Sie ist hier in Funktion der gyromagnetischen Verhältnisse g_K und g_R dargestellt, welche beziehungsweise die intrinsische Nukleonbewegung und die kollektive Rotation charakterisieren. Man beachte, dass in der untersten Rotationsbande $K = \Omega$. In numerisch bequemer Form hat man (mit E_γ in keV):

$$W(E1) = 1{,}61 . 10^{-16} (E_\gamma)^3 . B(E1) \ sec^{-1}, \qquad (15.92)$$

$$W(E2) = 1{,}23 . 10^{-2} (E_\gamma)^5 . B(E2) \ sec^{-1}, \qquad (15.93)$$

in Einheiten $e^2 . 10^{-48}$ cm^4, und

$$W(M1) = 1{,}78 . 10^4 (E_\gamma)^3 . B(M1) \ sec^{-1}, \qquad (15.94)$$

in Einheiten μ_K^2.

Für einen gemischten (M1 + E2)-Übergang ist die resultierende Übergangswahrscheinlichkeit für γ-Zerfall (reziprok der partiellen mittleren Lebensdauer) die Summe der beiden Multipol-Wahrscheinlichkeiten

$$W(M1 + E2) = W(M1) + W(E2), \qquad (15.95)$$

oder, ausgedrückt als Funktion des MISCHUNGSVERHÄLTNISSES

$$\delta^2 \equiv \frac{W(E2)}{W(M1)} , \qquad (15.96)$$

$$W(M1 + E2) = \left(\frac{1 + \delta^2}{\delta^2} \right) . W(E2) . \qquad (15.97)$$

Die tatsächliche mittlere Lebensdauer ist um einen Faktor $(1 + \alpha)$ kürzer als die partielle, wobei α der totale Konversionskoeffizient ist. Also gilt

$$\frac{1}{\tau} = (1 + \alpha)\left(\frac{1 + \delta^2}{\delta^2} \right) . W(E2) . \qquad (15.98)$$

Man findet unter Verwendung der reduzierten E2-Übergangswahrscheinlichkeit und des Mischungsverhältnisses δ^2 (E_γ in keV):

$$\boxed{B(M1) = 6{,}97 . 10^{-7} \left(\frac{E_\gamma}{\delta} \right)^2 . B(E2) .} \qquad (15.99)$$

(b) Die Beziehung zwischen Anregungs- und Zerfallswahrscheinlichkeiten

Viele Parameter des Kollektiv-Modells werden durch Untersuchung der Coulomb-Anregung bestimmt (vgl. z. B. Martin, Marmier und de Boer, Helv. Phys. Acta 1958, 31, 435), bei welcher elektrische Anregung eines Niveaus und nachfolgender γ-Zerfall stattfinden (Fig. 15. 14).

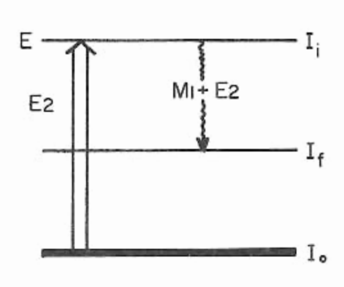


Fig. 15. 14

Um die Übergangswahrscheinlichkeit für den Anregungsprozess abzuleiten, benutzt man die Tatsache, dass zwischen den reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten für den gleichen Prozess einmal als Anregungsübergang und zum andern als hypothetischer Zerfallsprozess betrachtet eine Beziehung besteht, welche die betreffenden Spin-Faktoren enthält :

$$(2I_o + 1) . B(\lambda, I_o \rightarrow I_i) = (2I_i + 1) . B(\lambda, I_i \rightarrow I_o) . \qquad (15.100)$$

Daraus folgt

$$B(\lambda)_{Anr.} = \frac{2I_i + 1}{2I_o + 1} . B(\lambda)_{Zerf.} . \qquad (15.101)$$

Man kann also diesen elektromagnetischen Prozess analog einer hypothetischen γ-γ-Kaskade behandeln (Fig. 15. 15) und auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit für Coulomb-Anregung aus der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für E2-Strahlung errechnen, wenn I_i und I_o, die Spins der angeregten und Grundzustände, bekannt sind.

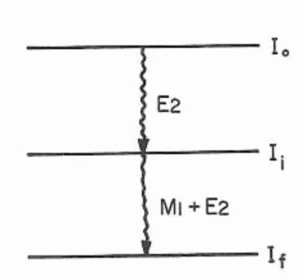


Fig. 15. 15

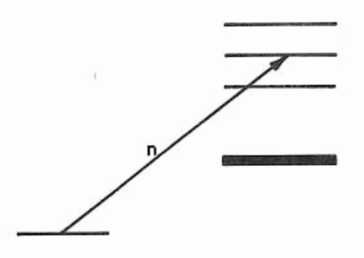


Fig. 15.16

Die obige Beziehung (15. 100) gilt ganz allgemein für beliebige Prozesse und ihre Umkehrungen; man behandelt z. B. Neutronen-Einfang zu einem Zwischenkern (Fig. 15. 16) als einen inversen Neutronen-Zerfall des Zwischenkerns und berücksichtigt die entsprechenden Spin-Faktoren bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten.

(c) Übergänge zwischen Rotationsbanden (K-Auswahlregel)

Die Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Banden genügen gewissen Auswahlregeln, welche entweder zur Untersuchung der Kopplungsschemata oder zur Identifikation der Zustände benutzt werden können.

Für den Übergang vom Zustand (I_i K_i) nach (I_f K_f) in einem ug- oder gu-Kern, wenn wie üblich $\lambda < K_i + K_f$, ist die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für γ -Strahlung der Multipolordnung λ

$$B(\lambda, I_i K_i \rightarrow I_f K_f) = |\langle I_i K_i \lambda \; \Delta K | I_f K_f \rangle|^2 \, |\langle K_f | \mathcal{M}_{\Delta K}(\lambda) | K_i \rangle|^2 , \quad (15.102)$$

(hier ist $\Delta K \equiv K_f - K_i$). Der in diesem Produkt auftretende Clebsch-Gordan-Koeffizient hängt von der Geometrie ab und die Multipol-Matrixelemente von der inneren Struktur des rotierenden Kerns. Dieser letztere Term ist der gleiche für alle Multipolordnungen bei dem (I_i K_i) $\rightarrow$ (I_f K_f)-Übergang, und daher sind die relativen Intensitäten für die jeweiligen λ nur vom ersten Term abhängig:

$$W(\lambda) \sim |\langle I_i K_i \lambda \; \Delta K | I_f K_f \rangle|^2 . \quad (15.103)$$

Die relativen Häufigkeiten (branching ratios) der verschiedenen möglichen γ -Übergänge in einem Kern können also aus dem Verhältnis der betreffenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmt werden. Die Intensitäten hängen jedoch nicht nur von dieser Formel ab, sondern auch von der Drehimpuls-Auswahlregel

$$\boxed{|I_i - I_f| \leq \lambda \leq I_i + I_f} \quad (15.104)$$

und von der sogenannten K-AUSWAHLREGEL (K-SELECTION RULE)

$$\boxed{\Delta K \equiv |K_i - K_f| \leq \lambda .} \quad (15.105)$$

Wenn die Kernwellenfunktion als ein einfaches Produkt von intrinsischen und Rotations-Wellenfunktionen ausgedrückt werden kann, dann ist K eine Bewegungskonstante. In der Praxis kommen zwar Übergänge vor, welche die K-Auswahlregel verletzen, aber sie sind meist viel schwächer als durch ein Ein-Teilchen-Modell vorausgesagt; damit ist gezeigt, dass die Wellenfunktion tatsächlich im wesentlichen solch ein reines Produkt ist.

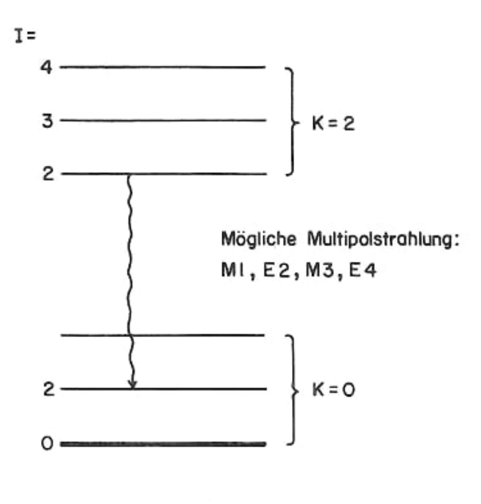


Fig. 15.17

Der Verbotenheitsgrad eines Übergangs gegebener Multipolarität wird dargestellt durch

$$\nu = \Delta K - \lambda \, . \qquad (15.106)$$

Ein Übergang ist K-ERLAUBT wenn $\nu \leq 0$ und K-VERBOTEN wenn $\nu > 0$; z. B. sind für $\Delta K = 2$, wie in Fig. 15. 17 gezeigt, E2-Übergänge K-erlaubt und M1-Übergänge K-verboten. Diese Regel hebt die Voraussage des Ein-Teilchen-Modells auf, dass M1-Übergänge wegen ihrer niederen Multipolordnung mit um einen Faktor 10^3 bis 10^4 grösserer Intensität auftreten als E2-Übergänge, und man findet daher experimentell gemischte (M1 + E2)-Übergänge.

In Extremfällen kann ν für einen bestimmten Übergang so gross werden, dass man einen K-ISOMEREN ZUSTAND erhält, d. h. einen nahezu unendlich langsam zerfallenden Anregungszustand. Z. B. zerfällt bei Hf^{180} der 1142,9 keV, 5,5 h (isomere)-Anregungszustand durch γ -Übergänge, deren Multipolarität aus Experimenten über innere Konversion zu E1 und E3 bestimmt wurde (Fig. 15. 18). Für beide findet man $\Delta K = 9$, woraus $\nu = 8$ bzw. $\nu = 6$ folgt.

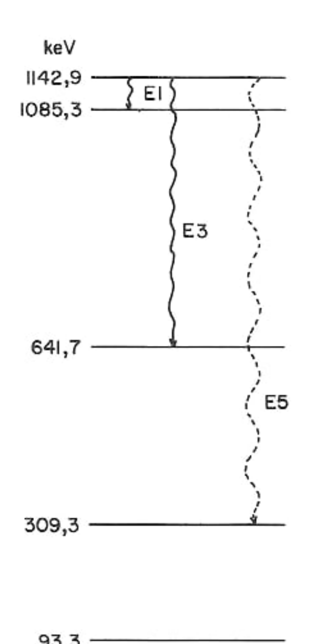


Fig. 15.18

Aus den Messungen der Lebensdauer und der γ - Häufigkeiten schliesst man, dass die K-Auswahlregel die Übergänge im Vergleich zu den Ein-Teilchen-Werten für dieselbe Multipolordnung um Faktoren 10^{16} bzw. 10^9 verlangsamt.

Als allgemeine Näherungsregel findet man, dass ein Zuwachs von ν um eine Einheit eine 30- bis 100-fache Verminderung der Übergangsrate bewirkt.

Die K-Auswahlregel beeinflusst auch α- und β -Zerfall; ein Beispiel dafür ist in Fig. 15. 19 dargestellt.

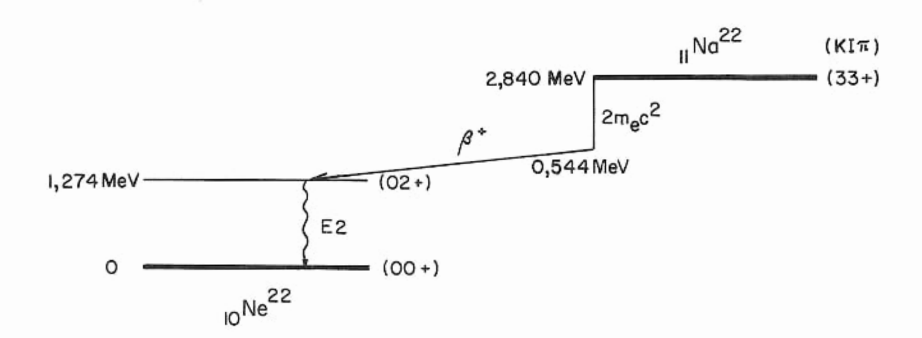


Fig. 15.19

Beim β^+-Zerfall von Na^{22} schliesst man aus Spins und Paritäten auf einen erlaubten Übergang (mit $\lambda = 1$), was durch die "erlaubte" Form des Spektrums bestätigt wird. Aber der hohe ft-Wert für den 544-keV-β-Übergang (log ft = 7, 6) ist etwa das Hundertfache normaler erlaubter Übergänge. Diese Vergrösserung kann auf die K-Auswahlregel zurückgeführt werden, da $\Delta K = 3$ und infolgedessen $\nu = 2$, woraus eine hundertfache Lebensdauer erklärbar ist.

(d) Approximative Auswahlregeln (Asymptotische Quantenzahlen)

Bei sehr grossen Kerndeformationen kann man zwischen Ein-Teilchen-Schwingungen parallel zur Symmetrieachse S und Schwingungen in einer Ebene senkrecht zu S unterscheiden. In diesem Extremfall treten zusätzliche, approximative ASYMPTOTISCHE QUANTENZAHLEN (ASYMPTOTIC QUANTUM NUMBERS) auf, nämlich n_3 (oder n_z), die Oszillatorquantenzahl für Schwingungen parallel zur Symmetrieachse S, und Λ, die Komponente des Bahndrehimpulses in Richtung von S; daneben erscheinen die üblichen Ein-Teilchen-Quantenzahlen Ω (Komponente des Teilchen-Gesamtdrehimpulses in Richtung der Symmetrieachse) und N, die Hauptquantenzahl des Oszillators.

Es sind Auswahlregeln für die asymptotischen Quantenzahlen gefunden worden (Alaga, PR 1955, 100, 432 und Nucl. Phys. 1957, 4, 625), welche nicht exakt gelten, sondern vom Deformationsgrad abhängen. Es hat sich daher eingebürgert, (z. B. beim β-Zerfall) zwischen UNBEHINDERTEN (UNHINDERED) ÜBERGÄNGEN, welche durch die Auswahlregeln aller Quantenzahlen erlaubt werden, und BEHINDERTEN (HINDERED) ÜBERGÄNGEN zu unterscheiden, welche letztere wegen der Ω- und I-Auswahlregeln erlaubt, wegen denjenigen der asymptotischen Quantenzahlen, d.h. N, n_3, Λ aber verboten sind. Man findet, dass im Bereich der Seltenen Erden alle behinderten Übergänge mindestens um einen Faktor 10 langsamer sind als unbehinderte Übergänge.

Die Auswahlregeln für erlaubten β-Zerfall sind :

FERMI-KOPPLUNG (V):	$\Delta N = 0$,	$\Delta n_3 = 0$,	$\Delta\Lambda = 0$,	$\Delta\Omega = 0$,	$\Delta\pi =$ no;	(15.107)
GAMOW-TELLER-KOPPLUNG (A):	" 0,	" 0,	" 0,	" 0, ±1,	" no;	(15.108)
und für M1-γ-Zerfall:	" 0,	" 0,	" 0, ±1,	" 0, ±1,	" no.	(15.109)

Als Beispiel für einen γ-Zerfall kann man die Daten aus Abschn. 11.7 für das Niveauschema des deformierten ($\beta \approx 0,35$) Kerns $_{71}Lu^{175}$ einsetzen, welche von Hatch, Boehm, Marmier und DuMond (PR 1956, 104, 745) bestimmt wurden. In Fig. 15.20 sind die niedrigeren Niveaus eingetragen, zusammen mit den entsprechenden theoretischen Quantenzahlen und den hier interessierenden Übergängen.

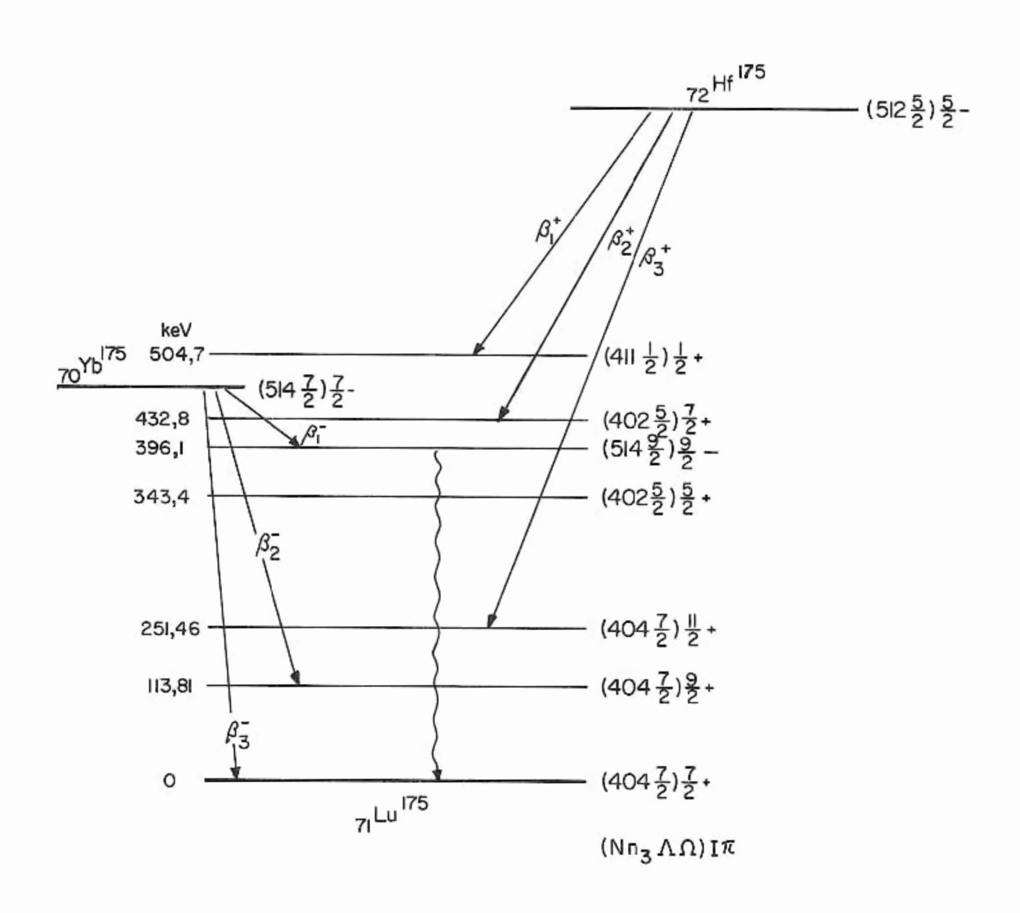


Fig. 15.20

Der ungewöhnlich niedrige Wert von log ft = 4,5 für den erlaubten β_1^--Übergang (statt log ft $\sim$ 5 - 5,5) kann daraus erklärt werden, dass dieser unbehindert ist: die asymptotischen Quantenzahlen (N, n_3, Λ) sind identisch, was weitgehende Überdeckung zwischen dem Anfangs- und Endzustand dieses β-Zerfalls bedeutet. Die β_2^-- und β_3^--Übergänge in Niveaus der Grundzustands-Rotationsbande sind erstverboten, mit normalen log ft-Werten 7,2 bzw. 6,4. Man würde zusätzlich einen β^--Übergang von Yb in das 343,4 keV-Niveau von Lu erwarten: dieser wäre erstverboten und wegen der geringeren zur Verfügung stehenden Energie etwas schwächer als β_2^- und β_3^-. Wegen $\Delta\Lambda = 2$ liefern die asymptotischen Auswahlregeln jedoch einen Hinderungsfaktor von etwa 10^{10} für diesen Zerfall, so dass er experimentell nicht beobachtet wird. Eine ähnliche Überlegung vermag den Zerfall von Hf^{175} durch K-Einfang in die Lu-Grundzustandsbande auszuschliessen. Die Hf-Zerfälle β_1^+, β_2^+, β_3^+ sind jeder durch $|\Delta\Lambda| = 0$ oder 1 charakterisiert; es tritt kein Zerfall in das 396,1 keV-Niveau oder die niederste Rotationsbande von Lu auf ($|\Delta\Lambda| = 2$).

Schliesslich wäre zu bemerken, dass der γ -Zerfall des 396,1 keV-Zustands nicht durch reine E1-Strahlung erfolgt, wie es durch das Ein-Partikel-Modell nahegelegt würde, sondern durch gemischte (E1 + M2)-Strahlung, was mit den früheren Darlegungen bezüglich der Verhinderung von E1-Strahlung übereinstimmt.

15.4.7 Literatur über das Kollektivmodell

Bohr & Mottelson: (Dan. Mat.-Fys. Medd. 1953, 27, No. 16)

Bohr & Mottelson: Siegbahn :"Beta & Gamma-Ray Spectroscopy" 1955, p. 468

Moszkowski: Flügge, Handbuch der Physik 1957, 39, 411

Kerman: Endt & Demeur: "Nuclear Reactions I", 1959, p. 427

Alder, Bohr, Huus, Mottelson & Winther: (R. M. P. 1956, 28, 432)

15.5 Statistisches Modell (Zwischenkern)

15.5.1 Der Zwischenkern

Bohr (Nature 1936, 137, 344) stellte die Hypothese auf, dass im Verlaufe einer Kernreaktion das einfallende Teilchen a und der Targetkern A zu einem ZWISCHENKERN (COMPOUND NUCLEUS) verschmelzen, ähnlich wie die Bildung eines aktivierten Zwischenproduktes während einer chemischen Reaktion. Das einfallende Teilchen wird stark an die anderen Nukleonen des Zwischenkerns gekoppelt, indem seine Energie unter der Gesamtheit der Nukleonen aufgeteilt wird und seine Individualität verloren geht. Damit ist der Zwischenkern ein relativ langlebiger, quasistationärer Quantenzustand. Die Lebensdauer eines Zwischenkerns beträgt ungefähr 10^{-17} sec. und ist so um mehrere Grössenordnungen länger als die Zeit, die ein Nukleon zur Durchquerung des Kerndurchmessers braucht, nämlich ungefähr

$$t \sim \frac{2R}{v} \sim \frac{2R}{c/10} \sim \frac{10^{12}}{3.10^{9}} \sim 10^{-21} \dots 10^{-22} \text{ sec.} \qquad (15.110)$$

Die Zerfallsweise des Zwischenkerns ist nicht durch seine Bildungsweise beeinflusst, d.h. er "vergisst", wie er aufgebaut wurde. Seine Anregungsenergie bestimmt sich aus den Massen von a und A und nach der Geschossenergie (gesamte kinetische Energie im Schwerpunktssystem).

So kann der gleiche Zwischenkern N in dem gleichen angeregten Zustand (N*) aus dem Zusammenstoss verschiedener Teilchen (gewöhnlich unter verschiedenen Geschossenergien) gebildet werden und prinzipiell viele Zerfallsarten aufweisen

$$\begin{array}{ccccc} A + a & \searrow & & \nearrow & X + x \\ B + b & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & Y + y \\ C + c & \nearrow & & \searrow & Z + z \end{array}$$

Die verschiedenen Bildungsweisen werden EINGANGSKANÄLE (ENTRANCE CHANNELS) und die Zerfallsarten AUSGANGSKANÄLE (EXIT CHANNELS) genannt. Zum Beispiel gibt es die folgenden Eingangs- und Ausgangskanäle für den Zwischenkern Zn^{64} :

$$\left.\begin{matrix} Cu^{63} + p \\ Ni^{60} + \alpha \end{matrix}\right\} \longrightarrow Zn^{64*} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} Zn^{63} + n \\ Zn^{62} + 2n \\ Cu^{62} + p + n . \end{matrix}\right.$$

Die Anregungsenergie des Zwischenkerns ist die gesamte Schwerpunktsenergie, die die gesamte kinetische Energie des Schwerpunktes des ganzen Systems, E_s, und die Bindungsenergie E_B des einfallenden Teilchens in dem Zwischenkern umfasst, wenn letzterer sich in seinem Grundzustand befindet.

Man sieht aus Tabelle B. 1, dass die gesamte kinetische Energie im Schwerpunktssystem sich ergibt zu

$$E_s = \frac{1}{2} m_a u_a^2 \left(\frac{m_A}{m_a + m_A} \right)^2 + \frac{1}{2} m_A u_a^2 \left(\frac{m_a}{m_a + m_A} \right)^2 \qquad (15.111)$$

$$= \frac{1}{2} m_a u_a^2 \cdot \frac{m_A}{m_a + m_A} = E_a \cdot \frac{m_A}{m_a + m_A} , \qquad (15.112)$$

in Übereinstimmung mit (1. 10), wobei u_a die Geschossgeschwindigkeit gegen den Targetkern A und E_a die Geschossenergie im Laborsystem ist. Damit beträgt die Anregungsenergie E_N^* des Zwischenkerns

$$E_N^* = E_s + E_B = E_a \cdot \frac{m_A}{m_a + m_A} + E_B , \qquad (15.113)$$

woraus mit einem Wert von $E_B \approx 8$ MeV/Nukleon für mittelschwere Kerne sich ergibt, dass sogar langsame Neutronen ($E_a \rightarrow 0$) einen Zwischenkern in einem noch angeregten Zustand erzeugen können. So hat man die höheren Energieniveaus mit langsamen Neutronen untersucht, obwohl solche Bestimmungen durch die Tatsache eingeschränkt werden, dass ein Kern thermische Neutronen nur als S-Wellen ($\ell = 0$) einfangen kann, wie im Abschnitt 9. 8 gezeigt wurde. Da die Neutronen einen Eigenspin $s = 1/2$ besitzen, können nur die Zustände des Zwischenkerns mit $|\Delta I| = 1/2$ erreicht werden, wo ΔI die Differenz der Kernspins zwischen dem angeregten Zustand des Zwischenkerns und dem Grundzustand des Targetkerns ist. Für schnelle Neutronen dagegen, die eine ganze Reihe von ℓ-Werten haben können, gibt es keine solche Einschränkung für die Untersuchung von Kernniveaus.

Die Hypothese einer Zwischenkernbildung ist höchst nützlich zur Interpretation der sehr schmalen Resonanzen in den Wirkungsquerschnitten für Streuung oder Nukleoneneinfangsreaktionen, wie sie zum Beispiel bei der Streuung von langsamen Neutronen auftreten. Ein Maximum in dem Wirkungsquerschnitt entspricht dem Einfang des einfallenden Neutrons im Target mit genau der Energie, dass der Zwischenkern in einen seiner angeregten Zustände angehoben werden kann. Diese Niveaus sind gewöhnlich sehr "schmal", d. h. sie haben eine verhältnismässig lange Lebensdauer und daher eine scharf definierte Energie ($\sim eV$), so dass ein Resonanzeinfang nur bei wohlbestimmten Energien des einfallenden Neutrons auftreten kann. Die Theorie für solche Resonanzreaktionen wird im Abschnitt 16. 7 behandelt werden.

15.5.2 Gebundene und virtuelle Niveaus

GEBUNDENE NIVEAUS (BOUND LEVELS) eines Kernes, wie etwa eines Zwischenkerns, nennt man solche, deren Anregungsenergie nicht zum Zerfall des angeregten Kernes ausreicht unter Emission von Kernbestandteilen wie n, p, d, α, ... Der Kern fällt von diesen Niveaus nur unter γ-Emission und innerer Konversion in den Grundzustand zurück. Ein Niveau mit einer höheren Anregungsenergie als der niedrigsten Dissoziationsenergie (z. B. für p-Emission) nennt man ein VIRTUELLES NIVEAU (VIRTUAL LEVEL), da ein Zerfall verbunden mit einer Teilchenemission energetisch möglich ist, obwohl dieser durch Auswahlregeln verboten sein könnte.

15.5.3 Energieniveaubreite und -abstand

Man definiert die PARTIELLE BREITE Γ_k eines Niveaus mit dem Ausgangskanal k als

$$\boxed{\Gamma_k = \frac{\hbar}{\tau}}, \qquad (15.114)$$

wo τ die mittlere Lebensdauer vor einem Zerfall des Typus k ist. Die NIVEAUBREITE Γ ist die TOTALE BREITE, definiert als die Summe der partiellen Breiten für die verschiedenen Zerfallsweisen :

$$\Gamma = \sum_k \Gamma_k . \qquad (15.115)$$

Sie entspricht der gesamten Zerfallswahrscheinlichkeit und ist gewöhnlich ungefähr von der Grössenordnung eV. Ein nützlicher Überblick über die reduzierten Niveaubreiten für Kerne bis A = 33 wurde von Lane gegeben (RMP 1960, 32, 519).

Mit wachsender Anregungsenergie nimmt die Niveaubreite zu, erstens, weil mehr Ausgangskanäle zugänglich werden für den Zerfall, und zweitens, weil die Durchlässigkeit der Barrieren für jeden Kanal mit der Energie wächst, und damit die mittlere Lebensdauer erniedrigt wird.

Auf der anderen Seite nimmt der MITTLERE NIVEAUABSTAND D mit höheren Anregungsenergien ab: in den meisten Kernen liegt das erste angeregte Niveau ziemlich hoch über dem Grundzustand ($\sim$ einige hundert keV), und ihm folgen gewöhnlich in gutem Abstand voneinander geschiedene niederenergetische Niveaus. Steigt die Anregungsenergie, so nehmen die Abstände ab und werden für hohe Niveaus sehr klein ($\sim$ 50 eV), und zwar ungefähr für eine Anregungsenergie von 6 MeV, also in dem Bereich der Kernreaktionen.

Für höhere Energien wird das "Independent-Particle"-Modell unbrauchbar: gerade die Bildung eines Zwischenkerns zeigt, dass alle Nukleonen sehr stark miteinander gekoppelt sind, wobei die Anregungsenergie auf das Gesamtsystem in einer Weise übertragen wird, die für eine ins Einzelne gehende Analyse zu kompliziert ist, wo aber statistische oder thermodynamische Überlegungen sehr nützlich sind, wie im Folgenden ausgeführt wird.

15.5.4 Das statistische Gasmodell

Man muss im Auge behalten, dass die Anwendung statistisch-mechanischer Gesetze wegen ihrer alleinigen Gültigkeit für Systeme mit vielen Freiheitsgraden auf Kerne, die aus nur wenigen Nukleonen zusammengesetzt sind, keine ganz befriedigenden Ergebnisse erwarten lässt. In der Praxis nimmt man an, dass die schwereren Kerne ($A \gtrsim 50$) sich wie ein Gas von Protonen und ein Gas von Neutronen verhalten. Entsprechend der statistischen Theorie eines entarteten Fermi-Gases führt man thermodynamische Begriffe ein, wie die Entropie, die Temperatur und die Wärmekapazität des Kernes. Die Emission von Teilchen aus dem Kern betrachtet man dann als einen Verdampfungsprozess.

Ist n die Anzahl von dicht gepackten, hochenergetischen Zuständen mit fast der gleichen Energie E innerhalb eines Energieintervalls ΔE, dann ergibt sich nach der Boltzmannschen Formel für die Entropie des Kernes

$$S = \ln n. \qquad (15.116)$$

Man beachte, dass S eine Funktion der Energie E ist. Unter der Annahme von in erster Näherung äquidistanten Energiezuständen (konstanter Niveauabstand D) in diesem Gebiet erhält man

$$\Delta E = n D \qquad (15.117)$$

und

$$D = \Delta E \cdot e^{-S} = e^{-S + \ln(\Delta E)}. \qquad (15.118)$$

In Übereinstimmung mit der Thermodynamik definiert man die KERNTEMPERATUR T als

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.} \qquad (15.119)$$

Gewöhnlich misst man T in der "dynamischen" Skala mit der Boltzmann-Konstanten k = 1 und der Energie kT einfach gleich T. So gibt man allgemein Kerntemperaturen in MeV an und berücksichtigt zur Umrechnung in gewöhnliche Temperatureinheiten

$$\boxed{1 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} \frac{1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ erg}}{k} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-6}}{1{,}38 \cdot 10^{-16}} = 1{,}16 \cdot 10^{10} \ {}^\circ K.}$$

In Tab. 15. 6 sind Werte der Kerntemperatur als Funktion der Massenzahl A und der Anregungsenergie E aufgeführt.

Tab. 15. 6 : Werte der Kerntemperatur T in MeV

E \ A	80	120	160	200	240
2 MeV	0,61	0,51	0,46	0,43	0,41
5	0,96	0,81	0,73	0,68	0,65
10	1,36	1,15	1,04	0,96	0,91
20	1,93	1,62	1,47	1,36	1,29

Diese Temperatur T in obigen Gleichungen ist die des Restkerns nach der Teilchen-emission. Wenn diese verdampfen, nehmen sie etwas Anregungsenergie mit und "kühlen" so den Kern ab.

Die Temperaturabhängigkeit der Anregungsenergie oder, in anderen Worten, die Wärmekapazität des Kernes erhält man leicht, wenn man annimmt, dass diese wie die eines entarteten Fermi-Gases verläuft, wie in der Elektronentheorie der Metalle bei tiefen Temperaturen, wo die Wärmekapazität C der Temperatur direkt proportional ist :

$$C = a T \qquad (15.120)$$

und damit

$$\boxed{E = \int C \, dT = \int a T \, dT = \frac{a}{2} T^2,} \qquad (15.121)$$

wo a energieunabhängig ist, aber abhängt von den Werten A und Z des "siedenden" Kerns. Damit ist a für einen vorgegebenen Kern eine Konstante, deren Wert nach einer ausführlicheren Behandlung, wie etwa auf Seite 160 ff von Fermi (N. B. : Fermi's a ist die Hälfte von dem hier verwendeten

Wert), sich ergibt zu

$$a^{(p)} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{Z}{\mu_0} \qquad \text{für das Protonen-Gas} \qquad (15.122)$$

und

$$a^{(n)} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(A-Z)}{\mu_0} \qquad \text{für das Neutronen-Gas,} \qquad (15.123)$$

wo μ_0 die maximale kinetische Energie der Nukleonen in dem Potentialtopf ($\mu_0 \sim 21$ MeV) des Kernes ist, wie in Fig. 15.21 gezeigt wird.

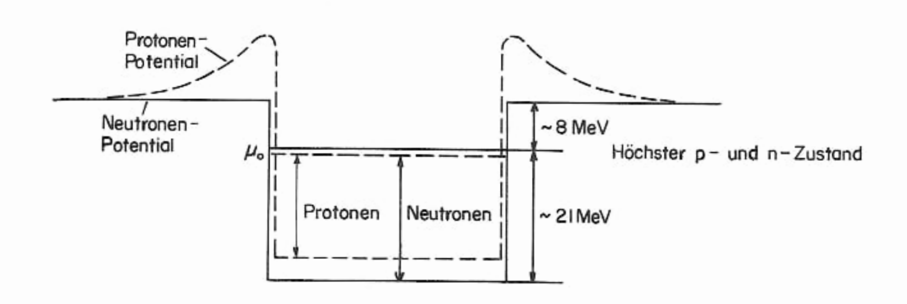


Fig. 15.21

Damit erhält man als Anregungsenergie für Neutronen in der Gegend von A = 100 und Z = 44

$$E^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(A-Z)}{\mu_0} \cdot T^2 = \frac{\pi^2 \cdot 56}{4 \cdot 21} T^2 = 6,6\, T^2 \qquad (15.124)$$

mit $E^{(n)}$ und T in MeV, und für Protonen:

$$E^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{Z}{\mu_0} T^2 = \frac{\pi^2 \cdot 44}{4 \cdot 21} T^2 = 5,2\, T^2. \qquad (15.125)$$

Dann ergibt sich sehr approximativ als totale Anregungsenergie über dem T = 0-Zustand

$$E = E^{(n)} + E^{(p)} = 11,3\, T^2. \qquad (15.126)$$

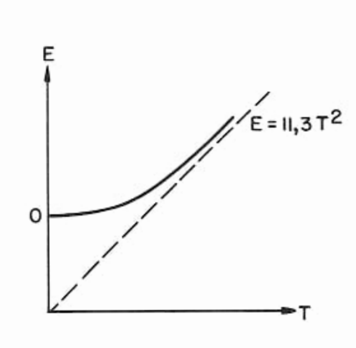


Fig. 15.22

Integriert man die thermodynamische Relation

$$T \frac{\partial S}{\partial T} = C, \qquad (15.127)$$

so erhält man für die Entropie

$$S = aT = \sqrt{2aE}, \qquad (15.128)$$

also mit (15.121)

$$T = \frac{2E}{S}. \qquad (15.129)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch nicht genau genug, um mit (15. 116) die theoretische Niveaudichte n und daraus den Niveauabstand D zu berechnen. Aus anspruchsvolleren theoretischen Überlegungen gewann Bethe die Formel

$$\boxed{\frac{dn_I}{dE} = \frac{2I+1}{1{,}6\, S^4} \cdot e^S \quad MeV^{-1}} \qquad (15.130)$$

für die mittlere Anzahl von Energieniveaus pro MeV für den Kernspin I, wobei man mit dem numerischen Faktor vorsichtig sein sollte wegen der geringen Grösse der statistischen Gesamtheit der Nukleonen.

In Tab. 15.7 werden die theoretischen Werte von $\frac{dn_o}{dE} \equiv \frac{1}{2(2I+1)} \cdot \frac{dn_I}{dE}$ mit den beobachteten Niveaudichten für Si^{28} (p,γ) und Eu^{152} (n,γ) verglichen.

Tab. 15.7

A	E	S	$T = \frac{2E}{S}$	$\frac{dno}{dE}$ theor.	$\frac{dn}{dE}$ exp.
28	11,5 MeV	11,8	2,0 MeV	6	33
152	8 MeV	22,8	0,7 MeV	11 000	50 000

Eine bessere Übereinstimmung kann man wegen der gemachten Approximationen, wegen der Unsicherheit der numerischen Faktoren und der Tatsache, dass I unbestimmt bleibt, nicht erwarten. Hierzu sollte man noch bemerken, dass sich später eine ausgeprägte Schalenstruktur der mittleren Niveauabstände herausstellte (man vergleiche dazu: Newton, Canad. J. Phys. 1956, 34, 804) Bezieht man diese Effekte in die Rechnungen mit ein, dann stimmen die theoretischen Niveaudichten bemerkenswert gut mit den experimentellen Werten überein.

15. 5. 5 Nukleonenverdampfung

Untersucht man die Neutronenemission mit Energien zwischen E_n und $E_n + dE_n$ aus einem angeregten Zwischenkern, so denkt man sich diesen als einen heissen Körper, umgeben von einem Gas verdampfter Neutronen. Im thermodynamischen Gleichgewicht verdampfen gleich viel Neutronen wie absorbiert werden, und die Zahl der letzteren ist leicht zu berechnen.

Die Energieverteilung des Neutronengases um den Kern ist

$$N(E_n)\, dE_n \sim \sqrt{E_n} \cdot e^{-\frac{E_n}{T}}\, dE_n . \qquad (15.131)$$

Dann ist die Zahl der Neutronen aus dem Energieintervall E_n bis $E_n + dE_n$, die in der Zeiteinheit auf die Kernoberfläche auftreffen, proportional zu $N(E_n)$ und der Neutronengeschwindigkeit ($\sim \sqrt{E_n}$ für langsame Neutronen) und somit gegeben durch

$$N'(E_n)\, dE_n \sim E_n \cdot e^{-\frac{E_n}{T}}\, dE_n . \qquad (15.132)$$

Dazu kommt als Faktor die ANHEFTWAHRSCHEINLICHKEIT (STICKING COEFFICIENT) ξ, ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein einfallendes Neutron absorbiert wird und einen Zwischenkern bildet :

$$N''(E_n)\, dE_n \sim \xi(E_n) \cdot E_n \cdot e^{-\frac{E_n}{T}}\, dE_n . \qquad (15.133)$$

Im Gleichgewichtszustand gibt dieser Ausdruck auch die Anzahl der in der Zeiteinheit verdampften Neutronen an. Es gilt

(i) für hohe Energien ($E_n \sim$ MeV) : $\xi \rightarrow 1$.

Unter diesem Ansatz gilt

$$(E_n)_{\text{mittel}} = \frac{\int_0^\infty (E_n)^2 e^{-\frac{E_n}{T}} dE_n}{\int_0^\infty E_n e^{-\frac{E_n}{T}} dE_n} = \frac{2!\ T^3}{1!\ T^2} = 2T . \qquad (15.134)$$

(ii) bei niedrigen Energien (thermische Neutronen) : $\xi \sim \sqrt{E_n}$.

Dann wäre

$$(E_n)_{\text{mittel}} = \frac{\int_0^\infty (E_n)^{5/2} \cdot e^{-\frac{E_n}{T}} dE_n}{\int_0^\infty (E_n)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E_n}{T}} dE_n} = \frac{5}{2} T . \qquad (15.135)$$

Damit liegt die mittlere Energie der verdampften Neutronen zwischen den Grenzen

$$2T < (E_n)_{\text{mittel}} < 2{,}5\ T . \qquad (15.136)$$

Analog kann man die Verdampfung geladener Teilchen, wie etwa Protonen, behandeln, nur muss man die Coulomb-Abstossung mit berücksichtigen. Diese verkleinert die Anheftwahrscheinlichkeit, so dass der Grenzwert $\xi = 1$ erst bei höheren Einfallsenergien erreicht wird.

In Fig. 15. 23 ist die Anzahldichte (unnormiert) N''(E) von Neutronen und Protonen der Energie E dargestellt. Man beachte die verkleinerte Protonenverdampfungsrate auf Grund der Coulomb-Barriere: es gibt weniger niederenergetische Protonen, und das Maximum von N''(E) ist zu höheren Energien verschoben.

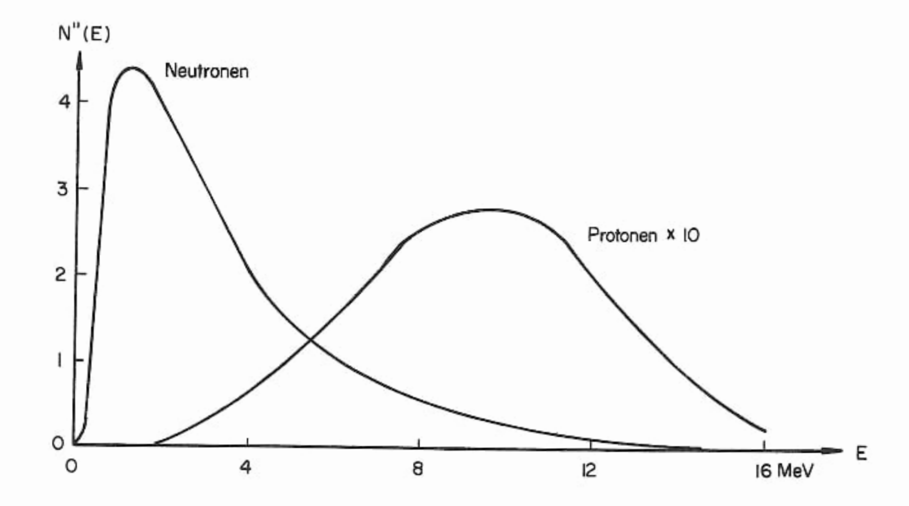


Fig.15.23

Besonders interessant ist die Emission eines Deuterons aus dem Kern, das nur eine relativ geringe Bindungsenergie ($\cong$ 2.2 MeV) hat und wo man erwarten würde, dass dieses verhältnismässig leicht spaltbare Teilchen bei der Verdampfung in seine Bestandteile zerfallen würde. Es stellt sich jedoch heraus, dass die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Deuteron nur von der Temperatur des Restkernes abhängt und im wesentlichen unabhängig von der Bindungsenergie ist. So wäre selbst bei verschwindend kleiner Bindungsenergie die Wahrscheinlichkeit für eine Deuteronenemission noch von Null verschieden.

15.5.6 Kernverdampfung bei hohen Einfallsenergien

Wenn die Einfallsenergie etwa 30 MeV übersteigt, dann werden die Reaktionen mit Emission von mehreren Nukleonen immer komplizierter und lassen sich nicht mehr auffassen als eine Verdampfung von einem Zwischenkern, der sich nach und nach abkühlt. Bei Energien von mehreren hundert MeV wird die mittlere freie Weglänge des einfallenden hochenergetischen Nukleons vergleichbar mit den Kerndimensionen, und der Kern wirkt eher wie ein verdünntes Fermi-Gas. Die Impulsübertragung ist bei einem Stoss von der Grössenordnung $\Delta p \sim \frac{\hbar}{R}$, wobei R die Reichweite der Kernkräfte beschreibt; dieses entspricht einer Energieübertragung von ungefähr 30 MeV. Das einfallende Teilchen verliert also dabei nur relativ wenig seiner Energie und kann unter geeigneten geometrischen Bedingungen (z. B. wenn es zentral den Kern durchquert) mehrere Stösse erleiden, oder es wird eingefangen, wenn es fast seine ganze ursprüngliche Energie verloren hat. Bei jedem Stoss bilden sich lokal "heisse Stellen" dort, wo die Stosspartner jeweils ungefähr eine Energie von 30 MeV aufweisen. Diese können den Kern verlassen, wenn sie sich nahe der Oberfläche befanden und sich in der richtigen Richtung bewegen, doch geben sie sonst in sekundären Prozessen ihre Energie an die "nicht gestossenen" Targetnukleonen ab, was schliesslich zu einem Ausgleich der Energie über den so "erwärmten" Zwischenkern führt. Dieser kühlt sich dann ab, wie es oben bei den niederenergetischen Reaktionen beschrieben wurde.

(a) Kaskaden

Eine "Stern"-Bildung (siehe Fig. 14.1), das heisst die sukzessive Verdampfung von mehreren Nukleonen, ist mit einer Kernreaktion verbunden, die sich nach und nach dem thermischen Gleichgewicht nähert. Der Prozess wird durch ein Teilchen eingeleitet, und in einer Folge von sekundären, tertiären und höheren Stössen diffundiert die Anregungsenergie in analoger Weise zur Wärmeausbreitung durch eine leitende Kugel. Die Kaskaden-Bildung erfolgt in $\sim 10^{-22}$ sec., der "Diffusions"-Vorgang in $\sim 10^{-16}$ sec. Deswegen werden die zwei Vorgänge normalerweise bei theoretischen Überlegungen getrennt behandelt.

Die Kaskade berechnet man gewöhnlich mit Hilfe der semiempirischen Monte Carlo - Methode. Hier untersucht man statistisch den Ablauf der Bewegung des einfallenden Teilchens und aller seiner Stosspartner, wobei man den eigentlichen Ablauf aus einer Reihe von Zufallsentscheidungen (random choices) bestimmt und, falls nicht alle angeregten Nukleonen aus dem Kernvolumen entkommen sind, den ganzen Prozess abbrechen lässt bei einer festgesetzten unteren Energieschwelle, entsprechend der Absorption des einfallenden Teilchens zu einem angeregten Zwischenkern.

Den nuklearen Verdampfungsprozess behandelt man anschliessend gesondert mit Hilfe des statistischen Modells.

(b) Monte Carlo-Methode

Dieser Name erklärt sich daraus, dass in diesem Rechenverfahren Entscheidungen auf Grund von Zufallsentscheidungen getroffen werden, die eine Wahl aus einer Menge von gleichwahrscheinlichen Ereignissen festlegen. In diesem Sinne wurde die Monte Carlo-Methode auch zur approximativen numerischen Lösung des Kaskadenproblems verwendet, wie am Ende dieses Abschnittes gezeigt wird.

Um die Grundidee der Methode anzudeuten, wird zuerst in vereinfachter Form ihre Anwendung auf die Berechnung von Integralen hier gebracht werden. In grösserer Ausführlichkeit werden die verschiedenen möglichen Anwendungen in den Artikeln von Metropolis und Ulam (J. Am. Statist. Ass. 1949, 44, 335) und Bauer (J. Soc. Indust. Appl. Math. 1958, 6, 438) und ebenfalls in den Verhandlungen eines IBM Scientific Computation Seminar, 1949, und eines Symposium on the Monte Carlo Method (Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. 1951, No. 12) gebracht.

(i) Berechnung von Integralen

Die Berechnung von $I \equiv \int_a^b f(x)\,dx$ ist äquivalent zur Bestimmung der Fläche I in Fig. 15.24. Man betrachte hier eine Gerade y = M mit M > f(x) für alle x im Intervall (a, b). Dann ist $I < A \equiv M(b-a)$. (15.137) Nun nehme man wahllos Punkte (x, y) aus dem Rechteck A und stelle fest, wie häufig der gewählte Punkt innerhalb der Fläche I zu liegen kam (G : "Gelingen") im Vergleich zur Anzahl, mit der er ausserhalb von I gefunden wurde (M : "Misserfolg"). Das Verhältnis $\frac{G}{G+M}$ ist die stochastische Variable, für deren Wert man $\frac{I}{A}$ erwartet.

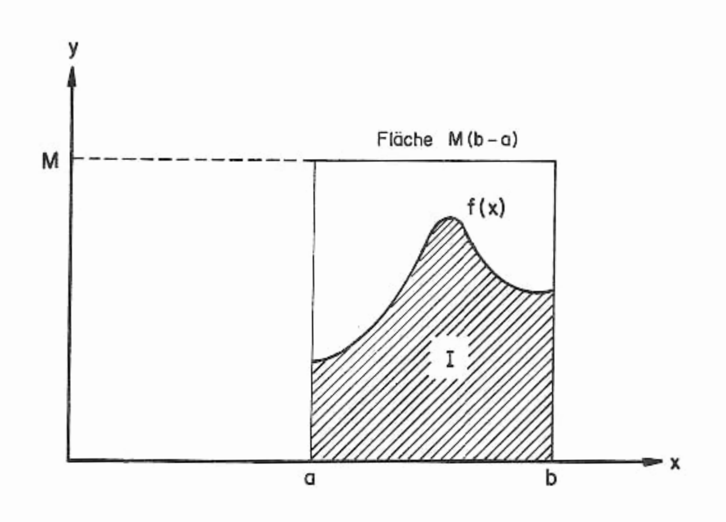


Fig. 15.24

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie hat die Verteilung der G Erfolge in N = G + M Versuchen den Erwartungswert

$$\bar{G} = N \cdot \frac{I}{A} \qquad (15.138)$$

und eine Standard-Abweichung von

$$\Sigma = \sqrt{N \frac{I}{A}\left(1 - \frac{I}{A}\right)} \; . \qquad (15.139)$$

Dann ist die Standard-Abweichung der stochastischen Variabeln $\frac{G}{N}$

$$\Sigma' = \Sigma \cdot N^{-\frac{1}{2}} . \qquad (15.140)$$

Für hinreichend grosse N ist der prozentuale wahrscheinlichste Fehler in $\frac{G}{N}$ ungefähr

$$\varepsilon \cong 67{,}45 \cdot \frac{\Sigma'/\sqrt{N}}{\bar{G}/N} \approx 67{,}45 \cdot \sqrt{\frac{1 - I/A}{N \cdot \frac{I}{A}}} \; . \qquad (15.141)$$

Es ist klar, dass ε mit einer wachsenden Zahl von Versuchen N abnimmt. Ferner nimmt $^{I}/_{A}$ zu, wenn man M verkleinert, womit man eine grössere Genauigkeit mit weniger Versuchen erreichen kann. Bezeichnend für die manchmal ausserordentlich mühseligen Monte Carlo-Berechnungen ist die Tatsache, dass man zur Erhöhung der Genauigkeit um eine Dezimale hundert mal soviel Proben nehmen muss! Man beachte daher die empirische Regel, den grössten Wert auf höchste experimentelle Genauigkeit zu legen und nicht die Monte Carlo-Berechnungen in die Länge zu ziehen, um den statistischen Fehler zu verkleinern.

(ii) Kaskaden

Jetzt wird eine qualitative Beschreibung davon gegeben, wie man Kaskadenphänomene behandelt unter der Annahme, dass das einfallende Teilchen ein Neutron ist.

Der Eintrittspunkt eines Neutrons bekannter Energie in einen Kern mit gegebener Massenzahl und Radius wird bestimmt, indem man eine Zufallswahl unter flächengleichen Ringen senkrecht zur Einfallsrichtung des Neutronenstrahls trifft. Bis zum ersten Stoss soll das Neutron eine Strecke $-\lambda \ln r$ zurückgelegt haben, wobei r eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 für jedes Neutron ist und λ die mittlere freie Weglänge für Streuung in Kernmaterie (d.h. der einfallende Neutronenstrahl wird in einer Schichtdicke δ um einen Faktor $e^{-\delta/\lambda}$ geschwächt). Die mittlere freie Weglänge soll sich dabei aus dem totalen Wirkungsquerschnitt mit freien Nukleonen der gleichen Dichte ergeben und das Ausschliessungsprinzip nicht berücksichtigen. Bei der Berechnung ist auf einem hypothetischen Linienstück der Länge δ, mit $\delta \ll \lambda$, die Stosswahrscheinlichkeit δ/λ. Wieder wird eine Zufallsentscheidung getroffen, ob auf diesem Linienelement ein Stoss stattfinden soll oder nicht. Für einen Zusammenstoss wählt man den Impuls des Stosspartners wahllos aus Intervallen gleicher Wahrscheinlichkeit im Impulsraum, gewogen nach der Abhängigkeit des Stossquerschnitts von dem relativen Impuls. In einem weiteren Rechenschritt bestimmt sich daraus der Streuwinkel ϑ und damit die neue Bewegungsrichtung im Schwerpunktssystem. Jedem physikalisch möglichen Streuwinkel wird eine Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet, die Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens. Dieser Schritt erfordert es, eine Winkelverteilung der gestossenen Teilchen vorzugeben, deren Form durch einen Vergleich der Resultate mit dem Experiment ("trial and error") bestimmt werden kann.

Damit wäre die Richtung des nächsten Linienstückes festgelegt, und wieder trifft man eine Wahl, ob darin ein Stoss stattfinden soll oder nicht. So verläuft die Bahn des Nukleons segmentweise geradlinig, bis es entweder das Kernvolumen verlässt oder ein Stoss vorkommt, wobei dann von neuem das obige Verfahren bei der Streuung durchgeführt wird. Dies setzt man so lange fort, bis man das Nukleon durch den Kern verfolgt hat.

Die Impulsvektoren der verschiedenen Stosspartner sind eindeutig durch den Streuwinkel bestimmt. Daher kann man auch diese Nukleonen durch den Kern verfolgen, bis sie entweder emittiert oder unter einer beliebig vorgegebenen Energieschwelle absorbiert worden sind, wobei man den Einfluss des Ausschliessungsprinzips mit berücksichtigt. In dieser Weise setzt sich das "Bild" einer Kaskade zusammen.

Ein Beispiel eines solchen Ereignisses wird in Fig. 15.25 gezeigt: die Stossfolge für ein Nukleon mit 400 MeV und einem Kern mit A = 100. Hierbei wurde das Nukleon als "Mittel" zwischen Proton und Neutron angesehen unter Annahme einer zusätzlichen Barriere von 4 MeV, der halben Höhe der entsprechenden Coulomb-Barriere, dem 31 MeV "tiefen" Kernpotentialtopf überlagert.

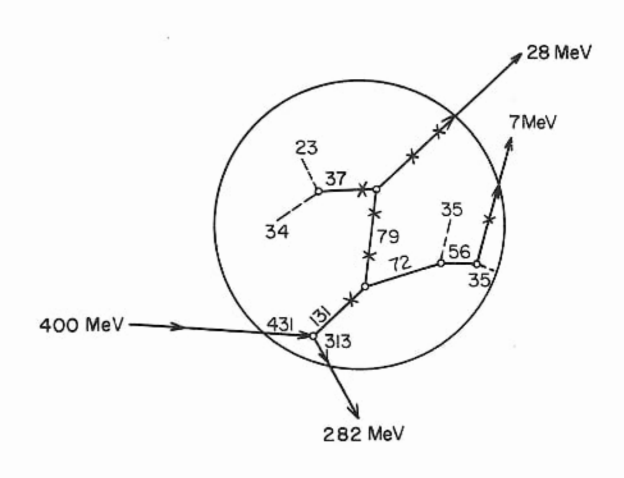


Fig. 15.25

Aufgeführt ist die Bahn jedes Nukleons mit seiner kinetischen Energie, bis es den Kern verlässt oder absorbiert wird, mit einer Einfangsschwellenenergie von 35 MeV. Offene Kreise zeigen, wo tatsächlich Stösse stattgefunden haben, während Kreuze Stösse bezeichnen, die durch das Ausschliessungsprinzip verboten sind. Drei Nukleonen werden emittiert, und zwar alle in Vorwärtsrichtung, mit einer totalen kinetischen Energie von 317 MeV. Bei einer mittleren Bindungsenergie von 8 MeV pro Nukleon bleibt der Kern mit einer Anregungsenergie von ungefähr 66 MeV zurück und ist daher genügend "heiss", um einige Neutronen isotrop zu verdampfen und sich damit auf seinen Gleichgewichtszustand abzukühlen.

(c) Spallation und Verdampfungssterne

Der Zerfall eines angeregten, "heissen" Kernes in seinen Grundzustand unter Teilchenverdampfung ergibt sich auf Grund der Theorie des Zwischenkerns. Da verschiedene Zerfallsweisen aus energetischen Gründen unmöglich werden, geht das System aus einem vorübergehend thermischen Gleichgewichtszustand in einen anderen unter Emission von Teilchen über, die dichte Verdampfungssterne in Kernemulsionen erzeugen können. Im umgekehrten Sinne zeigt Fig. 15.26 Reaktionswirkungsquerschnitte, die für verschiedene Bi^{209} + p-Reaktionen gemessen wurden und klar die Konkurrenz der möglichen Zerfallsweisen für Einfallsenergien bis 30 MeV zeigen. Die Ergebnisse stimmen ausgezeichnet mit den Vorhersagen der statistischen Theorie der konkurrierenden Prozesse überein, wenn man aus der Niveaudichte eine Kerntemperatur von ungefähr 1,1 MeV bestimmt.

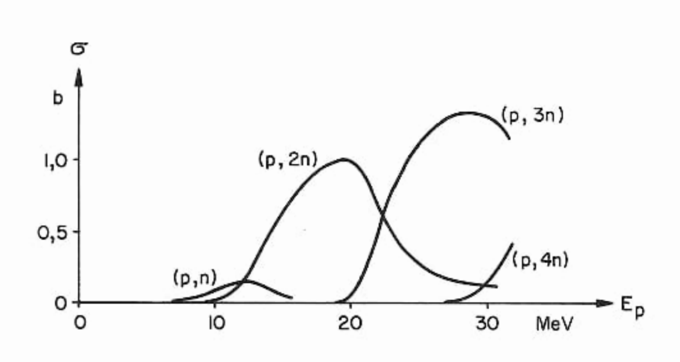


Fig. 15.26

Mit wachsender Anregungsenergie wird die Situation komplizierter: nicht nur ein Produkt oder einige Konkurrenzreaktionen treten nun auf, sondern tatsächlich ganze Reaktionsketten in jeweils mannigfacher Reihenfolge. Zwei hauptsächliche Untersuchungsmethoden gaben diesem Phänomen die charakteristische Nomenklatur: die Auswertung von photographischen Emulsionen und radiochemische Untersuchungen.

In dem ersten Verfahren hält eine photographische Emulsion "nukleare Sterne" fest und lässt so die Zahl der emittierten geladenen Teilchen mit ihrer Ladung, Energie und Winkelverteilung bestimmen. Aus dem Aussehen der Spuren ("prongs") und der dazu gehörigen Kinematik können in vielen Fällen die ionisierenden Teilchen identifiziert werden; man kann sogar Neutronen und andere ungeladene Teilchen durch die von ihnen verursachten sekundären Prozesse unterscheiden.

Das radiochemische Verfahren auf der anderen Seite beruht auf der Trennung der verschiedenen radioaktiven Produkte, die die Geschosse verschiedener Energie in den Targets erzeugen, um Ausbeutekurven für eine Reihe von möglichen Reaktionen zu bekommen. Dieses Verfahren lässt nur totale Änderungen erkennen, zum Beispiel bleibt bei $\Delta A = 4$, $\Delta Z = 2$ die Ungewissheit, ob tatsächlich ein α-Teilchen oder zwei Deuteronen oder ein Protonen- und ein Neutronenpaar emittiert wurden. In der radiochemischen Sprechweise heissen die "Stern"-Prozesse SPALLATIONEN, falls eine ganze Reihe von kleineren Bruckstücken emittiert wurde und nicht nur im Wesentlichen zwei massive Teile wie bei der SPALTUNG (FISSION) .

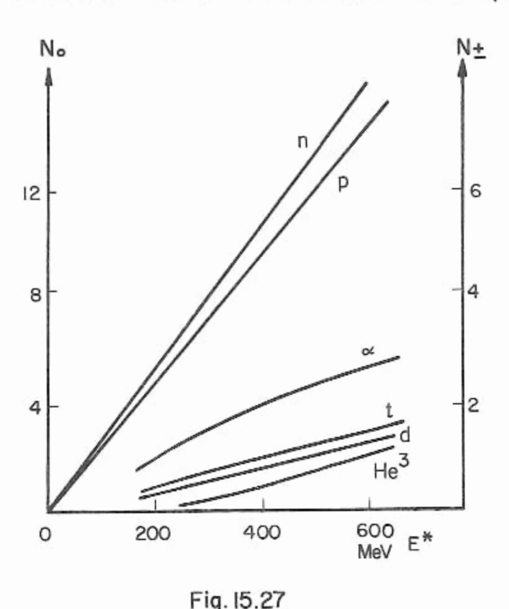


Fig. 15.27

Mit der Spallationstheorie, die in ihrer gegenwärtigen Form höchstens eine rohe Approximation liefert, kann die Zahl der verdampften Teilchen für verschiedene Anregungsenergien berechnet werden. Fig. 15. 27 gibt eine graphische Darstellung der Anzahl ungeladener, bzw. geladener Teilchen, die aus einem A = 100-Kern verdampfen.

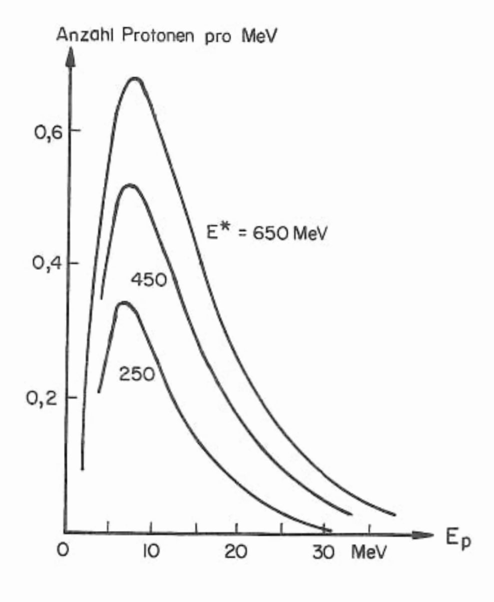


Fig. 15.28

Das theoretische Energiespektrum verdampfter Protonen bei verschiedenen anfänglichen Anregungsenergien ist in Fig. 15. 28 für einen A = 100-Kern aufgeführt.

15. 6 Das optische Modell

15. 6. 1 Einleitung

Die Hypothese einer Zwischenkernbildung vermag die beobachteten engen Resonanzen in den Streuquerschnitten erklären (siehe z. B. Fig. 16. 18), doch führt sie andererseits zu Vorhersagen, die im Widerspruch zu experimentellen Tatsachen stehen. Zum Beispiel würde man nach dem obigen Modell erwarten, dass das Energiemittel (über viele Resonanzen) des Wirkungsquerschnittes monoton als Funktion von A anwachsen würde und fallen als Funktion der Energie E (Fig. 15. 29), wohingegen man tatsächlich "Riesenresonanzen" (giant resonances) (Fig. 15. 30) beobachtet hat mit breiten Maxima in grossen Abständen - eine Erscheinung, die ein Potentialtopf-Modell gut erklären könnte, wie auch das ausgeprägte Maximum des mittleren differentiellen Wirkungsquerschnitts in der Vorwärtsrichtung, das man aus vielen Streureaktionen kennt.

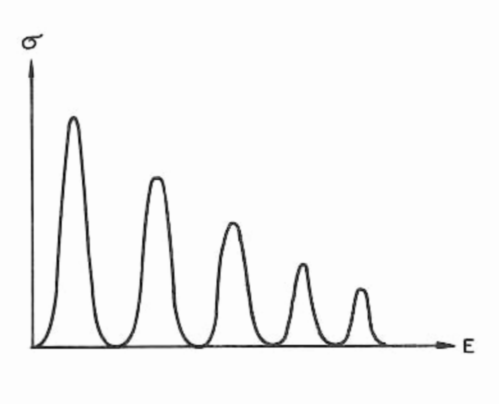


Fig. 15.29

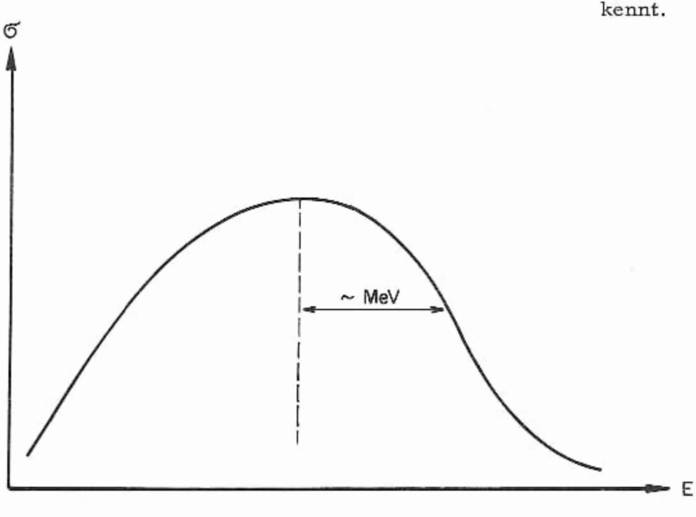


Fig. 15.30

Eine Synthese des Zwischenkernmodells mit dem Schalenmodell wurde von Feshbach, Porter und Weisskopf (PR 1954, 96, 448) vorgeschlagen und konnte mit grossem Erfolg die experimentellen Streutatsachen beschreiben. Obwohl dieses Modell überraschend gut ist, muss man festhalten, dass der Erfolg auf einem rein empirischen Ansatz beruht und weitgehende theoretische Rechtfertigungen noch notwendig sind, um in die physikalischen Grundlagen dieses Modells Einsicht zu gewinnen.

Das OPTISCHE MODELL verbindet die Idee eines Zwischenkerns zur Erklärung der engen Resonanzen mit einem verallgemeinerten Schalenmodell zur Berücksichtigung der Tatsache, dass trotzdem die Identität der einfallenden Teilchen nicht vollständig verloren geht. Der erstere Ansatz gibt einen Kern, der das einfallende Teilchen vollkommen absorbiert - in optischer Analogie: einen Kern mit rein imaginärem Brechungsindex - und der letztere einen Kern ohne Absorption - also mit reellem Brechungsindex. Die Synthese dieser Ideen ergibt einen komplexen Brechungsindex oder, physikalisch, einen komplexen Potentialtopf, dessen Realteil die elastische Streuung beschreibt, während der Imaginärteil die Absorption des Nukleons zu einem Zwischenkern berücksichtigt. So bezweckt das optische Modell, das manchmal auch "CLOUDY CRYSTAL BALL MODEL" genannt wird, nicht die Interpretation einzelner Kernreaktionen, es behandelt vielmehr die Gesamtheit aller möglichen Reaktionen und liefert totale, und nicht partielle, Reaktionsquerschnitte.

15.6.2 Der komplexe Potentialtopf

Das optische Modell beruht also auf der Annahme, dass Kerne für einfallende Nukleonen teilweise durchsichtig sein sollen. Das Kernpotential ist komplex und kann geschrieben werden als

$$V(r) = -(V_0 + iW) = -V_0(1 + i\xi), \tag{15.142}$$

(Hier entspricht ξ einem Proportionalitätsfaktor und nicht der Anheftwahrscheinlichkeit.), wobei man die Abhängigkeit von V_0 und ξ von der Geschossenergie E und der Massenzahl des Targets A unterdrückt. In der frühesten und einfachsten Fassung des optischen Potentials, nämlich der eines Kastenpotentials (Fig. 15.31), erzielte man eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten mit einem V_0 von etwa 42 MeV, was ungefähr den Schalenpotentialen entspricht, und $0{,}03 \lesssim \xi \lesssim 0{,}2$. Aus diesen Werten würde sich für einfallende Neutronen von 3 MeV eine mittlere freie Weglänge der Absorption von ungefähr 24 f ergeben, ein Wert, der heute als reichlich hoch für solche Energien angesehen wird. Inzwischen erkannte man, dass eine scharfe Stufenunstetigkeit des Potentials an der Kernoberfläche einer sehr starken Reflexion, also einer zu grossen Streuung und zu geringen Absorption, entsprechen würde. Daher verwendet man heute gewöhnlich eine abgewandelte Potentialform, die einen kleineren Imaginärteil zulässt. Wie man weiss, ist der komplexe Brechungsindex n für einen rechteckigen Potentialtopf gegeben durch

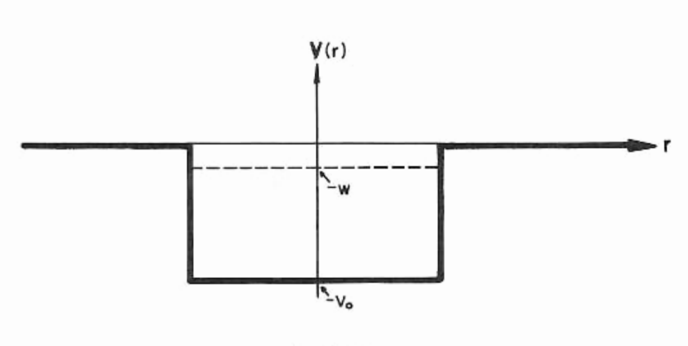


Fig. 15.31

$$n = \sqrt{1 - \frac{V_0 + iW}{E}} \; . \tag{15.143}$$

Untersuchungen von Protonstreuung bei 20 MeV veranlassten Woods und Saxon (PR 1954, 95, 577), eine DIFFUSE OBERFLÄCHE einzuführen, die das optische Potential an der Kernoberfläche abrundet (Fig. 15.32).

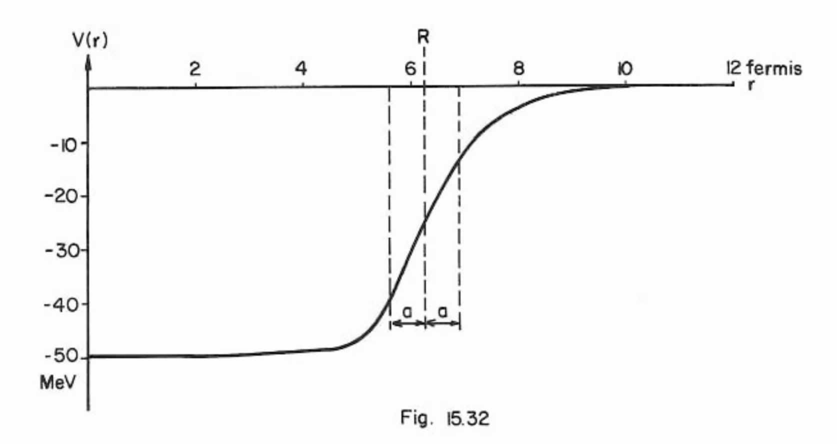


Fig. 15.32

Mathematisch gibt man dem Potential die Gestalt

$$V(r) = - \frac{V_0 + i W}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} , \qquad (15.144)$$

wobei R der RADIUS des Potentials und a ($0,45 \lesssim a \lesssim 0,7$ f) die DIFFUSITÄT (DIFFUSENESS) ist, die zwar mit der Dicke der Oberflächenzone im Zusammengang steht, aber nicht mit ihr identisch ist. Der Formfaktor

$$F(r) \equiv \left[1 + e^{\frac{r-R}{a}} \right]^{-1} \qquad (15.145)$$

ist der eines Eckart-Potentiales mit $R = R_o A^{1/3}$.

Beispielsweise zeigt Fig. 15.33 die überraschende Übereinstimmung von Experiment und Theorie des optischen Modells mit einem Woods-Saxon-Potential der Parameter V_O = 38 MeV, W = 9 MeV, R = 8,24 f und a = 0,49 f bei der elastischen Streuung von 22-MeV-Protonen an Pt. Zum Vergleich wurde auch der Verlauf des differentiellen Wirkungsquerschnitts aufgeführt, wie er aus einem Kastenpotential folgen würde. Wie üblich ist hierbei als Abzisse das Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts zum Rutherford'schen (d.h. klassischen) differentiellen Wirkungsquerschnitt aufgetragen, der in Abschnitt 16.9.3 definiert und diskutiert wird.

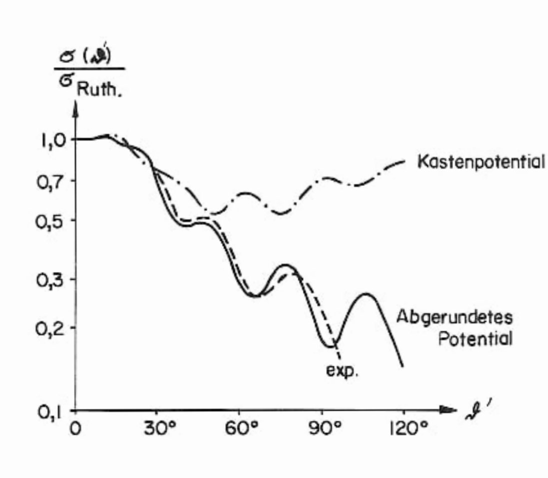


Fig. 15.33

Einen weiteren Zusatz zu dem optischen Potential liefert ein Spin-Bahn-Term, der die Polarisation der gestreuten Teilchen und daher die Spinabhängigkeit des Kernpotentials berücksichtigt. Diesen nimmt man gewöhnlich in der Thomas-Form an:

$$\left(V_s + i W_s \right) \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^2 \frac{1}{r} \cdot \frac{d F(r)}{dr} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{l}), \qquad (15.146)$$

mit den Real- und Imaginärteilen V_s und W_s des Spin-Bahn-Potentials und der reduzierten Masse μ des einfallenden Teilchens. Es besteht Grund zur Annahme $W_s = 0$, wie man aus Fig. 15.34 schliessen könnte, wo die gegenwärtige Kenntnis von den vier Potentialen V_O, W, V_S, W_S als Funktion der Energie E bei festem Radius R und Diffusität a wiedergegeben ist.

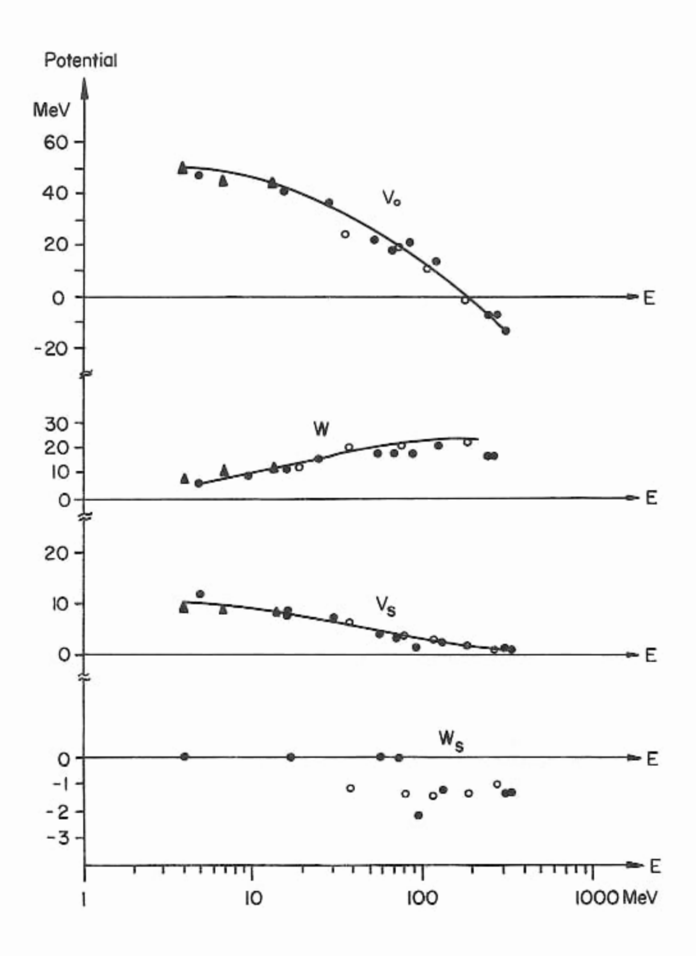


Fig. 15.34

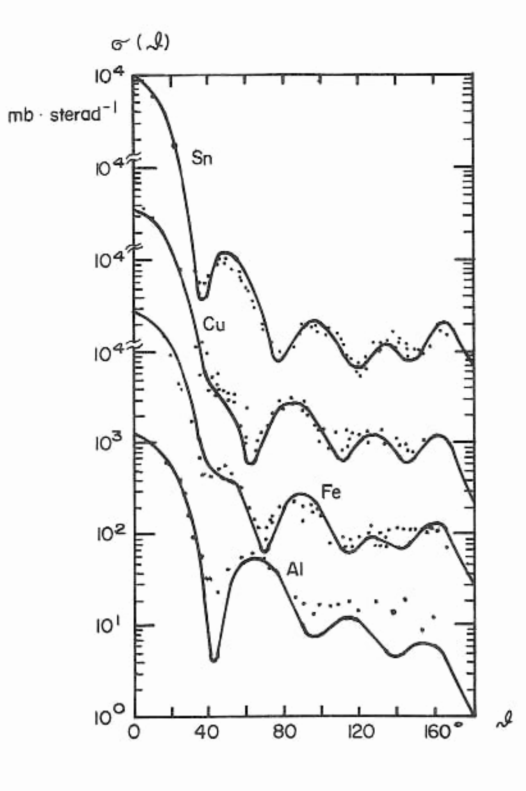


Fig. 15.35

Mit diesen sechs Parametern kann man fast alle experimentellen Daten berücksichtigen. Wie weit die Übereinstimmung geht, zeigt sich beispielsweise in Fig. 15.35, wo die differentiellen Streuquerschnitte für 14 MeV Neutronen an verschiedenen mittelschweren Kernen dargestellt sind.

15.6.3 Mehrdeutigkeiten in der Parameterbestimmung

(a) Konstanz von V_0R^2

Empirisch sind die beiden Parameter V_o und R des optischen Modells so miteinander verknüpft, dass die eindeutige Bestimmung jedes einzelnen aus gegebenen experimentellen Daten Schwierigkeiten bereitet. Vergrössert man einen von beiden, so werden die Maxima des differentiellen Wirkungsquerschnittes nach kleineren Streuwinkeln verschoben. Dabei zeigt es sich bei niedrigen Energien, dass, wenn man einen Parameter unter Festhaltung von V_oR^2 erhöht, die Lage der Maxima und Minima der Winkelverteilungen im Schwerpunktssystem kaum beeinflusst werden. Da die anderen Parameter des optischen Modells selbst wenig Einfluss auf diese Positionen haben, ist die eindeutige Bestimmung des Potentialradius R aus den gemessenen elastischen Streudaten mit Schwierigkeiten verbunden. Ein mögliches, wenn auch mühsames Verfahren ist der Vergleich von theoretischen Kurven für einige fast gleiche Werte von R mit experimentellen Ergebnissen und die Auswahl der am besten passenden Lösung. So sind in Fig. 15.36 für die Streuung von 17 MeV Protonen an Au eine Reihe von berechneten Kurven mit verschiedenen Werten von $R_o = RA^{-1/3}$ aber festem $V_oR_o^{5/2}$ aufgetragen, aus denen man als "besten" Wert $R_o \cong 1,23$ f abliest.

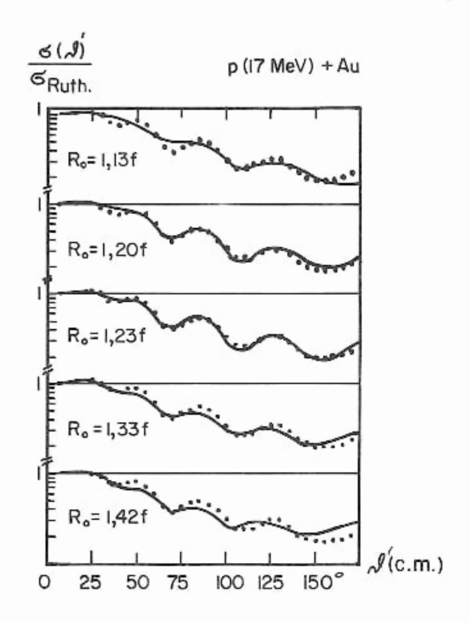


Fig. 15.36

Bei diesen Untersuchungen vernachlässigte man den Spin-Bahn-Term des optischen Potentials, um die Rechnungen zu vereinfachen und mögliche andere Mehrdeutigkeiten zwischen den Parametern leichter zu erkennen (so wurde auf diese Weise ein möglicher Zusammenhang zwischen a und W gefunden).

(b) Wirkungsquerschnitte

Eine andere Art von Mehrdeutigkeit kommt daher, dass die experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitte sich grundsätzlich unterscheiden von den aus dem optischen Modell berechneten.

Wenn man von dem Spin absieht, dann gibt es zwei unabhängige, experimentell definierte Wirkungsquerschnitte,

(i) den ELASTISCHEN Wirkungsquerschnit σ_{el}, der mit dem differentiellen elastischen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{el}(\vartheta)$ verknüpft ist durch

$$\sigma_{el} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \cdot \sigma_{el}(\vartheta) \, d\vartheta , \qquad (15.147)$$

(ii) den REAKTIONS-Querschnitt σ_r (manchmal ungenau UNELASTISCHER Wirkungsquerschnitt genannt), der alle anderen möglichen Prozesse erfasst.

Dann erhält man den TOTALEN Wirkungsquerschnitt σ_{tot} durch Addition :

$$\boxed{\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_r .} \qquad (15.148)$$

Aus theoretischen Berechnungen jedoch lassen sich σ_{el} und σ_r nicht direkt bestimmen. Denn einmal setzt sich der experimentelle elastische Wirkungsquerschnitt σ_{el} tatsächlich aus zwei Termen zusammen, aus $\sigma_{(el)\,shape}$ durch SHAPE-ELASTIC Streuung (Streuung an der "Kernoberfläche") und aus $\sigma_{(el)\,compound}$, dem COMPOUND-ELASTIC Anteil (Streuung nach Eindringen in den Targetkern, d. h. über Bildung eines Zwischenkerns). Eine ausführlichere Diskussion wird in 16. 7. 5 gegeben. Es gilt

$$\boxed{\sigma_{el}(\vartheta) = \sigma_{(el)\,shape}(\vartheta) + \sigma_{(el)\,compound}(\vartheta)\,,} \qquad (15.149)$$

wobei man aus dem Potential des optischen Modells nur $\sigma_{(el)\,shape}$ berechnet und alle Prozesse nicht berücksichtigt, wo einfallende Teilchen über den Zwischenkern wieder in den Eingangskanal emittiert werden.

Auf der anderen Seite kann auch nicht der experimentelle Reaktionsquerschnitt σ_r berechnet werden, sondern der ABSORPTIONS-Querschnitt $\sigma_{absorpt.}$, der definiert ist als

$$\boxed{\sigma_{absorpt.} = \sigma_r + \sigma_{(el)\,compound}\,.} \qquad (15.150)$$

Daraus folgt, dass, während man σ_{el} und σ_r misst, man nur $\sigma_{(el)\,shape}$ und $\sigma_{absorpt.}$ berechnen kann, so dass man einen unzweideutigen Vergleich mit dem Experiment nur für den TOTALEN Wirkungsquerschnitt anstellen kann :

$$\boxed{\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_r = \sigma_{(el)\,shape} + \sigma_{absorpt.}\,.} \qquad (15.151)$$

Das Problem der compound-elastic Streuung kann bis zu einem gewissen Grade folgendermassen gelöst werden: für ein gegebenes optisches Potential (ohne Spin-Bahn-Kopplung) ergibt sich der compound-elastic Wirkungsquerschnitt aus

$$\sigma_{(el)\,compound} = \sigma_{absorpt.} - \sigma_r\,, \qquad (15.152)$$

wo $\sigma_{absorpt.}$ berechnet und σ_r gemessen wird. Dann kann der Anteil der shape-elastic Streuung am gleichen Kernpotential "korrigiert" werden, indem man zu dem berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitt einen Term $\frac{\sigma_{(el)\,compound}}{4\pi}$ addiert unter der Annahme einer isotropen compound-elastic Streuverteilung. Dann vergleicht man

$$\left[\sigma_{el}(\vartheta)\right]_{theor.} \equiv \sigma_{(el)\,shape}(\vartheta) + \frac{1}{4\pi}\,\sigma_{(el)\,compound} \qquad (15.153)$$

mit dem experimentellen Wert von $\sigma_{el}(\vartheta)$. Dieses Verfahren hat sich als konsistent erwiesen und gezeigt, dass über 7 MeV die compound-elastic Streuung sehr klein ist.

15. 6. 4 Oberflächenabsorption

Eine intensive Analyse verschiedener optischer Potentialformen und Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt, dass das imaginäre Potential iW nur in der Nähe der Kernoberfläche ($r \approx R$) von Null verschieden ist. Für leichte Kerne ist W ungefähr doppelt so gross wie für schwere Kerne, was auf eine Oberflächen- und weniger auf eine Volumenabsorption hinweist.

Unter der Annahme von Oberflächenabsorption und Spin-Bahn-Kopplung haben Bjorklund und Fernbach (PR 1958, 109, 1295) Winkelverteilungen für 4, 7, 14 und 26-MeV-Neutronen in ausgezeichneter Übereinstimmung mit experimentellen Messungen berechnet. Fig. 15. 37 zeigt experimentelle und theoretische Winkelverteilungen für elastisch gestreute Neutronen von 7 MeV,

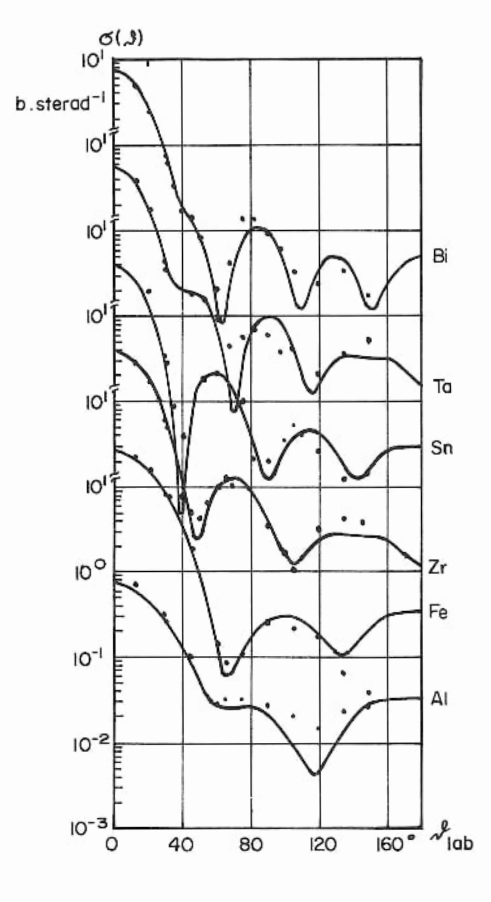


Fig. 15.37

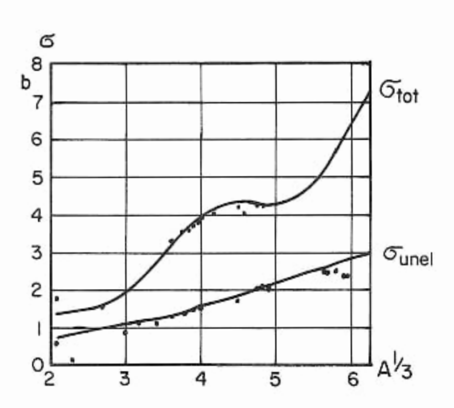


Fig. 15.38

während man aus Fig. 15.38 den hervorragenden Grad von Übereinstimmung von Theorie und Experiment für den totalen und Reaktions-Wirkungsquerschnitt ersieht, und zwar für Neutronen von 7 MeV als Funktion des Kernradius (d.h. der Massenzahl). Die dabei verwendeten optischen Parameter sind von der Massenzahl unabhängig; V_o ist identisch mit dem Schalenmodellpotential (- 47 $\pm$ 3 MeV), R_o = 1,25 f, a = 0,6 f und W = 0.

15.6.5 Streuung geladener Teilchen

Hier muss zu dem normalen optischen Potential noch ein Coulomb-Term $e\,\varphi(r)$ hinzugefügt werden, den man direkt erhält, wenn man eine gleichmässige Ladungsdichte des Radius R annimmt.

Typische Ergebnisse für die elastische Streuung von 17 MeV Protonen entnimmt man Fig. 15.39: diese Kurven wurden ohne Spin-Bahn-Kopplung berechnet, wobei sich bei deren nachträglichen Berücksichtigung eine fast perfekte Übereinstimmung für mittelschwere Elemente zeigt, obwohl sie nicht vollständig die ausgeprägten Diskrepanzen für leichtere Elemente bei grossen Streuwinkeln beseitigen kann.

Leicht modifiziert lässt sich das optische Modell auch auf die Streuung von anderen geladenen Teilchen, wie Deuteronen und α -Teilchen, anwenden.

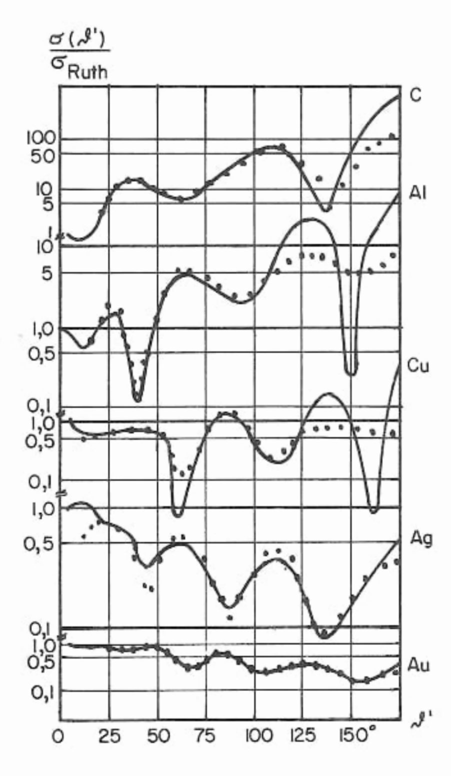


Fig. 15.39

Für die Streuung von α -Teilchen ist die Übereinstimmung von Theorie und Experiment sehr gut bei kleinen Winkeln mit Abweichungen für grosse Streuwinkel, die wenigstens teilweise von der nichtrelativistischen Behandlungsweise der Kernoberfläche herrühren. Typische Ergebnisse für α -Streuung an Ag bei 40 MeV sieht man in Fig. 15.40.

Bei Deuteronen-Streuung hat das optische Potential einen merklich grösseren Radius ($R_0 \approx 1,5$ f) als in allen anderen Anwendungen, aber dies ist mit dem grossen "Deuteronen-Radius" verträglich, der sich aus der niedrigen Bindungsenergie des Deuterons von 2,22 MeV ergibt (siehe Abschn. 18.3).

In Fig. 15.41 werden Experiment und Theorie verglichen für die Streuung von 15-MeV-Deuteronen an Rh. Das optische Potential hat die gewöhnliche Form ohne einen Spin-Bahn-Term. Charakteristisch für die Deuteronenstreuung ist das ausgeprägte Vorwärtsmaximum.

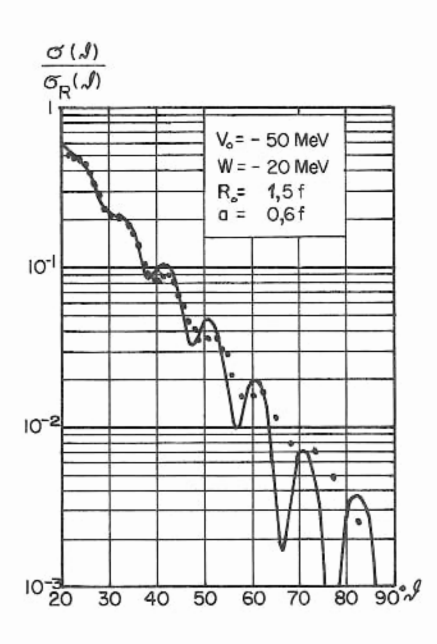


Fig. 15.40

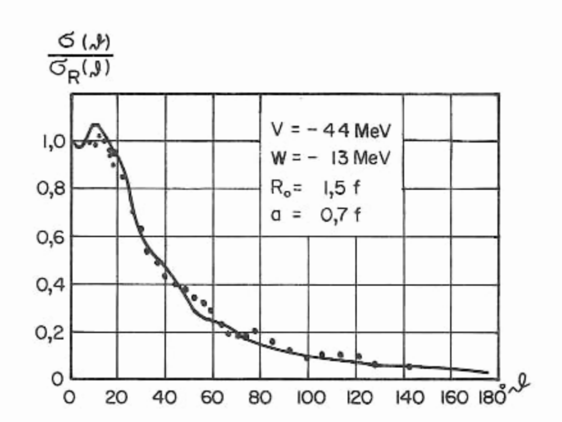


Fig. 15.41

15.6.6 Schlussfolgerungen

Aus einer Analyse des optischen Modells kann man folgende Schlüsse ziehen:

(i) Der Realteil des Zentralpotentials V_o schliesst sich glatt an den Verlauf für das Schalenmodell an, für Neutronen wie für Protonen. Im Mittel ist der Potentialtopf ungefähr 10 MeV tiefer für Protonen als für Neutronen.

(ii) Der Imaginärteil des Zentralpotentials W nimmt mit wachsender Energie zu und scheint nur an der Kernoberfläche von Null verschieden zu sein.

(iii) Der Radiusparameter R_o ist nicht wohlbestimmt; ein wahrscheinlicher Wert für Neutronen und Protonen ist $R_o \cong 1,3$ f. Die Ähnlichkeit des Formfaktors für das optische Modell,

$$F(r) = \left[1 + e^{\frac{r-R}{a}} \right]^{-1} \qquad (15.154)$$

und der Nukleonendichte fällt auf. Letztere kann geschrieben werden als

$$\rho(r) = \rho(0) \left[1 + e^{\frac{r-b}{c}} \right]^{-1} . \qquad (15.155)$$

Ein Vergleich von Analysen des optischen Modells mit denen der Elektronenstreuung (Hofstadter) zeigt, dass $R > b$ und $a > c$ ist mit jeweils Differenzen von etwa 15 %.

Es bestehen zur Zeit Deutungen, dass bei sehr hohen Energien (z. B. bei p-p-Diffraktionsstreuung bei 24 GeV) Übereinstimmung von Experiment und Theorie nur dann zu erreichen ist, wenn man eine Protonenstruktur des "Radius" $0,7 \pm 0,2$ f, mit einem "hard core" (d. h. einem abstossenden Rumpf) des Radius $0,35 \pm 0,1$ f annimmt.

(iv) Die Oberflächendicke ist ebenfalls nicht genau bestimmt; die Diffusität a für Neutronen- und Protonenpotentiale liegt zwischen 0,5 und 0,68 f

(v) Die Spin-Bahn-Kopplung wird wahrscheinlich allein durch ein reelles Potential V_s dargestellt ($W_s = 0$) und ist ein wenig schwächer als die des Schalenmodells.

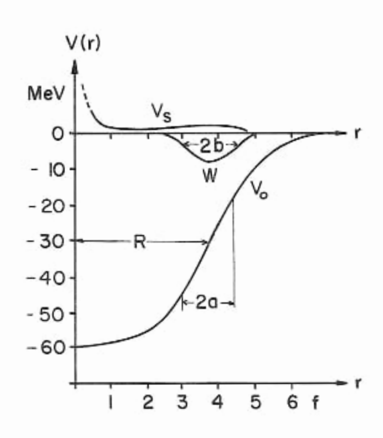


Fig. 15.42

In Fig. 15.42 ist der radiale Verlauf eines typischen optischen Potentials aufgetragen, wie man es zur Beschreibung der Streudaten von 4 MeV Protonen an Al^{27} gebraucht.

16. KERNREAKTIONEN

16.1 Q-Werte für Kernreaktionen

Wie in Abschnitt 1.4 definiert, ist der Q-Wert einer Reaktion, wie z.B. der in Fig. 16.1 gezeichneten Zweikörper-Streuung, die Massendifferenz zwischen den Systemen vor und nach dem Stoss:

$$Q = -[m_3 + m_4 - (m_1 + m_2)]\, c^2 . \qquad (16.1)$$

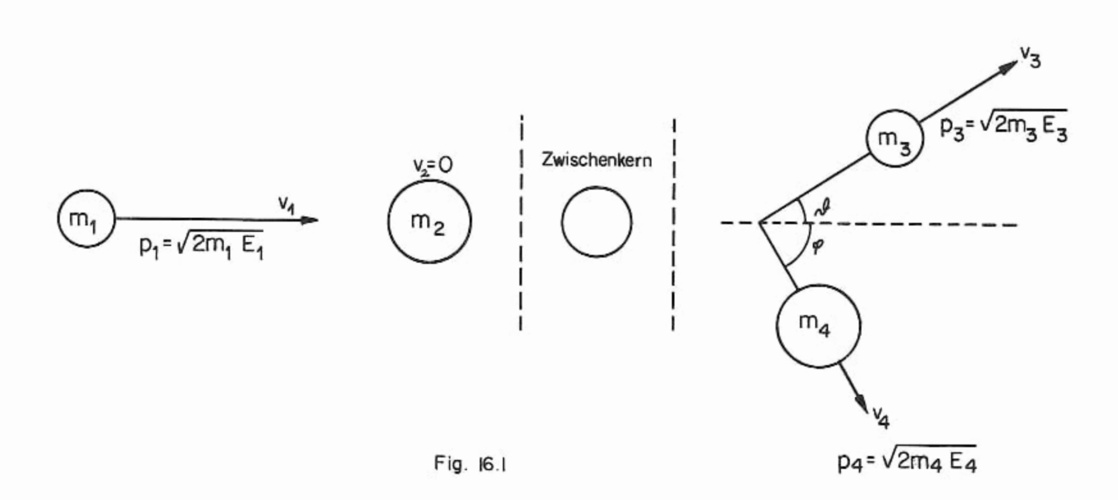


Fig. 16.1

Bei einem nichtrelativistischen Prozess, wo für die kinetische Energie des Teilchens die Ungleichung

$$E_i \ll m_i c^2 \qquad (16.2)$$

gilt, folgt aus dem Energiesatz, dass

$$E_1 + Q = E_3 + E_4 , \qquad (16.3)$$

und andererseits aus der Impulserhaltung in der Einfallsrichtung und senkrecht dazu, dass

$$\sqrt{2 m_1 E_1} = \sqrt{2 m_3 E_3}\, \cos\vartheta + \sqrt{2 m_4 E_4}\, \cos\varphi \;; \qquad (16.4)$$

$$0 = \sqrt{2 m_3 E_3}\, \sin\vartheta - \sqrt{2 m_4 E_4}\, \sin\varphi . \qquad (16.5)$$

Die übliche Form der Q-Gleichung erhält man durch Eliminieren der Energie E_4 und des Richtungswinkels φ des Restkernes aus (16.3), (16.4) und (16.5):

$$\boxed{Q = E_3\left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - E_1\left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - \frac{2\sqrt{m_1 E_1 m_3 E_3}}{m_4}\cos\vartheta ,} \qquad (16.6)$$

wo E_1, E_3 und ϑ alle im Laborsystem gemessen sind. Man sieht, dass für $\vartheta = 90^\circ$ der letzte Term verschwindet. Diese Gleichung hängt nicht vom Reaktionsmechanismus ab und kann bei allen Reaktionen zur Ermittlung der Energiebilanz benützt werden. Sie kann auf den speziellen Fall der elastischen Streuung angewendet werden, wenn man

$$m_1 = m_3 = m \;;\; m_2 = m_4 = M \;;\; \boxed{Q = 0} \quad [\text{N.B.: } E_1 \neq E_3] \qquad (16.7)$$

setzt, und auf unelastische Streuung durch Einsetzen von

$$m_1 = m_3 = m \; ; \quad m_2 = m_4 = M \; ; \quad \boxed{Q = -E^*,} \qquad (16.8)$$

wo E^* die dem Targetkern M mitgeteilte Anregungsenergie bedeutet.

Aus der ursprünglichen Q-Gleichung (16. 6) kann für jede gegebene Reaktion die allgemeine Lösung hergeleitet werden:

$$\sqrt{E_3} = v \pm \sqrt{v^2 + w} \qquad (16.9)$$

mit

$$v \equiv \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1}}{m_3 + m_4} \cos\vartheta \,, \qquad (16.10)$$

$$w \equiv \frac{m_4 Q + E_1 (m_4 - m_1)}{m_3 + m_4} \,. \qquad (16.11)$$

Daraus folgt, dass die kinetische Energie des Restkernes zwischen den zwei durch (16. 9) gegebenen extremen Werten liegen muss. Reaktionen, die energetisch möglich sind, werden durch reelle und positive Werte von $\sqrt{E_3}$ charakterisiert.

Für Reaktionen mit relativistischen Teilchen sind die analoge Q-Gleichung und ihre Lösungen viel komplizierter. Dabei hat sich aber herausgestellt, dass man alle nichtrelativistischen Gleichungen auch auf die relativistische Form transformieren kann, indem man für alle Restmassen m_i den Ausdruck $\left(m_i + \frac{E_i}{2c^2}\right)$ einsetzt, worin E_i die kinetische Energie des Teilchens im Laborsystem bedeutet. So setzt man für Photonen $\frac{E_\gamma}{2c^2}$ anstelle von m_i.

Die relativistische Q-Gleichung z. B. erhält man folgendermassen: Aus der Impulserhaltung im Laborsystem folgt, dass

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \,. \qquad (16.12)$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung und unter Verwendung der relativistischen Beziehung zwischen dem Impuls p und der kinetischen Energie T (wobei man von jetzt an T für die kinetische Energie setzt, um Verwechslungen mit der Totalenergie zu vermeiden)

$$p_i^2 = \frac{T_i^2}{c^2} + 2\, m_i T_i \qquad (16.13)$$

erhält man nach Einsetzen in die Definitionsgleichung für Q

$$Q = \sum_{\substack{\text{End-}\\\text{zustände}}} T_f - \sum_{\substack{\text{Anfangs-}\\\text{zustände}}} T_i \qquad (16.14)$$

und durch Elimination von T_4 die gewünschte RELATIVISTISCHE Q-GLEICHUNG

$$Q = T_3 - T_1 + m_4 c^2 \left\{ \left[1 + \frac{T_1}{m_1 c^2} \left(\frac{m_1}{m_4}\right)^2 \left(2 + \frac{T_1}{m_1 c^2}\right) + \frac{T_3}{m_3 c^2} \left(\frac{m_3}{m_4}\right)^2 \left(2 + \frac{T_3}{m_3 c^2}\right) - \frac{2 m_1 m_3}{m_4^2} \sqrt{\frac{T_1 T_3}{m_1 c^2 \cdot m_3 c^2} \left(2 + \frac{T_1}{m_1 c^2}\right)\left(2 + \frac{T_3}{m_3 c^2}\right)} \cdot \cos\vartheta \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (16.15)$$

Das führt zur nichtrelativistischen Form, wenn $\frac{T_i}{m_i c^2} \ll 1$.

N. B.: Für $Q < 0$ ist die Reaktion ENDOTHERM

und für $Q > 0$ ist die Reaktion EXOTHERM.

Ferner ist die SCHWELLENENERGIE (THRESHOLD ENERGY) einer Reaktion die minimale Geschossenergie, die eine (notwendigerweise endotherme) Reaktion auslösen kann. Es ist wichtig zu beachten, dass an der Reaktionsschwelle beide Reaktionsprodukte m_3 und m_4 die Geschwindigkeit Null im Schwerpunktssystem besitzen; dagegen sind ihre Geschwindigkeiten im Laborsystem von Null verschieden, da sich der Schwerpunkt dort bewegt. Es folgt also, dass die physikalische Bedingung für die Auslösung der Reaktion nicht darin besteht, dass $E_3 = 0$ ist, wie zuweilen fälschlicherweise angenommen wird, sondern darin, dass zum Schluss die Totalenergie im Schwerpunktssystem verschwindet.

Da E_1 die totale, anfängliche kinetische Energie im Laborsystem bedeutet, ist jene im Schwerpunktssystem gleich

$$\boxed{E_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}} \tag{16.16}$$

Um die endgültige totale Energie im Schwerpunktssystem zu erhalten, muss Q zum obenstehenden Werte addiert werden, so dass die Schwellenbedingung lautet:

$$\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} E_1 + Q \right)_{Schw.} = 0 . \tag{16.17}$$

Infolgedessen wird die positive Schwellenenergie im Laborsystem gleich

$$\boxed{(E_1)_{Schw.} = - Q \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} .} \tag{16.18}$$

In diesem Falle werden die Teilchen in der Einfallsrichtung emittiert ($\vartheta = 0$). Die obige Formel enthält eine kleine Approximation, indem die anfängliche Schwerpunktsenergie in der Form (16. 16) angesetzt wird, wobei der Einfluss von Q im Massenverhältnis darin vernachlässigt worden ist. Die exakte Beziehung lautet

$$(E_1)_{Schw.} = - Q \left(\frac{m_3 + m_4}{m_3 + m_4 - m_1} \right) . \tag{16.19}$$

Sie reduziert sich auf (16. 18), wenn man $m_2 c^2 \gg Q$ setzt. Daraus folgt, dass im Grenzfall

$$m_1 , m_3 \ll m_2 , m_4$$

$$(E_1)_{Schw.} \approx |Q| \tag{16.20}$$

wird.

Schliesslich kann man die Q-Gleichung im Fall von Reaktionen mit "verschwindender" Geschossenergie prüfen, wie solchen, bei denen thermische Neutronen eingefangen werden. Dabei brauchen nur exotherme Reaktionen berücksichtigt zu werden, da bei endothermen Reaktionen die kleine Geschossenergie niemals den Massenzuwachs "liefern" kann, der durch den Q-Wert der Reaktion gegeben ist. (Mathematisch heisst das: Wenn $Q < 0$ und $E_1 \to 0$, so folgt daraus, dass $v^2 + w < 0$, also $\sqrt{E_3}$ imaginär wird.)

Für $Q > 0$ und $E_1 \to 0$ folgt, dass

$$v \longrightarrow 0 , \qquad w \longrightarrow \frac{Q\, m_4}{m_3 + m_4} , \tag{16.21}$$

so dass $E_3 = Q \cdot \frac{m_4}{m_3 + m_4}$, unabhängig von der Ausfallsrichtung ϑ . Man hat dann

$$E_3 + E_4 = Q \quad , \quad \vartheta + \varphi = 180° . \tag{16.22}$$

Im Bericht (UCRL-5419, 1959) von Ashby und Catron: "Tables of Nuclear Reaction Q-Values" sind berechnete Q-Werte tabelliert.

16.2 Anregungsfunktion einer Reaktion

Um eine Kernreaktion zu erzeugen, muss die Geschossenergie grösser sein als der Schwellenwert. Der Reaktionsquerschnitt ist demnach für alle Energien bis zur Schwellenenergie gleich Null und nimmt erst dann mit wachsender Energie zu. Der Verlauf des Wirkungsquerschnittes in Funktion der Geschossenergie für eine bestimmte Reaktion heisst ANREGUNGSFUNKTION (EXCITATION FUNCTION). Im Detail würde man erwarten, dass sie aus einer Reihe scharfer Spitzen bestehe (Fig. 16.2), von denen jede der Anregungsenergie eines der verschiedenen Zwischenkernniveaus entspricht. In Praxis aber ist die Niveaudichte im allgemeinen (und speziell bei höheren Niveaus) zu gross und die einfallende Energie zu wenig scharf bestimmt, als dass die einzelnen Resonanzen notwendigerweise getrennt würden; die Anregungskurve wird "verschmiert" zu einem kontinuierlichen Spektrum mit (Fig. 16.3) oder sogar ohne (Fig. 16.4) Resonanzspitzen.

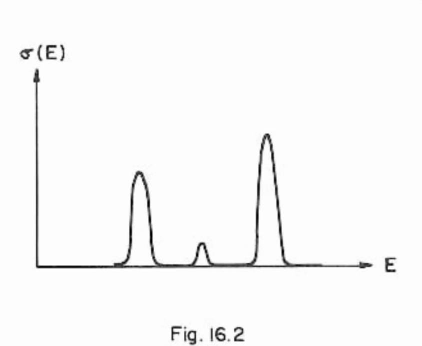


Fig. 16.2

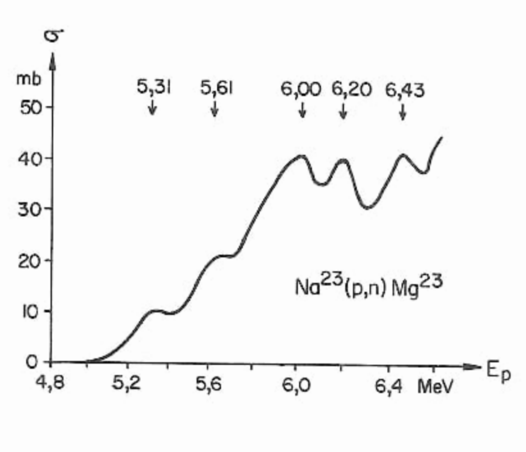


Fig. 16.3

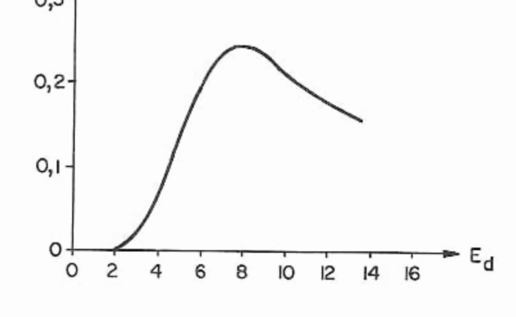


Fig. 16.4

Bei Fig. 16.4 ist zu bemerken, dass der Abfall von σ nach dem Energiewert $E_d \sim 8$ MeV dem Einsetzen der (d, pn)-Reaktion zuzuschreiben ist.

16.3 Reaktionsausbeute

Offensichtlich ist die Kurve der Reaktionsenergie in Funktion der Geschossenergie im Prinzip eine Anregungskurve. Um zu sehen, wie eine solche Kurve bestimmt werden kann, betrachte man das Beispiel der Reaktion

$$B^{10} + \alpha \longrightarrow (N^{14})^* \longrightarrow C^{13*} + p$$
$$\downarrow$$
$$C^{13} + \gamma + p.$$

Dies haben z. B. Talbott und Heydenburg (PR 1953, 90, 186) untersucht, indem sie α-Energien bis 3 MeV (lab) und dünne, mit B^{10} angereicherte Targets verwendeten. Sie studierten verschiedene angeregte Niveaus des Zwischenkernes N^{14}, indem sie seinen Zerfall entlang des betreffenden obigen Ausgangskanals beobachteten. Dieser Übergang zum angeregten 3,9 MeV-Zustand von C^{13} ist mit der Emission eines niederenergetischen Protons verbunden. Mit einem Szintillations-Spektrometer unter 90° zur Einfallsrichtung der α-Teilchen bestimmten sie die relativen Intensitäten der 3,9 MeV-γ-Strahlen aus dem Zerfall von C^{13*} zum Grundzustand. Dabei erhielten sie eine Ausbeutekurve, wie sie Fig. 16.5 zeigt. Die sukzessiven Niveaus von N^{14*} entsprechen je einer Spitze.

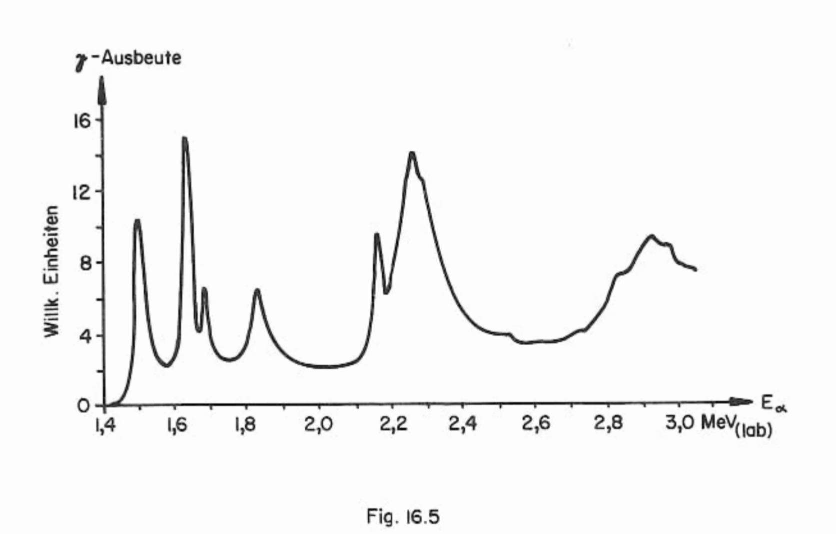


Fig. 16.5

16.4 Energieniveau-Schemata

Um die Verwendung der Niveauschemata (wie sie von Ajzenberg-Selove und Lauritsen (RMP 1955, 27, 77 und Am. Inst. of Phys. Handbook 1957, 8-56) publiziert worden sind) beim Studium der Energiebeziehungen in einer Kernreaktion zu illustrieren, betrachte man das sehr vereinfachte Energieschema für N^{14}, wie es Fig. 16.6 zeigt.

Fig. 16.6

Als Nullpunkt für alle Energieskalen wurde der Grundzustand von N^{14} gewählt. In der Figur sind eine Reihe von möglichen Eingangs- und Ausgangskanälen (entrance and exit channels) für den Zwischenkern N^{14} eingetragen. Dabei sind die relativen "Höhen" der betreffenden Grundzustände auf der Energieskala durch die betreffenden Massendifferenzen bestimmt. So ist z. B. die "Höhe" von $(B^{10} + \alpha)$ gleich

$$\left(M_{B^{10}} + M_{\alpha} - M_{N^{14}} \right) c^2 = 11{,}615 \text{ MeV}. \qquad (16.23)$$

Die Anregungskurven links in der Figur entsprechen Ausbeutekurven, ähnlich jener der Fig. 16. 5. Sie sind aus praktischen Gründen um 90° gedreht und gegen die vertikale Skala der Schwerpunktsenergie aufgetragen, z. B.

$$(E_{\alpha}')_{c.m.} = (E_{\alpha})_{lab} \cdot \frac{M_{Target}}{M_{Total}} = (E_{\alpha})_{lab} \frac{10}{10+4} = \frac{5}{7} E_{\alpha} . \qquad (16.24)$$

So liegen die Anregungsresonanzspitzen auf gleicher Höhe wie die entsprechenden virtuellen Niveaus des Zwischenkerns (siehe Abschn. 15. 5. 2). Zur besseren Übersicht sind nur einige der Niveaus in Fig. 16. 6 eingetragen; dabei sind die möglichen Zerfallsarten vom 13,71 MeV-Niveau des N^{14} aus eingezeichnet. Man bemerkt z. B., dass von diesem Niveau zum Grundzustand und zum 2,365 MeV-Niveau von N^{13} Neutronenzerfall möglich ist, jedoch zum 3,51 MeV-Niveau aus Energiegründen verboten ist ($13{,}71 < 10{,}551 + 3{,}51$ MeV). In den Niveauschemata für C^{13} und N^{13}, rechts in Fig. 16. 6, ist jedes Niveau durch die Energie relativ zum Grundzustand des betreffenden Kerns (nicht zum Grundzustand von N^{14} !), sowie durch Spin und Parität seines Kerns gekennzeichnet.

Weiter sieht man, dass alle N^{14}-Zustände unterhalb von 7,546 MeV, wie z. B. das 3,95 MeV-1+-Niveau, gebundene Zustände sind und nur durch γ-Zerfall zum Grundzustand von N^{14} zurückkehren können. (Ein β-Zerfall zu C^{14} oder O^{14} ist nicht möglich, da deren Grundzustände höher liegen als derjenige von N^{14}.)

Schliesslich kann der Q-Wert einer gegebenen Reaktion durch Differenzbildung aus dem Energieschema gewonnen werden; z. B. erhält man für den Prozess $C^{12}(d, p)C^{13}$

$$Q = 10{,}265 - 7{,}546 = +2{,}719 \text{ MeV (exotherm)} \qquad (16.25)$$

und für $C^{12}(d, n)N^{13}$

$$Q = 10{,}265 - 10{,}551 = -0{,}286 \text{ MeV (endotherm).} \qquad (16.26)$$

16. 5 Kernreaktionstabellen

Durch experimentelle Untersuchung der Energieverhältnisse in Kernreaktionen können die Niveauschemata entweder des Zwischenkernes oder, in anderen Fällen, des Restkernes in folgender Weise aufgestellt werden :

Tab. 16.1

Experimentelle Methode	bestimmt Niveaus des
(i) Untersuchung der Spitzen in den Ausbeutekurven der Resonanzreaktionen für alle Ausgangskanäle des Zwischenkernes.	Zwischenkerns
(ii) Untersuchung anomaler Wirkungsquerschnitte und Winkelverteilungen bei elastischer Streuung für feste Geschossenergien.	Zwischenkerns
(iii) Untersuchung niederenergetischer Gruppen von unelastisch gestreuten Teilchen für feste Geschossenergien.	Restkerns (= Targetkerns)
(iv) Untersuchung von diskreten Energiegruppen der Teilchen, die bei Kernreaktionen emittiert werden.	Restkerns (= Targetkerns)

Die Übersichtstabelle 16.2 gibt einige rohe Anhaltspunkte über die Reaktionen, welche gegebene, einfallende Teilchen mit gegebener Geschossenergie einleiten können.

Tab. 16.2

Energiebereich $(E_i)_{c.m.}$ MeV	Geschosse			
	n	p	d	α
0 - 0,001	(n, n) (n, γ) Resonanzeinfang			
0,001 - 0,5	(n, n) (n, γ)			
0,5 - 10	(n, n) (n, n') (n, γ) (n, p)	(p, p) (p, p') (p, γ) (p, n)	(d, p) (d, n) (d, 2n) (d, pn)	(α, γ) (α, n) (α, p)
10 - 50	(n, n) (n, n') (n, γ) (n, p) (n, 2n) (n, np)	(p, p') (p, n) (p, 2n) (p, np)	(d, p) (d, n) (d, 2n) (d, pn)	(α, n) (α, p)

16.6 Reaktionswahrscheinlichkeit (Wirkungsquerschnitt)

Allgemeine Aussagen über das Verhalten von Wirkungsquerschnitten können aus Betrachtungen des Formalismus von quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden, wie das bereits in Abschn. 10.3 beim β-Zerfall gemacht worden ist.

Man betrachte die Reaktion A(a,b)B, wie in Fig. 16.7 gezeichnet:

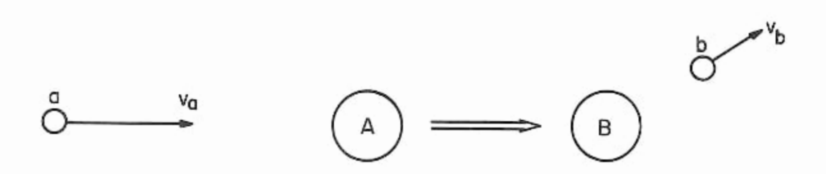


Fig. 16.7

Zu Beginn besteht das System aus einem Geschoss a, das auf ein ruhendes Target A prallt; am Schluss wird das Teilchen b mit der Geschwindigkeit v_b und dem Gesamtdrall I_b emittiert, und es bleibt ein Restkern B mit Kernspin I_B; seine Geschwindigkeit wird als vernachlässigbar klein angenommen. Man setzt voraus, dass die Reaktion keine Resonanzen enthalte (Resonanz wird später in Abschn. 16.7 behandelt werden) und dabei statistischen Gesetzen gehorche.

Die quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeit (transition probability) pro Zeiteinheit, W, ist, wie in Gleichung (10.8) beim β-Zerfall, gegeben durch Fermis "GOLDEN RULE No. 2":

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| H_{if} \right|^2 \frac{dn}{dE} , \qquad (16.27)$$

wo $|H_{if}|$ das Matrixelement der Störung bedeutet, die den Übergang vom Zustand i zum Zustand f verursacht; es ist

$$H_{if} = \int \Psi_f^* \mathcal{H} \Psi_i \, d\tau . \qquad (16.28)$$

Dabei ist $\mathcal{H}$ der Wechselwirkungsenergie-Operator, und die Ψ sind die betreffenden Zustandsfunktionen, deren Werte unbekannt sind. $|H_{if}|^2$ ist dann ein Mass für die Stärke der Wechselwirkung; wenn letztere auch für alle energetisch möglichen Endzustände den gleichen Wert haben kann, wird sie im allgemeinen doch vom betreffenden Endzustand abhängen, wobei dann ein Mittelwert über alle Endzustände in (16.27) einzusetzen ist.

Der statistische Faktor $\frac{dn}{dE}$ gibt die Energiedichte der Endzustände an: Offensichtlich ist der Übergang dann sehr wahrscheinlich, wenn $\frac{dn}{dE}$ gross ist. Für ein Zustandskontinuum geht $\frac{dn}{dE} \rightarrow \infty$ und $|H_{if}| \rightarrow 0$, so dass es nötig wird, Kastennormierung einzuführen (siehe z. B. Schiff: "Quantum Mechanics" 1955, S. 199, oder Landau und Lifshitz: "Quantum Mechanics" 1958, S. 15 und 144 ff.), um eine endliche, definite Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten.

Analog zu Gleichung (10.11) kann man für ein Teilchen b mit einem Impuls zwischen p_b und $p_b + dp_b$, eingeschlossen im Volumen V, die Zahl der Zustände berechnen aus

$$dn = \frac{4\pi p_b^2 \, dp_b}{h^3} \cdot V \cdot (2I_b + 1)(2I_B + 1) , \qquad (16.29)$$

wo der zusätzliche Spinfaktor eingeführt worden ist, um der Multiplizität im Endzustand f Rechnung zu tragen; z. B. gibt ein Spin I Anlass zu (2I+1) möglichen, verschiedenen Quantenzuständen, von denen jeder einzeln betrachtet werden muss, da im Term $\frac{dn}{dE}$ die entarteten Zustände einzeln gezählt werden.

Unter der Annahme, dass B sehr schwer sei (v_B vernachlässigbar), kann die relativistisch invariante Beziehung zwischen kinetischer Energie dE' und Impuls dp' im Schwerpunktssystem

$$dE' = v_b' \cdot dp_b' \tag{16.30}$$

auch aufs Laborsystem angewendet werden.

So wird

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi p_b^2}{h^3} \cdot \frac{1}{v_b} \cdot V \cdot (2I_b+1)(2I_B+1) \tag{16.31}$$

und die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit (also die Zahl der Übergänge pro Sekunde) gleich

$$W = \frac{1}{\pi \hbar^4} \cdot \frac{p_b^2}{v_b} \cdot V \cdot |H_{if}|^2 \cdot (2I_b+1)(2I_B+1) \,. \tag{16.32}$$

($h/2\pi$ ersetzt durch $\hbar$).

Aus dieser Gleichung kann man direkt den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{i\to f}$ für den Prozess A(a, b)B ableiten, indem man die Dichte n_a des Teilchens vom Typ a einführt. Dann ist der Strom der einfallenden Teilchen gleich $n_a v_a$, wobei die Einfallsgeschwindigkeit v_a gleich v_a' (Geschwindigkeit im Schwerpunktssystem) gesetzt werden kann, wenn der Targetkern A schwer ist; die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann einfach das Produkt aus diesem Strom und dem Wirkungsquerschnitt pro A-Kern :

$$W = n_a v_a \cdot \sigma_{i\to f} \,. \tag{16.33}$$

Unter der Annahme, dass sich nur ein Teilchen von Typ a im Volumen V befinde, folgt, dass

$$n_a = \frac{1}{V} \tag{16.34}$$

und daraus

$$\boxed{\sigma_{i\to f} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \cdot |V H_{if}|^2 \cdot \frac{p_b^2}{v_a v_b} \cdot (2I_b+1)(2I_B+1) \,.} \tag{16.35}$$

Für die folgenden Anwendungen dieses Ausdruckes genügt es, sich zu merken, dass in (16. 35) die Terme $|VH_{if}|^2$ und $(2I_b+1)$ $(2I_B+1)$ unbekannt sein können, dass jedoch für eine gegebene Reaktion und bei kleiner Geschossenergie beide konstant sind, so dass

$$\boxed{\sigma_{i\to f} \sim \frac{p_b^2}{v_a v_b} \,.} \tag{16.36}$$

In $|H_{if}|^2$ sind die Faktoren für das Durchdringen der Kern-Coulomb-Barriere enthalten, die ihrerseits $\sigma_{i\to f}$ beeinflussen können. Denn $|H_{if}|$ ist ein Matrixelement und enthält somit im Prinzip das Skalarprodukt (16. 28) der Wellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand. Wenn das Geschoss a geladen ist, verringern sich an der Kernoberfläche diese Wellenfunktionen um eine Amplitude $e^{-G_a/2}$, wo G_a den Gamow-Faktor für das Teilchen a der Energie E_a bedeutet (Abschn. 7. 8. 4). Also folgt, dass

$$|H_{if}|^2 \sim e^{-G_a} \,. \tag{16.37}$$

Ähnlich kommt für geladene, ausfallende Teilchen b ein analoger Faktor dazu, so dass für Absorption und Emission von positiv geladenen Teilchen

$$|H_{if}|^2 \sim e^{-(G_a + G_b)} \tag{16.38}$$

gilt.

16. 6. 1 Elastische Neutronenstreuung (n, n)

Da die Streuung elastisch ist, gilt $v_a \approx v_b$, wenn der Rückstoss des Tagetkernes A vernachlässigt wird, weshalb

$$\frac{p_b^2}{v_a\, v_b} = \frac{p_n^2}{v_n^2} = M_n^2 = \text{const.} \qquad (16.39)$$

So folgt für kleine Energien ($|H_{if}|^2 \approx$ const.), dass

$$\boxed{\sigma_{(n,n)} \approx \text{const.}} \qquad (16.40)$$

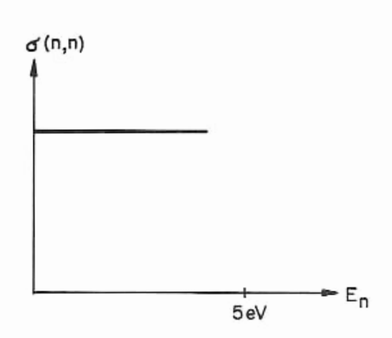


Fig. 16.8

Dieses Resultat, dargestellt in Fig. 16. 8, wird durch das Experiment innerhalb der Fehlergrenzen gut bestätigt.

16. 6. 2 Exotherme Reaktionen, induziert durch niederenergetische Neutronen

Beispiele: (n, γ), (n, p), (n, α), (n, f) = (n, fission)

Da für solche Reaktionen $E_n \sim$ eV und $Q \sim$ MeV betragen, ist v_b, und damit p_b, für einfallende Neutronenenergien über dem Schwellenwert im wesentlichen konstant, denn v_b wird durch kleine Änderungen von $v_a = v_n$ nicht wesentlich beeinflusst.

Also ist

$$\frac{p_b^2}{v_a\, v_b} \approx \text{const.}\ \frac{1}{v_a} = \text{const.}\ \frac{1}{v_n}, \qquad (16.41)$$

so dass

$$\boxed{\sigma_{(n,b)} \sim \frac{1}{v_n},} \qquad (16.42)$$

was unter dem Namen "$\frac{1}{v}$-GESETZ" bekannt ist (Fig. 16. 9). Daraus folgt direkt, dass für <u>resonanzfreie</u> Reaktionen

$$\log \sigma_{(n,b)} = \text{const.} - \log v_n, \qquad (16.43)$$

wobei die Proportionalitätskonstante in (16. 42) für eine gegebene exotherme Reaktion aus den Achsenabschnitten der logarithmischen Kurve (Fig. 16. 10) bestimmt werden kann.

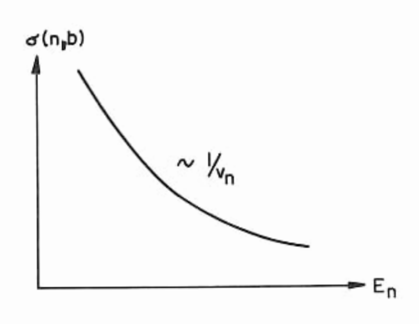


Fig. 16.9

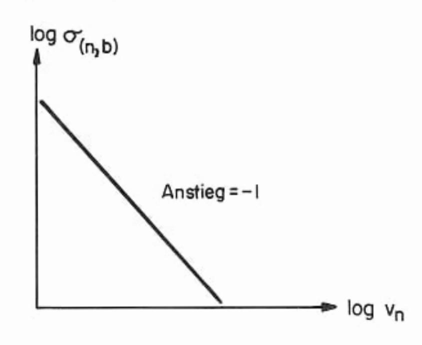


Fig. 16. 10

16. 6. 3 Unelastische Neutronenstreuung (n, n')

Darunter versteht man eine endotherme Reaktion, worin $v_b < v_a$ ist und der Kern A mit einer Anregungsenergie E^* ($E^* = -Q \approx 1$ MeV) übrigbleibt. Deshalb ist die Reaktionsschwelle hoch: Oberhalb derselben bewirkt eine verhältnismässig kleine Änderung der Geschossenergie E_n eine grosse relative Änderung von $E_{n'}$, so dass in der Umgebung der Schwelle ($\approx$ 1 MeV) v_n als konstant angenommen werden kann. Hingegen ist

$$(v_{n'})^2 = \frac{\text{Energieüberschuss bez. Schwelle}}{\frac{1}{2} M_n} , \qquad (16.44)$$

also

$$v_{n'} \sim \sqrt{E_n - E^*} . \qquad (16.45)$$

Nun ist

$$\frac{p_b^2}{v_a\, v_b} \equiv \frac{p_{n'}^2}{v_n\, v_{n'}} \sim v_{n'} \sim \sqrt{E_n - E^*} , \qquad (16.46)$$

so dass unmittelbar über der Schwelle für unelastische Streuung gilt

$$\boxed{\sigma_{(n,n')} \sim \sqrt{E_n - E^*} .} \qquad (16.47)$$

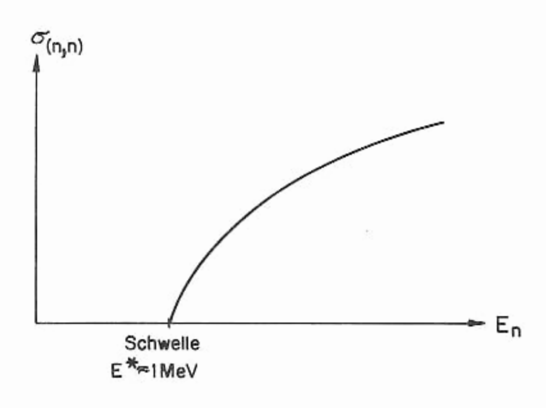


Fig. 16.11

16. 6. 4 Endotherme Reaktionen unter Emission eines geladenen Teilchens

Beispiele: (n, p), (n, α).

Das vorliegende Problem ähnelt jenem in Abschn. 16. 6. 3, aber während die Coulomb-Barriere für Neutronen vollkommen transparent ist, variiert ihre Transparenz im vorliegenden Beispiel einer Emission geladener Teilchen stark mit der Energie. Die Beziehung (16. 47) muss durch Anfügen eines Transparenzfaktors T_b modifiziert werden,

$$\boxed{\sigma_{(n,\, b^{\pm})} \sim T_b \cdot \sqrt{E_n - E^*} ,} \qquad (16.48)$$

worin die Transparenz eine Funktion des Gamow-Faktors (Abschn. 7. 8. 4) ist,

$$T_b = e^{-G_b} \qquad (16.49)$$

mit

$$G_b = \sqrt{\frac{8M_b}{\hbar^2}} \int \sqrt{U_b - E_b}\,.\,dr \xrightarrow{\text{hohe Coulomb-Barriere}} \frac{2\pi Z_B z_b e^2}{\hbar v_b}, \qquad (16.50)$$

worin der Term U_b = (Ladung von b).(Coulomb-Potential des Kerns B) die Coulomb-Abstossung darstellt.

Den Verlauf des Wirkungsquerschnittes zeigt dann Fig. 16.12.

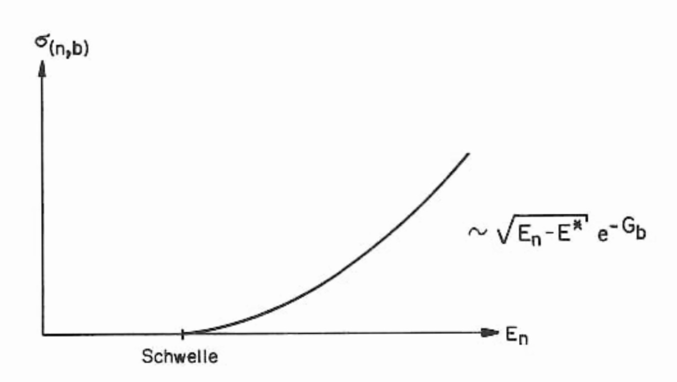


Fig. 16.12

16.6.5 Exotherme Reaktionen mit geladenen Geschossen

Beispiele: (p,γ), (α,γ), (p,n), (α,n).

Aus $E_a \ll Q$ folgt

$$\frac{p_b^2}{v_a\, v_b} \sim \frac{1}{v_a}, \qquad (16.51)$$

und dieser Ausdruck muss mit dem Transparenzfaktor e^{-G_a} multipliziert werden, welcher die Durchlässigkeit der Coulomb-Barriere für das Geschoss a bestimmt, so dass

$$\boxed{\sigma_{(a^{\pm},b)} \sim \frac{1}{v_a}\, e^{-G_a},} \qquad (16.52)$$

wie in Fig. 16.13 gezeichnet:

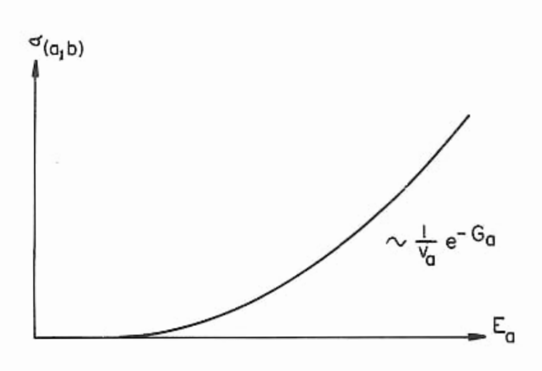


Fig. 16.13

16. 6. 6 Exotherme Reaktionen mit geladenen einfallenden und emittierten Teilchen

Beispiele: (d, p) (α, p).

Wie im Falle 16. 6. 5 gilt für kleine Geschossenergien

$$\frac{p_b^2}{v_a\, v_b} \sim \frac{1}{v_a} . \qquad (16.53)$$

Doch wird $\sigma_{(a^\pm, b^\pm)}$ hier vom Durchdring-Faktor $e^{-(G_a + G_b)}$ beeinflusst, so dass

$$\boxed{\sigma_{(a^\pm,\, b^\pm)} \sim \frac{1}{v_a}\, e^{-(G_a + G_b)}} , \qquad (16.54)$$

und hat in der Folge einen steileren Verlauf als in 16. 6. 5 .

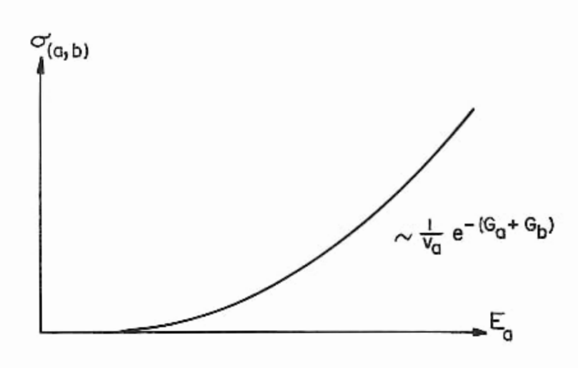


Fig. 16.14

16. 6. 7 Inverse Reaktionen, A(a, b)B und B(b, a)A

Aus Gleichung (16. 35) kann man leicht das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte inverser Prozesse (mutually inverse processes) ableiten.

Da

$$\sigma_{i \to f} \sim \frac{p_b^2}{v_a\, v_b} \left(2 I_b + 1\right)\left(2 I_B + 1\right) \qquad (16.55)$$

und

$$\sigma_{f \to i} \sim \frac{p_a^2}{v_a\, v_b} \left(2 I_a + 1\right)\left(2 I_A + 1\right), \qquad (16.56)$$

folgt

$$\boxed{\frac{\sigma_{i \to f}}{\sigma_{f \to i}} = \frac{p_b^2}{p_a^2} \cdot \frac{(2 I_b + 1)(2 I_B + 1)}{(2 I_a + 1)(2 I_A + 1)}} , \qquad (16.57)$$

unter der Annahme, dass

$$| H_{if} | = | H_{fi} | . \qquad (16.58)$$

Dass dies tatsächlich der Fall ist, folgt aus der Hermitezität des Hamilton-Operators,

$$\left| \int \Psi_f^* \mathcal{H}\, \Psi_i \, d\tau \right| = \left| \int \Psi_i^* \mathcal{H}\, \Psi_f \, d\tau \right| . \qquad (16.59)$$

In Gleichung (16. 57) bedeuten die σ einen mittleren Wirkungsquerschnitt über die verschiedenen möglichen Spinzustände und bilden eine Summe partieller Wirkungsquerschnitte von verschiedenen möglichen Endzuständen. Die Formel kann dahin interpretiert werden, dass sie eine beschränkte Form des "PRINCIPLE OF DETAILED BALANCE" ausdrücke. Detailed balance bedingt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Prozesses gleich derjenigen seines inversen ist, also

$$W_{i \to f} = W_{f \to i} , \qquad (16.60)$$

wenn beide Wahrscheinlichkeiten mit dem Gewicht des entsprechenden Impulses, nicht aber des Spins, versehen werden. Heitler dagegen hat eine beschränktere Form des detailed balance vorgeschlagen (Ann. Inst. Henri Poincaré 1956, 15, 67), anwendbar, wenn verschiedene Spinzustände möglich sind, nämlich das sogenannte PRINCIPLE OF SEMI-DETAILED BALANCE,

$$\overline{W_{i \to f}} = \overline{W_{f \to i}} , \qquad (16.61)$$

worin die $\overline{W}$ die über alle Spinzustände gemittelten Wahrscheinlichkeiten darstellen.

In diesem Zusammenhang mag eine einfache Analogie dieses Prinzip etwas beleuchten: Man nehme an, dass Teilchen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene, und zwar nur in den $\pm x$- und $\pm y$-Richtungen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen könnten. Durch Stösse an ideal elastischen Hindernissen von der Form rechtwinkliger, gleichschenkliger Dreiecke wird ihre Bewegungsrichtung geändert, wie in Fig. 16. 15 gezeichnet ;

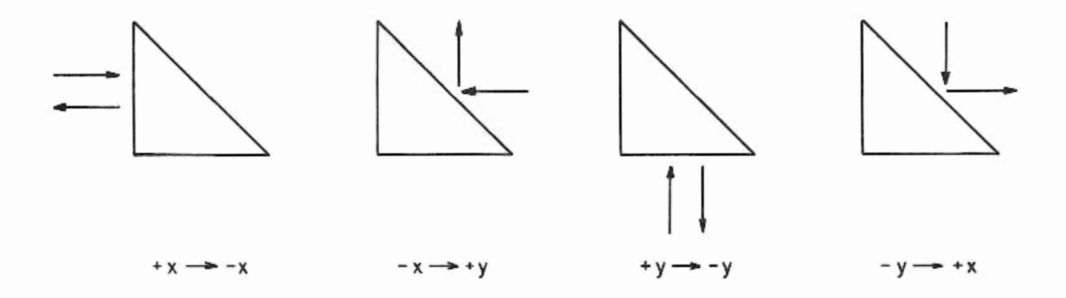


Fig. 16.15

Es ist klar, dass die Wahrscheinlichkeiten der vier möglichen gezeigten Übergänge von Null verschieden und gleich gross sind (da der Querschnitt des Hindernisses für Teilchen aus jeder der vier Richtungen, +x, -x, +y, -y, gleich ist). Dagegen verschwinden die Wahrscheinlichkeiten identisch für alle anderen Übergänge, wie z. B., $W_{-x \to +x} = 0$.
Daraus folgt, dass

$$W_{+x \to -x} \neq W_{-x \to +x} . \qquad (16.62)$$

Eine beschränktere Form der Gleichheit kann jedoch unter der Voraussetzung hergeleitet werden, dass, beim Auftreffen eines Teilchenstrahles, z. B. aus der +x-Richtung, auf ein Feld von Hindernissen, sich nach vielen Stössen ein Gleichgewicht in der Anzahl der in $\pm x$-, $\pm y$-Richtung fliegenden Teilchen einstellen wird. So ist dann die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten aus einem gegebenen Anfangszustand i in alle möglichen Endzustände f gleich der Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten aus allen Zuständen f in den Zustand i (für jeden gegebenen Anfangszustand i):

$$\sum_f W_{i \to f} = \sum_f W_{f \to i} . \qquad (16.63)$$

Die Anwendung dieses Gesetzes auf das obige Beispiel liefert

$$W_{+x \to -x} = W_{-y \to +x} . \qquad (16.64)$$

Wenn die Teilchenbewegung auf eine Gerade (z. B. $\pm$x-Richtung) beschränkt ist, so folgt unmittelbar, dass das Prinzip des detailed balance zwar für symmetrische Hindernisse (z. B. Quadrate) erhalten bleibt, jedoch für asymmetrische Hindernisse in verschiedenen möglichen Stellungen verletzt wird. (Fig. 16. 16).

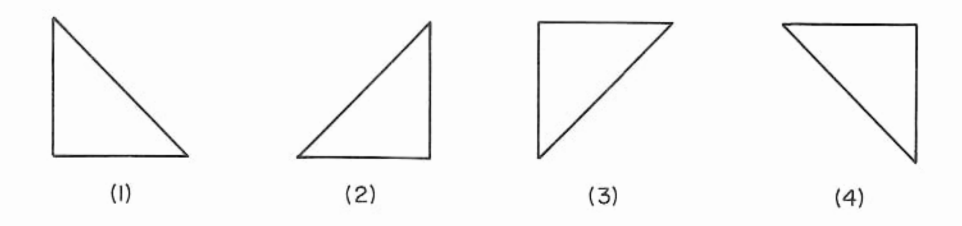


Fig. 16. 16

Für irgendeine gegebene Orientierung gilt das detailed balance nicht. Dennoch erhält man beim Mitteln über die in Fig. 16. 16 gezeigten Orientierungen folgende Gleichheit ;

$$\overline{W_{i \to f}} = \overline{W_{f \to i}} . \qquad (16.65)$$

Wenn man z. B. die vier Orientierungen mit (1), (2), (3), (4) bezeichnet und die einzelnen von Null verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten in Fig. 16. 16 mit W, so folgt daraus, dass

$$\overline{W_{+x \to -x}} \equiv \frac{1}{4}\left(W^{(1)}_{+x \to -x} + W^{(2)}_{+x \to -x} + W^{(3)}_{+x \to -x} + W^{(4)}_{+x \to -x} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(W^{(1)}_{+x \to -x} + W^{(3)}_{+x \to -x} \right) = \frac{W}{2} \qquad (16.66)$$

und für den inversen Prozess

$$\overline{W_{-x \to +x}} \equiv \frac{1}{4}\left(W^{(1)}_{-x \to +x} + W^{(2)}_{-x \to +x} + W^{(3)}_{-x \to +x} + W^{(4)}_{-x \to +x} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(W^{(2)}_{-x \to +x} + W^{(4)}_{-x \to +x} \right) = \frac{W}{2} , \qquad (16.67)$$

woraus

$$\overline{W_{+x \to -x}} = \overline{W_{-x \to +x}} . \qquad (16.68)$$

Dies illustriert das Prinzip des "semi-detailed balance", von dem man zeigen kann, dass es für Prozesse in der Quantenmechanik und Quanten-Feldtheorie exakt gilt.

16.7 Resonanzreaktionen

16.7.1 Scharfe Anregungsspitzen

Wie in Abschn. 16.6 gezeigt, hat σ in Funktion der Energie ohne Resonanzen einen regelmässigen Verlauf, da man annehmen kann, dass das Matrixelement $|H_{if}|^2$ ungefähr konstant ist, abgesehen vom Durchdringungsfaktor der Coulomb-Barriere. Im allgemeinen Fall gilt aber diese Annahme nicht, und in der Folge zeigen die Anregungsfunktionen markante Unstetigkeiten. Beispielsweise hat die Anregungsfunktion für den In(n, γ)-Prozess bei einer Neutronenenergie von 1,44 eV (Fig. 16.17) eine sehr ausgeprägte Spitze. Bei der Resonanzenergie E_o wächst der Wirkungsquerschnitt von $\sim$ 100 b auf σ_R = 27 000 b; die halbe Halbwertsbreite der Resonanzspitze ist Γ = 0,042 eV. Nahe der Resonanz verläuft die Kurve wie

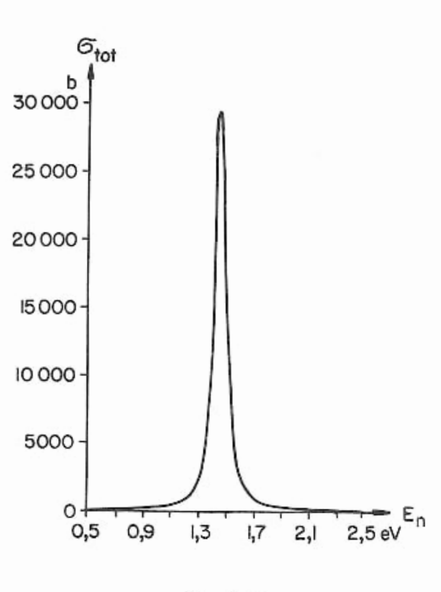


Fig. 16.17

$$\sigma_R \sim \frac{1}{(E - E_o)^2} , \qquad (16.69)$$

wo E_o die Resonanzenergie ist.

16.7.2 Zwischenkern

Das Auftreten von Resonanzspitzen kann erklärt werden, wenn man annimmt, dass ein Zwischenkern C als intermediärer Zustand gebildet wird :

$$a + A \rightarrow C^* \rightarrow B + b , \qquad (16.70)$$

so dass der Prozess von 2. Ordnung ist. Aus der Störungstheorie 2. Ordnung ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit (Fermis "GOLDEN RULE No. 1") zu

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{H_{i\rightarrow c} \, H_{c\rightarrow f}}{E_i - E_c} \right|^2 \cdot \frac{dn}{dE} , \qquad (16.71)$$

worin $\frac{dn}{dE}$ die Energiedichte des Endzustandes bedeutet; man nimmt an, dass alle Reaktionen über den Zwischenzustand C verlaufen, also i $\rightarrow$ C $\rightarrow$ f. Setzt man den Volumterm V gleich 1, so ergibt sich der Wirkungsquerschnitt der totalen Reaktion zu

$$\sigma_{i\rightarrow f} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \left| \frac{H_{i\rightarrow c} \, H_{c\rightarrow f}}{E_i - E_c} \right|^2 \cdot \frac{p_b^2}{v_a \, v_b} \cdot (2I_b + 1)(2I_B + 1) . \qquad (16.72)$$

Aus der Form dieses Ausdruckes wird ersichtlich, dass für $E_i \rightarrow E_c$ Resonanz eintritt und $\sigma \rightarrow \infty$ geht. Wenn σ in der Praxis auch überraschend gross wird, so wird er doch nicht unendlich, da in der obigen, vereinfachten Betrachtung die kurze Lebensdauer des Zwischenkerns ($\sim 10^{-17}$ sec) nicht berücksichtigt worden ist. Eine strengere Behandlung wird im nächsten Abschnitte folgen.

16.7.3 σ in der Nähe der Resonanz

In Fig. 16.18 sind die wesentlichen Angaben über das Niveauschema eines Zwischenkerns aus den früheren Abschnitten zusammengefasst.

~8 MeV

0

Virtuelle Zustände; Niveauabstand D ~ 10 - 100 eV (kurze Lebensdauer $\tau \sim 10^{-16}$ sec)

Gebundene Zustände, Niveauabstand D ~ 500 keV, halbe Halbwertsbreite der Niveaus $\Gamma \sim 10^{-3}$ eV (lange Lebensdauer $\tau \sim 10^{-12}$ sec)

Fig. 16.18

Der Einfachheit halber nimmt man an, dass die hochenergetischen Zustände äquidistant seien (vgl. Abschn. 15.5.4), so dass die Anregungsenergie des n-ten Niveaus gleich

$$W_n = W_o + nD \qquad (16.73)$$

ist. Weiterhin wird angenommen, dass sie gleichen Kernspin I und Parität haben, so dass man den Einfluss der Auswahlregeln auf die Übergangswahrscheinlichkeit nicht berücksichtigen muss. Die halbe Halbwertsbreite Γ eines jeden Niveaus ist die Summe über die partiellen halben Halbwertsbreiten der betreffenden Ausgangskanäle:

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p + \Gamma_\gamma + \dots \qquad (16.74)$$

Die Wellenfunktion Ψ des Zwischenkerns kann aus einer Summe der Wellenfunktionen φ für die einzelnen Niveaus gebildet werden, da die Schrödinger-Gleichung linear ist:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \cdot e^{-\frac{i W_n t}{\hbar}} . \qquad (16.75)$$

Dabei beschreibt der exponentielle Term die Zeitabhängigkeit und der restliche Ausdruck den räumlichen Verlauf. Dieser räumliche Anteil enthält das Produkt der betreffenden zeitunabhängigen Energie-Eigenfunktion φ_n des ungestörten Energiezustandes W_n mit deren Amplitude a_n; durch Multiplizieren mit der zeitabhängigen Exponentialfunktion und durch Summieren über alle Zustände n ergibt sich so die Eigenfunktion Ψ für den gestörten Zustand. Unter Verwendung der Gleichung (16.73) kann dies umgeschrieben werden in

$$\Psi = e^{-\frac{iW_0 t}{\hbar}} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \, e^{-\frac{it}{\hbar} \cdot nD} \right), \qquad (16.76)$$

worin der exponentielle Term periodisch ist mit der Periode $\Delta t = \frac{2\pi\hbar}{D} = \frac{h}{D}$, so dass der Zustand Ψ zu den Zeitpunkten $t, t + \frac{h}{D}, t + \frac{2h}{D}$ ... die gleiche Konfiguration aufweist.

Wenn D $\approx$ 100 eV, dann ist Δ t $\approx 10^{-16}$ sec, eine relativ lange nukleare Zeit;

Wenn D $\approx$ 10 MeV, dann ist Δ t $\approx 10^{-21}$ sec, eine normale nukleare Zeit.

In diesen Zeitintervallen wird also dieselbe räumliche Anordnung der Nukleonen, der Geschwindigkeiten, Impulse, usw. wiederholt. So kann z. B. ein Neutron periodisch an die Oberfläche des Kerns gelangen und "versuchen", die Zentrifugalbarriere des Kerns zu durchstossen. Wenn die Transmissionswahrscheinlichkeit T ist, dann ist die Zerfallswahrscheinlichkeit pro sec. gleich

$$W = T \cdot \text{(Anzahl Versuche pro Sekunde)} \qquad (16.77)$$

$$= T \cdot \frac{D}{h} . \qquad (16.78)$$

Daraus ergibt sich die partielle Lebensdauer eines Zustandes bezüglich Neutronenzerfall zu

$$\tau_n = \frac{\hbar}{2\Gamma_n} = \frac{h}{TD}, \qquad (16.79)$$

und man bemerkt, dass hier, verglichen mit Abschn. 15. 5. 3, Γ_n die partielle halbe Halbwertsbreite ist.

16. 7. 4 Breit-Wigner-Formel

Rein formal kann man eine Resonanzspitze durch eine LORENTZ-VERTEILUNG darstellen:

$$f(E) = \frac{C}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2}, \qquad (16.80)$$

worin C eine Konstante,
E die Geschossenergie nahe bei E_o
und E_o die Resonanzenergie bedeuten.

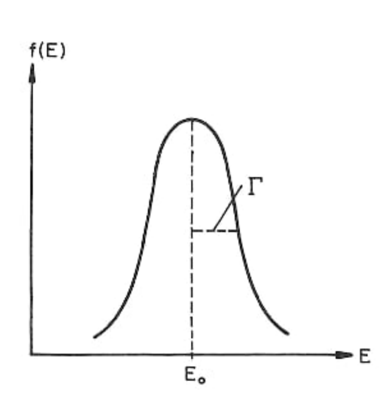


Fig. 16.19

Γ ist die resultierende halbe Halbwertsbreite, die man in (16. 80) einsetzt, um zu verhindern, dass die Amplitude von f(E) bei E = E_o unendlich wird. Die Quadrate im Nenner bewirken, dass die Funktion f(E) symmetrisch wird bezüglich E_o. Bei Resonanz erreicht σ sein Maximum σ_{max}, das gegeben ist durch den absoluten Wirkungsquerschnitt σ_ℓ (Abschn. 9. 8) für monoenergetische, einfallende Strahlen mit der reduzierten de Broglie-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^-$ und dem Bahndrehimpuls ℓ:

$$\sigma_R = \sigma_{max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2\ell + 1). \qquad (16.81)$$

In der Nähe der Resonanz ist dann der Verlauf des Wirkungsquerschnittes für die Zwischenkern-bildung gegeben durch

$$\sigma_{i \to c} = \sigma_{max} \cdot T \cdot f(E) \,. \tag{16.82}$$

T ist der Transmissionskoeffizient der Potentialbarriere im Zwischenkern. Wegen der notwendigen Bedingung

$$\sigma_{i \to c} \leq \sigma_{max} \tag{16.83}$$

folgt aus (16. 82), dass

$$f(E) \leq 1 \,, \tag{16.84}$$

da ja die Transparenz T im Prinzip zwischen 0 und 1 variieren kann.

Man kann also die Funktion f(E) normieren, indem man den Niveauabstand D einführt und so die unbekannte Konstante C eliminiert:

$$\frac{1}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} f(E)\, dE = 1 \,. \tag{16.85}$$

Man setzt also den Mittelwert von f(E) gleich 1, nachdem man über einige Resonanzen gemittelt hat, von denen man annimmt, dass ihre Energieabstände den konstanten Wert D besässen.

Dann folgt aus (16. 80) und (16. 85)

$$1 = \frac{1}{D} \cdot \frac{C}{\Gamma} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{E - E_0}{\Gamma} \right]_{E=-\infty}^{E=+\infty} = \frac{C}{D\Gamma} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \tag{16.86}$$

also

$$C = \frac{D\Gamma}{\pi} \,. \tag{16.87}$$

Verwendet man (16. 79), so ist der Transmissionskoeffizient der Potentialbarriere in Funktion der partiellen halben Halbwertsbreiten Γ_a für ein Teilchen a gegeben zu

$$T = \frac{4 \pi \Gamma_a}{D} \,. \tag{16.88}$$

Durch Einsetzen ergibt sich daraus der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Zwischenkerns (Compound Nucleus), $\sigma_{C.N.}$, nahe der Resonanz zu

$$\sigma_{C.N.} \equiv \sigma_{i \to c} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2\ell + 1) \, \frac{4 \Gamma_a \Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \,. \tag{16.89}$$

Der Faktor 4 im Zähler kommt von der Verwendung halber Halbwertsbreiten und tritt nicht auf in solchen Berechnungen des Resonanz-Wirkungsquerschnittes, wo Γ die volle Halbwertsbreite bedeutet (sie enthalten dann $\Gamma/2$ anstelle von Γ im Nenner).

Nach Entstehung des Zwischenkernes bestimmt das Verhältnis $\frac{\Gamma_b}{\Gamma}$ die relative Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den verschiedenen Ausgangskanälen gerade die Emission des gegebenen Teilchens b einstellt. Somit wird für die Reaktion (a, b) in Resonanznähe

$$\boxed{\sigma_{(a,b)} = \sigma_{C.N.} \cdot \frac{\Gamma_b}{\Gamma} \,,} \tag{16.90}$$

also

$$\boxed{\sigma_{(a,b)} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2\ell + 1) \cdot \frac{4 \Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \,.} \tag{16.91}$$

Dabei nimmt man an, dass die ganze Reaktion (a, b) nur über <u>ein</u> Resonanzniveau des Zwischenkernes verlaufe. Man nennt dann Formel (16. 91) die BREIT-WIGNER SINGLE-LEVEL FORMULA. Es ist wichtig, sich zu merken, dass in $\sigma_{(a,b)}$ die Beiträge der Nichtresonanz-Reaktionen zum gesamten Wirkungsquerschnitt nicht enthalten sind. Die Formel gilt nur für Resonanzvorgänge, einschliesslich unelastischer Resonanzstreuung (a,a'); sie kann jedoch nicht ohne weiteres auf den Spezialfall elastischer Resonanzstreuung (a,a) angewendet werden.

Wenn man für gegebenen Eingangskanal über alle möglichen Resonanz-Ausgangskanäle ausser (a,a) summiert, bezeichnet man den so gebildeten Wirkungsquerschnitt σ_r als REAKTIONS-QUERSCHNITT (REACTION CROSS-SECTION), der folgendermassen von $\sigma_{C.N.}$ abhängt :

$$\sigma_r = \sum_{\substack{b=a' \\ b\neq a}} \sigma_{(a,b)} = \sigma_{C.N.} \sum_{\substack{b=a' \\ b\neq a}} \frac{\Gamma_b}{\Gamma} = \sigma_{C.N.} \left(1 - \frac{\Gamma_a}{\Gamma}\right). \qquad (16.92)$$

Andererseits erhält man den TOTALEN WIRKUNGSQUERSCHNITT σ_t , indem man auch noch über $\sigma_{(a,a)}$ summiert,

$$\sigma_t = \sigma_r + \sigma_{(a,a)} , \qquad (16.93)$$

worin bei jedem Wirkungsquerschnitt über alle effektiven ℓ -Werte summiert worden ist.

Eine weitere, sehr gebräuchliche Grösse ist der EINFANGSQUERSCHNITT (RADIATIVE CAPTURE CROSS-SECTION), $\sigma_{Einf.}$, der sich auf den wichtigen Spezialfall bezieht, wo Resonanzeinfang thermischer Neutronen (ℓ = 0) zur Bildung eines Zwischenkernes führt, und letzterer dann durch γ -Emission zerfällt. Es gilt

$$\sigma_{Einf.} = \sigma_{(n,\gamma)} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} . \frac{4 \Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E-E_0)^2 + (\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2} , \qquad (16.94)$$

eine Beziehung, die experimentell ausgezeichnet bestätigt wird und auch umgekehrt zur Bestimmung der Γ aus Messungen der Einfangsquerschnitte verwendet werden kann.

Streng genommen sollte die Breit-Wigner-Formel noch mit dem statistischen Spinfaktor g multipliziert werden, um der Drehimpuls-Multiplizität Rechnung zu tragen. Für den Wirkungsquerschnitt der Neutronenreaktionen kann man zeigen, dass dieser Faktor gleich

$$\boxed{g = \frac{2 I_C + 1}{(2I_A + 1)(2 I_a + 1)(2\ell + 1)}} \qquad (16.95)$$

ist, worin I_C = Gesamtdrehimpuls des Zwischenkernes,
I_A = Gesamtdrehimpuls des Targetkernes A,
I_a = Gesamtdrehimpuls des Geschosses a
und ℓ = Bahndrehimpuls des Geschosses a
ist.

Im speziellen Fall von (n,γ)-Reaktionen, bewirkt durch langsame Neutronen (ℓ = 0), tritt für Zwischenkernzustände mit

$$I_C = I_A \pm \tfrac{1}{2} \qquad (16.96)$$

Resonanz ein, und der fragliche Faktor vereinfacht sich für $I_a = I_n = 1/2$ (da das Neutron ein Fermion ist) zu

$$\boxed{g = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2 I_A + 1}\right).} \qquad (16.97)$$

Das kann man leicht mit folgender Betrachtung verifizieren: Der multiplikative Faktor g bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass, für gegebene I_A und I_C mit Differenz $\frac{1}{2}$, das einfallende Neutron für den Einfang richtig orientiert ist.

Nun ist

die Anzahl der Anfangszustände mit Spin $I_A + \frac{1}{2}$ (Spins parallel) = $2(I_A + \frac{1}{2}) + 1$,

und

die Anzahl der Anfangszustände mit Spin $I_A - \frac{1}{2}$ (Spins antiparallel) = $2(I_A - \frac{1}{2}) + 1$,

und damit die totale Anzahl der Anfangszustände = $4I_A + 2$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes Neutron sich im Zustand mit parallelem Spin befindet, ist = $\frac{2(I_A + \frac{1}{2}) + 1}{4I_A + 2}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes Neutron sich im Zustand mit antiparallelem Spin befindet, ist = $\frac{2(I_A - \frac{1}{2}) + 1}{4I_A + 2}$. Also ist die gesamte Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes Neutron für Resonanzeinfang richtig orientiert ist, gleich

$$g = \frac{I_A + 1}{2I_A + 1} \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{I_A}{2I_A + 1}, \tag{16.98}$$

also

$$g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A + 1}\right). \tag{16.99}$$

Wenn $I_c \neq I_A \pm \frac{1}{2}$ ist, zeigt sich für langsame Neutronen praktisch keine merkliche Resonanz.

Es muss hier bemerkt werden, dass man zwar beim Anwenden der Breit-Wigner-Formel auf experimentelle Resonanzkurven E_o und Γ üblicherweise als Konstante des Resonanzniveaus behandelt. Dennoch zeigt aber die strenge, mathematische Analyse, dass für Resonanzen geladener Teilchen und für $\ell \neq 0$ die E_o und Γ mit der Geschossenergie E merklich variieren können.

16.7.5 Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung

Die elastische Streuung ist ein Spezialfall bezüglich der Anwendung der Breit-Wigner-Formel auf die Bestimmung von Resonanzwirkungsquerschnitten, denn sie muss nicht, sie kann jedoch, auf dem Umweg über einen Zwischenkern verlaufen. Formal hat man also zwischen zwei Klassen von elastischer Streuung zu unterscheiden:

(i) COMPOUND-elastische Streuung (sog. RESONANZSTREUUNG),

(ii) SHAPE-elastische Streuung (sog. POTENTIALSTREUUNG).

Im Fall (i) trifft das Geschoss auf ein Target und erzeugt einen Zwischenkern: Der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses ist direkt durch die Breit-Wigner-Formel gegeben, z. B.

$$\boxed{\sigma_{(n,n)_{comp.}} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \cdot \frac{4\Gamma_n^2}{(E - E_o)^2 + \Gamma^2}} \tag{16.100}$$

Wenn der Zwischenkern "stark gedämpft" ist, d.h. wenn $\Gamma_n \ll \Gamma$, so wird der Compound-elastische Streuquerschnitt $\sigma_{(n,n)_{comp.}}$ klein sein verglichen mit denjenigen der Konkurrenzreaktionen, wie z. B. $\sigma_{(n,\gamma)}$ usw. Die obige Formel gilt aber nur, wenn keine Potentialstreuung (Fall (ii)) auftritt, d.h. ohne elastische Streuung auf der "Oberfläche" des Targetkernes, bei der das Geschoss nicht ins Target eindringt und also keinen Zwischenkern erzeugt.

Ein normaler, elastischer Streuvorgang umfasst eine kohärente Mischung aus Resonanz- und Potentialstreuung, so dass der resultierende, totale, elastische Streuquerschnitt einen Term mit dem Beitrag der Potentialstreuung enthalten muss. Man kann zeigen, dass der resultierende Ausdruck für den totalen Querschnitt der elastischen Streuung, bei der S-Neutronen auf ein Target mit Kernspin I = 0 treffen, durch den absoluten Betrag von

$$\sigma_{(n,n)\,tot} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \left| \frac{\Gamma_n}{(E-E_0) + i\Gamma} + e^{ikR} \sin kR \right|^2 \qquad (16.101)$$

gegeben ist. Darin ist k die Wellenzahl des einfallenden Neutrons ausserhalb des Targetkernes und R der Kernradius.

Wenn nur Shape-elastische Streuung vorliegt, so fällt der erste Summand weg, und der Wirkungsquerschnitt reduziert sich für Fall (ii) von (16. 101) auf

$$\sigma_{(n,n)\,shape} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \sin^2 kR , \qquad (16.102)$$

was sich für kleine Energien ($E \rightarrow 0$) weiterhin zu

$$\sigma_{(n,n)\,shape} \cong 4\pi R^2 \qquad (16.103)$$

vereinfacht, da dann $kR \ll 1$ ist. Gleichung (16. 103) stellt den Wirkungsquerschnitt der Potential-streuung für eine undurchdringliche Kugel dar, wenn $R \ll \lambda\!\!\!^{-}$ ist. Compound-elastische Streuung wird bei genügend hohen Geschossenergien sehr unwahrscheinlich, da das Zwischenkernsystem viele Ausgangskanäle aufweist. Immerhin werden die Amplituden der verschiedenen, auslaufenden Wellen (z. B. mit Hilfe des optischen Modells berechnet) identifiziert mit jenen Amplituden, die aus der Resonanztheorie erhalten worden sind, nachdem man über ein Energieintervall mit vielen Zuständen des Zwischenkernsystemes gemittelt hat.

Dann erhält man für sehr kleine Energien ($kR \ll 1$) und S-Neutronen die folgenden Ausdrücke für die in Abschn. 16. 7. 4 eingeführten Wirkungsquerschnitte

$$\sigma_{(n,n)\,shape} = 4\pi R'^2 ; \qquad (16.104)$$

$$\sigma_{(n,n)\,compound} = 4\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma_n}{D} ; \qquad (16.105)$$

$$\sigma_{(n,n)\,tot} \equiv \sigma_{el} = 4\pi \left[R'^2 + \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma_n}{D} \right] ; \qquad (16.106)$$

$$\sigma_{absorpt.} = 4\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n}{D} ; \qquad (16.107)$$

$$\sigma_r = 4\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n}{D} \left[1 - \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right] ; \qquad (16.108)$$

$$\sigma_{tot} = 4\pi R'^2 + 4\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2} . \frac{\Gamma_n}{D} . \qquad (16.109)$$

Man merke sich, dass Γ_n, Γ und D Mittelwerte über viele Resonanzen sind. R' ist die STREUAMPLITUDE (SCATTERING LENGTH) und resultiert aus der Beschreibung der Neutronenstreuung mit einer Entwicklung nach PARTIELLEN STREUAMPLITUDEN (PARTIAL SCATTERING AMPLITUDES) c_ℓ . Weit weg vom Streuzentrum hat die Wellenfunktion die Form

$$\psi \approx e^{ikz} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{c_\ell}{r} \cdot e^{ikr} \cdot P_\ell (\cos \vartheta) . \qquad (16.110)$$

Im speziellen Fall einer grossen Wellenlänge, $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{1}{k} \gg R$, muss nur der erste Term der Summe (ℓ = 0) berücksichtigt werden, (S-Streuung) :

$$\psi \approx e^{ikz} - \frac{R'}{r} e^{ikr} . \qquad (16.111)$$

Der erste Term in (16.111) entspricht dem Beitrag des einfallenden Neutronenstrahles, der zweite Term demjenigen des gestreuten Neutrons. Die Streuamplitude kann beide Vorzeichen haben; wenn Absorption vorliegt, wird R' komplex. Man sieht direkt, dass der Shape-elastische Streuquerschnitt gegeben ist durch

$$\sigma_{(n,n)\, shape} = \frac{\text{emittierter, gestreuter Neutronenstrom}}{\text{einfallender Neutronenstrom}} \qquad (16.112)$$

$$= 4\pi v^2 \frac{\left| \frac{R'}{r} e^{ikr} \right|^2}{v \left| e^{ikz} \right|^2} \qquad (16.113)$$

$$= 4\pi R'^2 , \qquad (16.114)$$

wo v die Neutronengeschwindigkeit bedeutet.

Der Term $\frac{2\Gamma_n}{D}$ wird gewöhnlich als STRENGTH FUNCTION bezeichnet; er hängt direkt ab vom Absorptionsquerschnitt, der aus dem optischen Modell berechnet wird. Ähnlich wie die optischen Absorptions- und Dispersionskurven hat er in Funktion der Massenzahl A überall dort Maxima, wo die Streulänge R' Sprünge aufweist. Zwischen den Resonanzen ist R' von derselben Grössenordnung wie der Kernradius R.

Für allgemeinere Fälle elastischer Streuung als die oben betrachteten sind die Wirkungsquerschnitte sehr viel komplizierter und werden deshalb hier nicht diskutiert.

16.7.6 Anwendung auf Kernreaktionen

Bei der Anwendung der vorausgegangenen Theorie auf Resonanzkernreaktionen sollte man sich stillschweigend merken, dass die Formeln in praktischen Fällen fast immer ein wenig modifiziert und den spezifischen Umständen einer gegebenen Reaktion angepasst werden müssen. Daher kann man für die folgenden numerischen Beispiele nicht erwarten, dass die experimentellen Daten mit den einfachen Breit-Wigner-Ausdrücken für die Werte der Resonanzquerschnitte zahlenmässig genau übereinstimmen. Eine Übereinstimmung in der Grössenordnung muss in diesem Falle bereits als befriedigend betrachtet werden; andererseits decken sich ausführlichere theoretische Berechnungen gewöhnlich sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen.

Nützliche Zusammenstellungen von Werten und Kurven der Neutronen-Streu- und Absorptionsquerschnitte findet man bei Goldsmith, Ibser und Feld in (RMP 1947, 19, 259), bei Feld in Segrè: "Experimental Nuclear Physics" 1953, Bd. II, und im Brookhaven Nat. Lab. Report BNL 325 (1958). Daten für Reaktionen geladener Teilchen finden sich dagegen in Los Alamos Report LA-2014 (1956). Lane (RMP 1960, 32, 519) gibt einen Überblick über die neuesten Daten für reduzierte Niveaubreiten leichter und mittelschwerer Kerne.

In den folgenden Paragraphen wird eine detaillierte Anwendung auf eine Reihe von Kernreaktionen behandelt werden.

Im Fall von Neutroneneinfang ist der empirische Verlauf von Γ_γ im allgemeinen konstant für alle Kerne; ferner gilt $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ bei kleinen Energien E_n, so dass die Wahrscheinlichkeit einer Wiederausstrahlung des Neutrons in einem (n, n)-Prozess sehr klein ist, verglichen mit der Wahrscheinlichkeit eines (n, γ)-Einfanges. Das trifft vor allem für mittelschwere und schwere Elemente zu, wo $\Gamma_n \sim 10^{-3}$ eV gegenüber $\Gamma_\gamma \sim 10^{-2} \ldots 1$ eV beträgt. Man merkt sich, dass für $\Gamma_n \sim 10^{-3}$ eV die mittlere Niveaulebensdauer $\tau \sim 10^{-12}$ sec. beträgt, so dass ein eingefangenes Neutron den Kern im Mittel ca. 10^9-mal durchquert, bevor es entweichen kann.

Eine auffallende Übereinstimmung zwischen einfacher Theorie und Experiment hat Sailor (PR 1953, 91, 53) für den $Rh^{103}(n, \gamma)$-Einfang bei der 1,26-eV-Resonanz erhalten. Fig. 16.20 zeigt seine Resultate, zusammen mit der theoretischen Kurve aus der Breit-Wigner-Single-Level-Formel, geschrieben als

$$\sigma_T = \sigma_{(n,n)\,tot} + \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \cdot \frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2}, \qquad (16.115)$$

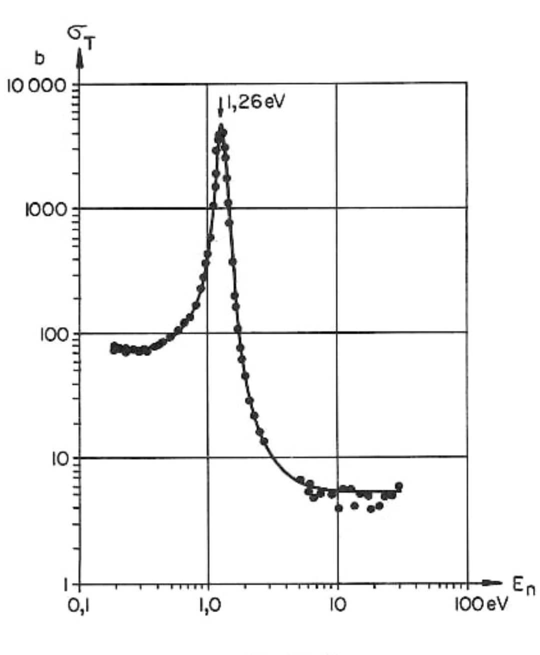


Fig. 16.20

wo σ_T den totalen Wirkungsquerschnitt und σ_0 den Wert des totalen Wirkungsquerschnittes bei der Resonanzenergie $E = E_n = E_0$ bedeutet.

Dies ist ein gutes Beispiel für die Anwendbarkeit der einfachen Theorie. Einerseits passt zwar die Kurve in Fig. 16.20 ausgezeichnet zu den Messpunkten, doch ist dabei der Resonanzquerschnitt als Parameter (σ_0 = 5000 b) gewählt worden, damit er mit dem experimentellen Wert übereinstimmt; die anderen Anpassungsparameter sind $\sigma_{(n,n)\,tot}$ = 5,5 b und $\Gamma = 7{,}8 \cdot 10^{-2}$ eV mit $g\Gamma_n = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ eV. Der Wert des Spinfaktors g ist nicht eindeutig bestimmt worden. Da der Spin im Grundzustand von Rh^{103} sehr wahrscheinlich $I = \frac{1}{2}$ ist, folgt, dass g entweder $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{4}$ beträgt. Wahrscheinlicher ist $g = \frac{3}{4}$, woraus $\Gamma_n = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ eV folgt.

Andererseits wird $\Gamma_n = 3{,}9 \cdot 10^{-4}$ eV als neuerer Wert in BNL-325 (1958) angegeben.

Es ist aufschlussreich, den Resonanzquerschnitt σ_0 auf dieser neuen Basis zu berechnen und ihn mit dem experimentellen Resultat aus der obigen Publikation zu vergleichen:

$$\sigma_{(n,\gamma)_0} = (\sigma_T)_0 - \sigma_{(n,n)} \cong 4800 - 5 \cong 4800 \text{ b}. \qquad (16.116)$$

Der Resonanzquerschnitt σ_0 kann für die numerische Berechnung bequemer geschrieben werden als

$$\sigma_0 \equiv \sigma_{(n,\gamma)_0} = \pi \lambda\!\!\!^-{}^2 (2\ell+1) . \frac{4\,\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}\, g \qquad (16.117)$$

$$= \frac{\pi \hbar^2}{2 M_n E_0} (2\ell + 1) \frac{4\,\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}\, g . \qquad (16.118)$$

Setzt man die Resonanzenergie $E_n = E = E_o$ in eV ein, so wird der Ausdruck für niederenergetische Neutronen (ℓ = 0) gleich

$$\boxed{\sigma_0 \equiv \sigma_{(n,\gamma)_0} = \frac{2{,}60 \, . \, 10^6}{E_0\,(eV)} . \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}\, g \quad barn.} \qquad (16.119)$$

Setzt man die Werte für E_o = 1,26 eV, Γ_n = 3,9 . 10^{-4} eV, Γ_γ = 7,8 . 10^{-2} eV, g = $\frac{3}{4}$ ein, so wird

$$\sigma_0 \equiv \sigma_{(n,\gamma)_0} = 7738 \ b , \qquad (16.120)$$

was zwar die richtige Grössenordnung hat, aber 1,6 mal so gross ist wie der experimentelle Wert. -

Wenn man zu leichten Elementen übergeht, findet man viel grössere Werte für Γ_n. Diese können sogar die entsprechenden Werte der Γ_γ übersteigen; z. B. sind die Parameter für die 337-eV-Resonanz von Mn^{55} gleich Γ_n = 13 eV und $\Gamma_\gamma \cong$ 0,2 eV. Die einfache Theorie liefert hier $\sigma_T \approx \sigma_{(n,n)} + \sigma_{(n,\gamma)} \approx$ 4000 b. Das steht in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von Seidl (PR 1949, 75, 1508). Hingegen haben spätere Messungen von Bollinger et al. (PR 1955, 100, 126) (siehe Fig. 16.21) das σ_T auf ein $(\sigma_0)_{exp}$ = 2000 b reduziert, und damit die Übereinstimmung zwischen Experiment und einfacher Theorie lediglich innerhalb derselben Grössenordnung verschlechtert. Immerhin hat Krotkov (Canad. J. Phys. 1955, 33, 622) unter Verwendung einer ausgereifteren Theorie (Reaktions-Matrix-formalismus für die Dispersionstheorie, angewendet auf Resonanzreaktionen) die auffallende Übereinstimmung erhalten, die Fig. 16.22 zeigt.

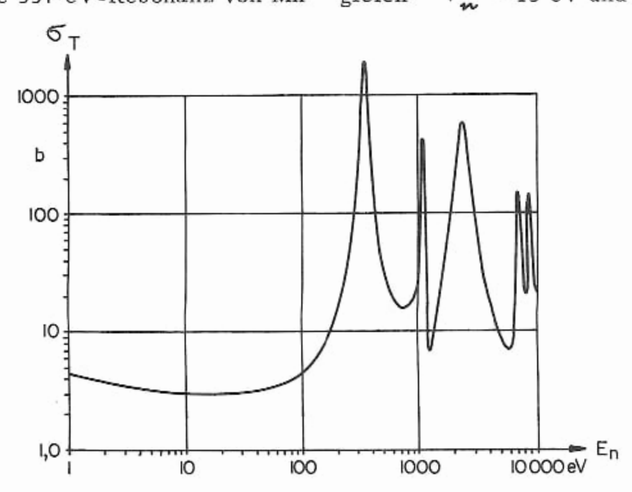


Fig. 16.21

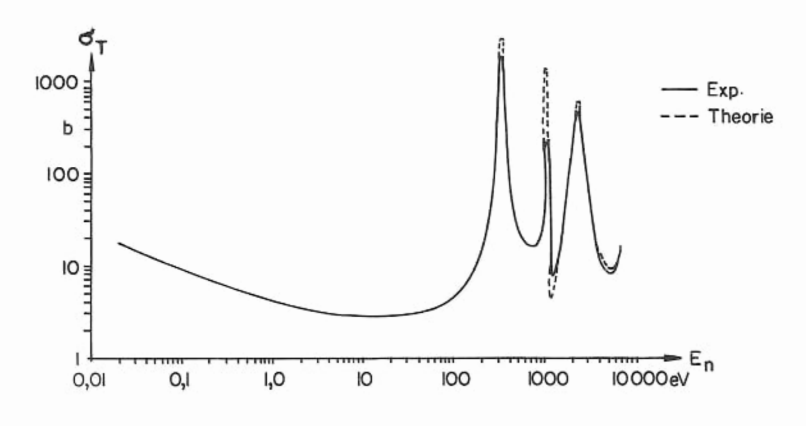


Fig. 16.22

Bei sehr leichten Elementen (Z $\lesssim$ 8) finden keine (n, γ)-Resonanzen statt. Andererseits zeigen diese Elemente (n, p)- und (n, α)-Resonanzen.

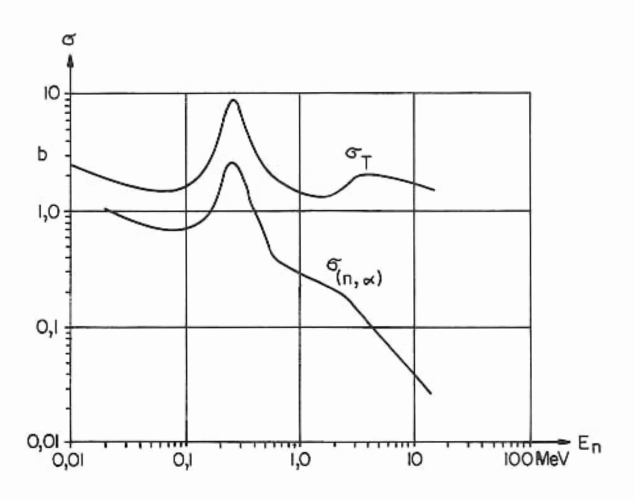


Fig. 16.23

Auf Reaktionen, die Eingangs- oder Ausgangskanäle mit geladenen Teilchen aufweisen, ist die Breit-Wigner-Formel ebenfalls anwendbar, wenn der Einfluss der Coulomb-Potentialbarriere im Transmissionskoeffizienten berücksichtigt wird. Wenn die Energie der betreffenden geladenen Teilchen die Höhe der Coulomb-Barriere übersteigt, können Resonanzen beobachtet werden; z. B. zeigt Fig. 16. 23 die breite Resonanz bei E_o = 284 keV, die für die $Li^6(n,\alpha)H^3$-Reaktion gefunden worden ist.

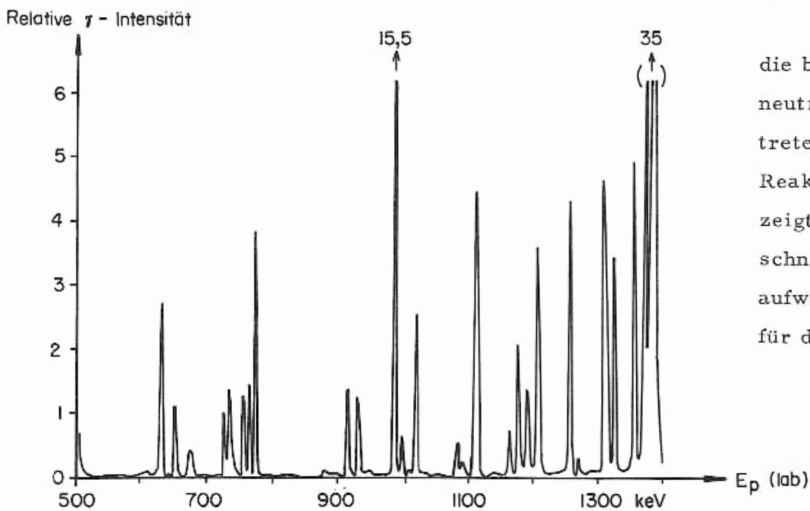


Fig. 16.24

Ein Beispiel für Resonanzen, die bei geladenen Geschossen und neutralem, emittiertem Teilchen auftreten, liefert die $N^{14}(p,\gamma)O^{15}$-Reaktion (Q = 7,347 MeV). Fig. 16. 24 zeigt den Verlauf des Wirkungsquerschnittes, der äusserst scharfe Spitzen aufweist, die charakteristisch sind für die (p,γ)-Reaktion.

Eine Reaktion mit geladenen einfallenden und emittierten Teilchen ist $N^{14}(\alpha,p)O^{17}$, (Q = 1,198 MeV); den Verlauf ihres Wirkungsquerschnittes zeigt Fig. 16. 25.

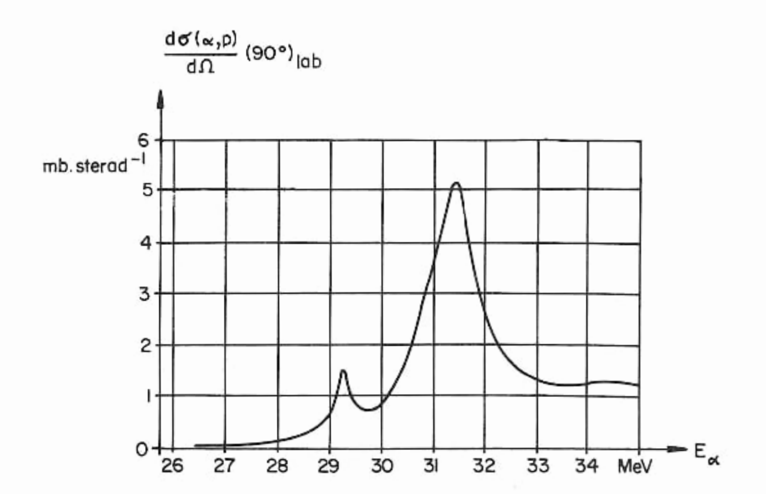


Fig. 16.25

Eine Zusammenstellung von Resonanzdaten findet man in den Artikeln in Segrè: "Experimental Nuclear Physics" 1953 II, verfasst von Morrison (S. 64 ff.) und von Feld (S. 286 ff.). Eine ziemlich ausführliche Beschreibung von Resonanzreaktionen findet sich auch in Endt und Demeur: "Nuclear Reactions" 1959, S. 215-317.

16.7.7 Inverse Reaktionen

Es ist sehr interessant, zueinander inverse Reaktionen zu untersuchen, die zur Bildung desselben Zwischenkernes führen. Ein Beispiel ist die Reaktion $Al^{27}(p,\alpha)Mg^{24}$ und ihre inverse, $Mg^{24}(\alpha,p)Al^{27}$, die beide über den Zwischenkern Si^{28} verlaufen. Resonanzen, die angeregten Niveaus von Si^{28} entsprechen und die Kaufmann et al. (PR 1952, 88, 673) aus den Ausbeutekurven dieser zwei Reaktionen bestimmt haben, zeigen untereinander eine bemerkenswerte Übereinstimmung (Fig. 16.26), unter Berücksichtigung des Kernspins und des Q-Wertes der (p,α)-Reaktion (Q = 1,613 MeV). Sie bilden also eine sehr starke Stütze für die Zwischenkernhypothese zur Erklärung von Resonanzreaktionen.

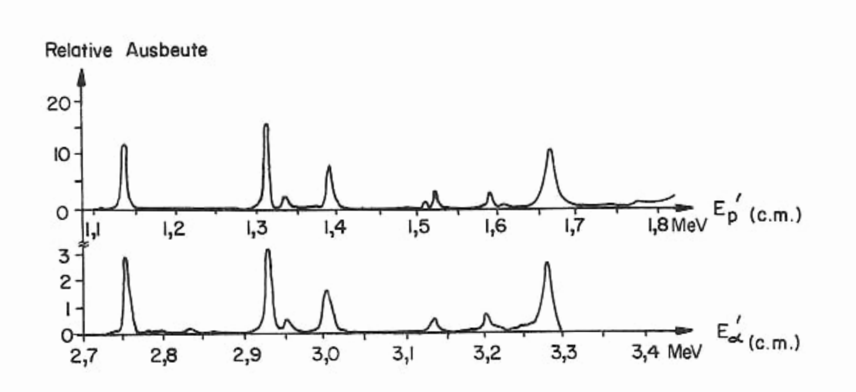


Fig. 16.26

16.8 Protonen-Eichenergien

Scharfe Resonanzspitzen können zur Energieeichung von Teilchenbeschleunigern verwendet werden, wie z. B. von elektrostatischen Generatoren, speziell, wenn letztere in Verbindung mit Analysatormagneten angewendet werden. Sorgfältige Messungen mit reinen, dünnen Targets und stabilisierten Strahlen mit scharfen Energien liefern nach Berücksichtigung möglicher Dopplereffekte und anderer störender Faktoren Bezugsnormen, von denen einige unten in Tab. 16.3 eingetragen sind. Der primäre Standard-Wert, der üblicherweise verwendet wird, ist die 993,3 ± 1 keV-Resonanz in der $Al^{27}(p,\gamma)Si^{28}$-Reaktion.

Tab. 16.3

Laborenergie E_p keV	Reaktion	Unschärfe $\delta E_{(lab)}$ keV
224,4 ± 0,2	$F^{19}(p,\gamma)$	1,0 ± 0,3
294,1 ± 0,5	$Al^{27}(p,\gamma)$	< 1
325,6 ± 0,4	$Al^{27}(p,\gamma)$	< 1
340,4 ± 0,4	$F^{19}(p,\alpha\gamma)$	4,5 ± 1,5
418,0 ± 0,5	$Mg^{24}(p,\gamma)$	4,0 ± 1,0
456,8 ± 0,5	$C^{12}(p,\gamma)$	39,5 ± 1,0
993,3 ± 1,0	$Al^{27}(p,\gamma)$	≈ 0,1
1347 ± 2	$F^{19}(p,\alpha\gamma)$	4,5
1748 ± 5	$N^{14}(p,\gamma)$	11 ± 3
2356 ± 8	$N^{14}(p,\gamma)$	14 ± 4
3015 ± 3	$B^{11}(p,n)$	
4213 ± 8	$Cu^{63}(p,n)$	
5053 ± 10	$Na^{23}(p,n)$	
5792 ± 10	$Al^{27}(p,n)$	

16.9 Streukinematik

16.9.1 Bezeichnungen

In den folgenden Abschnitten werden die Bezeichnungen und Resultate aus Anhang B verwendet werden, in welchem die elastische Streuung eines bewegten Teilchens mit Masse m_1, das auf ein ruhendes Target m_2 trifft, behandelt wird, und zwar nicht-relativistisch (Abschn. B. 1) und relativistisch (Abschn. B. 2).

Eine sehr vollständige Zusammenstellung von Reaktionsmechanismen geben Baldin, Gol'danskii und Rozenthal in "Kinematics of Nuclear Reactions" (1961), sowie auch Hanson, Taschek und Williams in Reviews of Modern Physics 1949,21,635.

Im Laborsystem werden ungestrichene Grössen verwendet, im Schwerpunktssystem (centre-of-mass system; c. m.) gestrichene, also:

Tab. 16.4

	Laborsystem	Schwerpunktssystem
Anfangsgeschwindigkeit von m_1	u_1	u_1'
Anfangsgeschwindigkeit von m_2	$u_2 = 0$	u_2'
Endgeschwindigkeit von m_1	v_1	$\lvert v_1' \rvert = \lvert u_1' \rvert$
Endgeschwindigkeit von m_2	v_2	$\lvert v_2' \rvert = \lvert u_2' \rvert$
Schwerpunktsgeschwindigkeit	$v_S = \lvert u_2' \rvert$	0
Streuwinkel von m_1	ϑ_1	ϑ_1'
Rückstosswinkel von m_2	ϑ_2	ϑ_2'

Das Schwerpunktssystem ist dadurch ausgezeichnet, dass darin die Summe aller Impulse gleich Null ist,

$$\sum \vec{p}\,' = 0, \qquad (16.121)$$

und dass es, auf Streuungsberechnungen angewendet, jedes Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem reduziert, d.h. auf die Wechselwirkung eines Teilchens der reduzierten Masse

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (16.122)$$

und Geschwindigkeit u_1 mit einem Potentialfeld, dessen Ursprung immer im Schwerpunkt S angenommen werden kann. Wie das Laborsystem, so ist auch das Schwerpunktssystem ein Inertialsystem, und daher erfolgt der Übergang vom einen ins andere über eine Lorentz-Transformation.

16. 9. 2 Zusammenstellung nichtrelativistischer, kinematischer Formeln (Elastische Streuung)

Tab. 16. 5 ist eine Zusammenstellung von Formeln, die entweder direkt aus Gleichungen in Abschn. B. 1 übertragen worden sind oder dann leicht aus diesen abgeleitet werden können; die Ausdrücke sind speziell auf Streuungsberechnungen zugeschnitten. Das betreffende Vektordiagramm zeigt Fig. 16. 27.

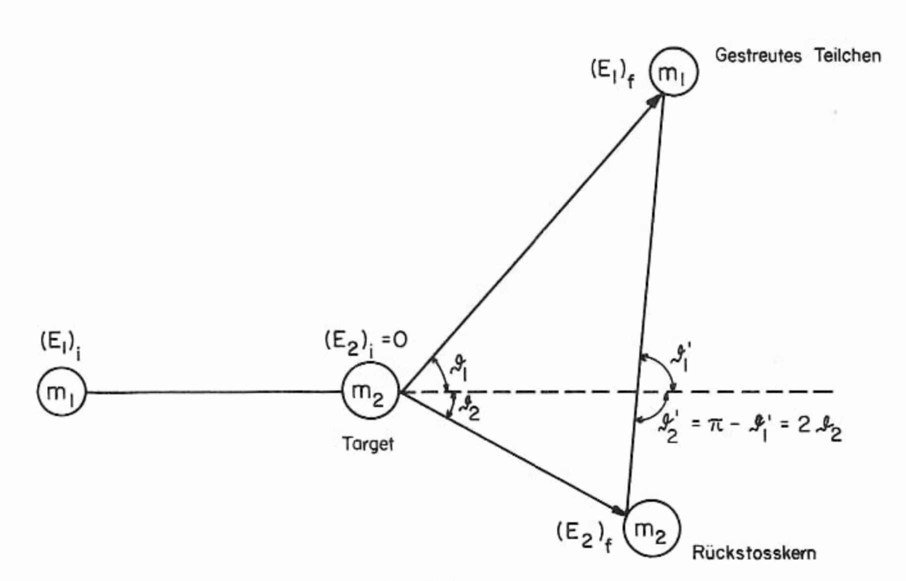


Fig. 16.27

In Tab. 16. 5 werden dabei folgende Abkürzungen verwendet:

$$k \equiv \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (16.123)$$

mit

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \qquad (16.124)$$

$$\mu_2 \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (16.125)$$

Tab. 16.5

Grösse	Formel
Reduzierte, kinetische Schwerpunktsenergie von m_1	$\frac{(E_1')_i}{(E_1)_i} = \frac{(E_1')_f}{(E_1)_i} = \mu_2^2$
Reduzierte, kinetische Schwerpunktsenergie des Rückstosskernes	$\frac{(E_2')_f}{(E_1)_i} = \mu_1 \mu_2$
Reduzierte Laborenergie des gestreuten Teilchens	$\frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = 1 - 2\mu_1\mu_2(1 - \cos\vartheta_1')$ $= \mu_1^2\left(\cos\vartheta_1 \pm \sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2\vartheta_1}\right)^2,$ wobei das "+"-Zeichen gilt, ausser wenn $m_1 > m_2$, wobei dann $(\vartheta_1)_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{k}\right).$
Reduzierte Laborenergie des Rückstosskernes	$\frac{(E_2)_f}{(E_1)_i} = 1 - \frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = 4\mu_1\mu_2\cos^2\vartheta_2 \quad \text{mit } \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$
Rückstosswinkel im Laborsystem	$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_2'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_1'}{2}$ $\sin\vartheta_2 = \sqrt{k \cdot \frac{(E_1)_f}{(E_2)_f}} \cdot \sin\vartheta_1$
Streuwinkel im Laborsystem	$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\sin\vartheta_1'}{k + \cos\vartheta_1'} = \frac{\sin 2\vartheta_2}{k - \cos 2\vartheta_2}$
Streuwinkel im Schwerpunktssystem	$\vartheta_1' = \pi - \vartheta_2' = \pi - 2\vartheta_2$ $\vartheta_1' = \vartheta_1 + \arcsin(k \sin\vartheta_1)$ $\cos\vartheta_1' = 1 - 2\cos^2\vartheta_2$
Rückstosswinkel im Schwerpunktssystem	$\vartheta_2' = 2\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1'$
Intensitäts- oder Raumwinkelverhältnis für das gestreute Teilchen	$\frac{\sigma(\vartheta_1')}{\sigma(\vartheta_1)} = \frac{I(\vartheta_1')}{I(\vartheta_1)} = \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_1'} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\vartheta_1'}$ $= \frac{\sin^2\vartheta_1}{\sin^2\vartheta_1'} \cdot \cos(\vartheta_1' - \vartheta_1)$ $= \mu_1\mu_2 \cdot \frac{(E_1)_i}{(E_1)_f} \cdot \sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2\vartheta_1}$
Intensitäts-oder Raumwinkelverhältnis für den Rückstosskern	$\frac{\sigma(\vartheta_2')}{\sigma(\vartheta_2)} = \frac{I(\vartheta_2')}{I(\vartheta_2)} = \frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_2'} \cdot \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_2'} = \frac{1}{4\cos\vartheta_2}$

16.9.3 Rutherford-Streuung geladener Teilchen

Die elastische Streuung durch eine Kraft, die reziprok-quadratisch vom Teilchenabstand abhängt, wie z. B. die Coulomb-Abstossung geladener Teilchen, ist zum erstenmal von Rutherford anhand der α -Streuung klassisch behandelt worden.

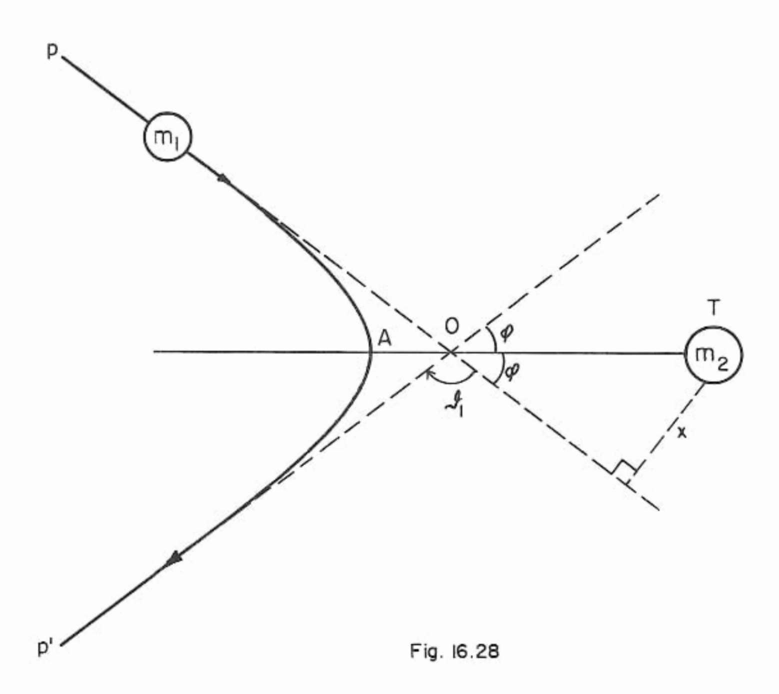


Fig. 16.28

Das Problem wird sehr vereinfacht, indem man annimmt, dass der Targetkern bei T mit Ladung Ze so schwer ist ($m_2 \gg m_1$), dass sein Rückstoss vernachlässigt werden kann. Wenn die Bahn ursprünglich in der $\overrightarrow{PO}$-Richtung mit STOSSPARAMETER (IMPACT PARAMETER) x (Fig. 16.28) liegt, beschreibt das Geschoss der Masse m_1 und Ladung ze eine Hyperbelbahn PAP' um den äusseren Brennpunkt T. (Wenn m_2 nicht in Ruhe wäre, so wäre die Bahn im Schwerpunktssystem eine Hyperbel, nicht aber im Laborsystem.) Es sei ϑ_1 der Laborstreuwinkel und s der kleinste Abstand $\overline{AT}$ vom Target. Die Geschwindigkeit des Geschosses variiert längs seiner Bahn (vgl. Keplersches Gesetz) : Es sei V ihr Wert bei P und v derjenige bei A.

Der Drallsatz bezüglich T fordert, dass

$$m_1 V x = m_1 v s , \qquad (16.126)$$

woraus

$$x = \frac{v}{V} \cdot s . \qquad (16.127)$$

Weiter liefert der Energiesatz die Beziehung, dass

totale Energie bei P = totale Energie bei A (16.128)

sei,

$$\frac{1}{2} m_1 V^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{Z z e^2}{s} , \qquad (16.129)$$

woraus

$$v^2 = V^2 \left(1 - \frac{2 Z z e^2}{m_1 V^2 s} \right), \qquad (16.130)$$

also

$$v^2 = V^2 \left(1 - \frac{b}{s} \right), \qquad (16.131)$$

wo

$$b \equiv \frac{Z z e^2}{\frac{1}{2} m_1 V^2} . \qquad (16.132)$$

Darin ist b eine vereinfachte Form des sogenannten STOSSDURCHMESSERS (COLLISION DIAMETER), der streng definiert wird als

$$\boxed{b = \frac{2|Zz|\,e^2}{\mu V^2}} \qquad (16.133)$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{m_1 \ll m_2} m_1 . \qquad (16.134)$$

Es zeigt sich, dass der Stossdurchmesser die grösstmögliche Annäherung zwischen sich abstossenden, geladenen Teilchen bei zentralem Stoss darstellt.

Die Grössen b und s hängen wie folgt mit dem Streuwinkel zusammen: Die Exzentrizität der Hyperbel PAP' ist

$$\varepsilon = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \frac{\overline{TO}}{\overline{OA}} , \qquad (16.135)$$

woraus

$$s \equiv \overline{AT} = \overline{AO} + \overline{OT} = \overline{OT}\,(\cos\varphi + 1) , \qquad (16.136)$$

also

$$s = \frac{x}{\sin\varphi}\left(1 + \cos\varphi\right) = x \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} . \qquad (16.137)$$

Aus (16. 127) und (16. 131) folgt

$$x^2 = \frac{v^2}{V^2}\, s^2 = \left(1 - \frac{b}{s}\right) s^2 = (s - b)\, s \qquad (16.138)$$

und, indem man (16. 137) für s substituiert,

$$x^2 = \left(x \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - b\right) x \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} , \qquad (16.139)$$

woraus

$$b = 2x \operatorname{ctg}\varphi . \qquad (16.140)$$

Doch ist

$$\vartheta_1 = \pi - 2\varphi , \qquad (16.141)$$

so dass

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_1}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\varphi . \qquad (16.142)$$

Daher ist wegen (16. 140) der Stossdurchmesser gleich

$$b = 2x \operatorname{tg}\frac{\vartheta_1}{2} . \qquad (16.143)$$

Ein interessanter Punkt bei dieser Rechnung ist die Tatsache, dass Formeln wie (16. 143), die man aus der vereinfachten Behandlung ohne Targetrückstoss erhält, direkt auf die entsprechenden strengen Ausdrücke (Kernrückstoss nicht vernachlässigt) umgeschrieben werden können, indem man einfach den Laborstreuwinkel ϑ_1 durchwegs durch den Schwerpunktswinkel ϑ_1' ersetzt. Natürlich fällt für $m_1 \ll m_2$, und damit $\vartheta_1 \approx \vartheta_1'$, der Unterschied zwischen Labor- und Schwerpunktssystem dahin. Dennoch wird diese Unterscheidung in den folgenden Paragraphen beibehalten werden, damit die physikalischen Schlussfolgerungen eindeutig bleiben. So wird (16. 143) also strikte als

$$\boxed{b = 2x \operatorname{tg}\frac{\vartheta_1'}{2}} \qquad (16.144)$$

geschrieben.

Aus (16.144) sieht man, dass der Schwerpunktsstreuwinkel $\vartheta_1' = 90^\circ$ beträgt, wenn der Stossparameter x gleich dem STOSSRADIUS (COLLISION RADIUS) $b/2$ ist.

Bei allen Stössen, wo der minimale Annäherungsabstand b wesentlich grösser ist als der Targetradius, wirkt bei der Streuung nur die Coulomb-Abstossung. Ein Stossparameter x oder kleiner ($\rightarrow 0$) bewirkt eine Streuung um einen entsprechenden Schwerpunktswinkel ϑ_1' oder grösser ($\rightarrow 180^\circ$). Der Wirkungsquerschnitt für Streuung unter einem Winkel ϑ_1' oder grösser ist einfach die Fläche eines Kreises vom Radius x, also

$$\sigma(\geq \vartheta_1') = \pi x^2 = \frac{\pi}{4} b^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta_1'}{2}. \qquad (16.145)$$

Wenn Geschoss und Targetkern dieselbe Masse haben, so heisst die Beziehung zwischen Laborwinkel ϑ_1 und Schwerpunktswinkel ϑ_1'

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_1'}{2}, \qquad (\text{für } m_1 = m_2) \qquad (16.146)$$

woraus in diesem Falle folgt:

$$\sigma(\geq \vartheta_1') = \pi x^2 = \frac{\pi}{4} b^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1, \qquad (16.147)$$

so dass im Laborsystem keine Rückstreuung (backscattering) ($\vartheta_1 > 90^\circ$) vorkommt. Wenn das Geschoss viel leichter ist als das Target, gilt $\vartheta_1 \approx \vartheta_1'$ und der Rückstreuquerschnitt ($\vartheta_1' \geq 90^\circ$) wird einfach

$$\sigma_{Rück} = \frac{\pi}{4} b^2. \qquad (16.148)$$

Das ist die Fläche eines Kreises, dessen Radius gleich dem Stossradius $b/2$ ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma'$ für Streuwinkel zwischen ϑ_1' und $\vartheta_1' + d\vartheta_1'$ (also Stossparameter zwischen x und x-dx) ist die Fläche eines Kreisringes mit mittlerem Radius x und der Breite dx, nämlich

$$d\sigma' = 2\pi x\, dx = \frac{\pi}{4} b^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta_1'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1'}{2}}\, d\vartheta_1'. \qquad (16.149)$$

Der entsprechende Raumwinkel der Streuung ist

$$d\Omega' = 2\pi \sin \vartheta_1' d\vartheta_1' = 4\pi \sin \frac{\vartheta_1'}{2} \cos \frac{\vartheta_1'}{2}\, d\vartheta_1'. \qquad (16.150)$$

Somit beträgt der RUTHERFORD'SCHE DIFFERENTIELLE WIRKUNGSQUERSCHNITT (auch als COULOMB-WIRKUNGSQUERSCHNITT bezeichnet):

$$\boxed{\sigma_{Ruth}(\vartheta_1') \equiv \sigma_R(\vartheta_1') \equiv \frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{b}{4 \sin^2 \frac{\vartheta_1'}{2}}\right)^2.} \qquad (16.151)$$

Das ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung in einen Raumwinkel $d\Omega'$ mit mittlerem Winkel ϑ_1'.

16.9.4 Mott-Streuung

Es liegt im Wesen des klassischen, differentiellen Wirkungsquerschnittes für Coulomb-Streuung, dass er die Spins der stossenden Teilchen ausseracht lässt. Wenn aber zwei gleiche Teilchen mit von Null verschiedenem Spin stossen, wie z. B. bei der p-p-Streuung, beeinflusst ihre gegenseitige Austauschwechselwirkung die Streuverteilung. Letztere erfordert daher eine

quantenmechanische Behandlung (Landau und Lifshitz: "Quantum Mechanics" 1958 S. 423), die für nichtrelativistische Teilchen die MOTT'SCHE STREUFORMEL für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem liefert:

$$\sigma_M(\vartheta_1') \equiv \frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{e^2}{m_1 V^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta_1'}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta_1'}{2}} - \frac{\Phi}{\sin^2 \frac{\vartheta_1'}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_1'}{2}}\right), \quad (16.152)$$

wo

$$\Phi \equiv \cos\left[\frac{e^2}{\hbar V} \ln tg^2\left(\frac{\vartheta_1'}{2}\right)\right]. \quad (16.153)$$

Die Rutherford'sche Formel erhält man durch Nullsetzen des Quantenkorrekturtermes Φ. Die obige Mott-Formel gilt nur streng für kleine Geschossenergien, z. B. Energien einfallender Protonen, $E_p < 0,4$ MeV, denn sonst wird die reine Coulomb-Wechselwirkung durch Teilchen-Teilchen-Kräfte verändert. Für kleine Geschwindigkeiten (niedrige Energien) ist $e^2 \gg \hbar V$ und Φ eine rasch oszillierende Funktion, die beim Mitteln über einen nur sehr kleinen Bereich von ϑ_1' bereits verschwindet.

Im Grenzübergang für hohe Energien ist $e^2 \ll \hbar V$, und man kann $\Phi = 1$ setzen, so dass der differentielle Wirkungsquerschnitt gleich

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{2e^2}{m_1 V^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4 - 3\sin^2 \vartheta_1'}{\sin^4 \vartheta_1'}\right) \quad (16.154)$$

wird. Die Formel kann auch auf den Laborstreuwinkel

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_1'}{2} \quad (16.155)$$

umgeschrieben werden unter Berücksichtigung der Beziehung

$$d\Omega' = 4\cos\vartheta_1 \cdot d\Omega$$

aus (B. 32) mit k = 1.

16. 9. 5 Wirkungsquerschnitt der Energieübertragung bei elastischer Streuung

Die Rückstossenergie des Targetkernes ist $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \equiv E_2$, und diese Energie verliert das Geschoss m_1 bei elastischer Streuung im Laborsystem. Wie vorher, hat der differentielle Wirkungsquerschnitt einer Energieübertragung zwischen W und W + dW die Form

$$d\sigma = 2\pi x \, dx , \quad (16.156)$$

doch möchte man ihn eher durch E_2 als durch x ausdrücken.

Aus Tab. 16. 5 sieht man, dass

$$E_2 \equiv (E_2)_f = 4\mu_1\mu_2 \cos^2\vartheta_2 \cdot \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = 2 m_2 u_1^2 \mu_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_1'}{2}\right), \quad (16.157)$$

also

$$E_2 = 2 m_2 u_1^2 \mu_1^2 \sin^2 \frac{\vartheta_1'}{2} , \quad (16.158)$$

so dass

$$dE_2 = 2 m_2 u_1^2 \mu_1^2 \sin\frac{\vartheta_1'}{2} \cos\frac{\vartheta_1'}{2} \, d\vartheta_1' . \quad (16.159)$$

Ersetzt man in (16. 149) $\sin^2 \frac{\vartheta_1'}{2}$ aus (16. 158) und $\cos\frac{\vartheta_1'}{2} d\vartheta_1'$ aus (16. 159), so ergibt sich

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} b^2 \cdot m_2 u_1^2 \mu_1^2 \cdot \frac{dE_2}{E_2^2} . \quad (16.160)$$

Substituiert man b^2, so muss man die strenge Form (16. 133) für den Stossparameter verwenden :

$$b = \frac{2|Zz|e^2}{\mu u_1^2} . \qquad (16.161)$$

Dann wird

$$\boxed{d\sigma = \frac{2\pi Z^2 z^2 e^4}{m_2 u_1^2} \cdot \frac{dE_2}{E_2^2} ,} \qquad (16.162)$$

und das ist offenbar unabhängig von der Masse m_1 des Geschosses.

Man sieht, dass der Faktor (16. 162) in den Formeln der Theorie für Mehrfachstösse vorkommt, wie z. B. im Ausdruck (4. 20) für den mittleren Streuwinkel :

$$\overline{\theta}^2 = \frac{2\pi Z^2 z^2 e^4}{\overline{E}^2} \cdot N^{\square} x_0 \ln \frac{\overline{E}\, a_0}{z Z^{4/3} e^2} . \qquad (16.163)$$

Offensichtlich wird $d\sigma$ für kleine Massen m_2 beträchtlich: man kann Energieübertragungen auf Kerne gegenüber jener auf Hüllenelektronen vernachlässigen. Der klassische Wirkungsquerschnitt pro Hüllenelektron für Energieübertragung zwischen E_2 und $E_2 + dE_2$ ist daher (mit $m_2 = m_e$ und $Z = -1$)

$$d\sigma = \frac{2\pi z^2 e^4}{m_e u_1^2} \cdot \frac{dE_2}{E_2^2} \qquad cm^2/\text{Elektron} . \qquad (16.164)$$

Die $\frac{1}{E_2^2}$ -Abhängigkeit zeigt, dass kleine Energieübertragungen bevorzugt sind; grosse Übertragungen sind unwahrscheinlich. Die Formel (16. 164) ist vor allem bei klassischen Ionisations-Problemen von Nutzen. Für die Gültigkeit der klassischen Stosstheorie lautet die Bedingung

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv \frac{\hbar}{\mu u_1} \ll b , \qquad (16.165)$$

also

$$\frac{b}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{2Zz}{137\beta} \gg 1 . \qquad (16.166)$$

16. 9. 6 Relativistische Kinematik

Das Problem der elastischen Streuung ist in Abschn. B. 2 behandelt worden; die relativistische Behandlung der Reaktionskinematik ist zu kompliziert, als dass sie hier ausgeführt werden könnte. Einige Diskussionen des allgemeinen Problems finden sich in Baldin, Gol'danskii und Rozenthal: "Kinematics of Nuclear Reactions" (1961); in den meisten Fällen können die Methoden von Blaton angewendet werden (Kgl. Dan. Vid. Selskab. , Matt. -Fys. Medd. 1950, 24, No. 20). Der vorliegende Abschnitt beschränkt sich erstens auf gewisse Ergängungen zu den Formeln für elastische Streuung in Abschn. B. 2 im Zusammenhang mit Energieübertragung, zweitens auf Angaben zur graphischen Lösung von Streuproblemen und schliesslich auf einen speziellen Fall unelastischer Streuung nämlich der Teilchenerzeugung.

a) Relativistische Energieübertragung bei elastischer Streuung

Die Rückstossenergie des Targetkernes ist gegeben durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (A. 41)

$$E_2 = \gamma_2' \left(E_2' + \beta_2' c\, p_2' \right) \qquad (16.167)$$

zu

$$T_2 = E_2 - m_2c^2 = \gamma_2' \left(\gamma_2' m_2 c^2 - \gamma_2' \beta_2' m_2 c^2 \cos \vartheta_1' \right) - m_2 c^2, \qquad (16.168)$$

wenn man aus (B. 81) und (B. 82) einsetzt. Das kann geschrieben werden als

$$\boxed{T_2 = m_2 c^2 \left[(\gamma_2')^2 - 1 \right] \left[1 - \cos \vartheta_1' \right],} \qquad (16.169)$$

oder, mit dem Rückstosswinkel ϑ_2 als

$$\boxed{T_2 = 2 m_2 c^2 \cdot \frac{(\gamma_2')^2 - 1}{(\gamma_2')^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 + 1},} \qquad (16.170)$$

indem man (B. 85) für die Substitution

$$\cos \vartheta_1' = \frac{(\gamma_2')^2 - (\gamma_2')^2 \cos^2 \vartheta_2 - \cos^2 \vartheta_2}{(\gamma_2')^2 - (\gamma_2')^2 \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_2} \qquad (16.171)$$

verwendet. Beiläufig bemerkt man aus (16. 170), dass die Rückstossenergie für $\vartheta_2 = 0$ maximal wird,

$$(T_2)_{max} = T_2 (\vartheta_2 = 0), \qquad (16.172)$$

was auch nichtrelativistisch gilt.

Durch Eliminieren von γ_2' aus (16. 170) mit Hilfe von (B. 56) erhält man

$$T_2 = 2 m_2 c^2 \cos^2 \vartheta_2 \cdot \frac{k^2 (\gamma_1^2 - 1)}{(1 + k\gamma_1)^2 + (1 - \gamma_1^2) k^2 \cos^2 \vartheta_2}, \qquad (16.173)$$

worin

$$k \equiv \frac{m_1}{m_2}. \qquad (16.174)$$

Ausgedrückt durch die totale Geschossenergie $E_1 = \gamma_1 m_1 c^2$ und -Impuls $p_1 = m_1 c \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$ aus (B. 51) und (B. 52) schreibt sich Gleichung (16. 173) als

$$\boxed{T_2 = 2 m_2 c^2 \cdot \frac{p_1^2 \cos^2 \vartheta_2}{\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_2}.} \qquad (16.175)$$

Ausgedrückt durch die Geschossenergie $T_1 = m_1 c^2 (\gamma_1 - 1)$ ergibt sich der maximale Bruchteil der vom Geschoss auf das Target übertragbaren, kinetischen Energie dadurch, dass man in (16. 173) $\vartheta_2 = 0$ setzt und vereinfacht :

$$\frac{(T_2)_{max}}{T_1} = \frac{2k(\gamma_1 + 1)}{1 + 2k\gamma_1 + k^2}. \qquad (16.176)$$

Der Wert des letzteren Ausdruckes bewegt sich zwischen dem nichtrelativistischen ($\gamma_1 \cong 1$) Grenzwert $4 \mu_1 / \mu_2$ (siehe Tab. 16. 5) und dem extrem relativistischen ($\gamma_1 \gg 1$) Grenzwert 1.

b) Graphische Lösung für elastische Streuung

Aus Impuls- und Energiesatz im Laborsystem folgt, dass

$$(p_1)_i = (p_1)_f + (p_2)_f \tag{16.177}$$

und

$$(E_1)_i + m_2 c^2 = (E_1)_f + (E_2)_f . \tag{16.178}$$

Eine graphische Darstellung der respektiven Streu- und Rückstosswinkel ϑ_1 resp. ϑ_2 zeigt Fig. 16.29. Dabei liegen alle Endpunkte von $(p_2)_f$ für ein gegebenes $(p_1)_i$ auf einer Ellipse durch A, mit Zentrum B auf $(p_1)_i$ und folgenden Dimensionen:

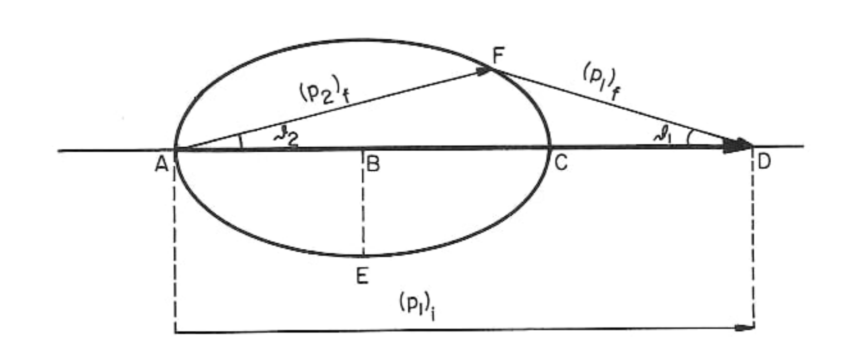


Fig. 16.29

Grosse Halbachse $\overline{AB}$:

$$a = (p_1)_i \cdot \frac{m_2 c^2 \left[(E_1)_i + m_2 c^2 \right]}{m_1 c^2 + 2 m_2 c^2 (E_1)_i + (m_2 c^2)^2} ; \tag{16.179}$$

Kleine Halbachse $\overline{BE}$:

$$b = (p_1)_i \cdot \frac{m_2 c^2}{\sqrt{m_1 c^2 + 2 m_2 c^2 (E_1)_i + (m_2 c^2)^2}} , \tag{16.180}$$

wobei a > b, ausgenommen im nichtrelativistischen Grenzfall (wenn a ≅ b). Wenn $\underline{m_1 = m_2}$ ist, dann fallen D und C zusammen, so dass $a = \frac{1}{2}(p_1)_i$ ist. Der maximale, von m_1 auf m_2 übertragene Impuls ist

$$(p_2)_{f,max} = 2a \tag{16.181}$$

und die maximale übertragene Energie

$$(T_2)_{max} = (E_2)_{f,max} - m_2 c^2 = 2a \cdot \frac{c^2 (p_1)_i}{(E_1)_i + m_2 c^2} \tag{16.182}$$

$$= 2 m_2 c^2 \cdot \frac{c^2 (p_1)_i^2}{(m_1 c^2)^2 + 2 m_2 c^2 (E_1)_i + (m_2 c^2)^2} . \tag{16.183}$$

Der maximale Streuwinkel ist gegeben durch

$$(\vartheta_1)_{max} = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \quad \text{für} \quad m_1 > m_2 ; \tag{16.184}$$

$$(\vartheta_1)_{max} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad m_1 = m_2 ; \tag{16.185}$$

$$(\vartheta_1)_{max} = \pi \quad \text{für} \quad m_1 < m_2 . \tag{16.186}$$

Der Winkel zwischen Streu- und Rückstossteilchen ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_2}{1 - \dfrac{2m_2c^2\left[(E_1)_i + m_2c^2\right]}{\left[(E_1)_i + m_2c^2\right]^2 - c^2(p_1)_i^2\cos^2\vartheta_2}} . \qquad (16.187)$$

Diese Gleichungen genügen für die Herleitung der Grenzfälle.

c) Graphische Lösung für unelastische Streuung

In diesem Falle überträgt ein Teilchen m_1 beim Stoss mit einem ruhenden Target m_2 eine innere Anregungsenergie W auf das Target und ändert dabei seine kinetische Energie, nicht aber seine Ruheenergie. Impulssatz und Energiesatz haben wieder dieselbe Gestalt wie (16. 177) und (16. 178), abgesehen davon, dass

$$(E_2)_f = T_2 + m_2c^2 + W . \qquad (16.188)$$

Das entsprechende Diagramm zeigt Fig. 16. 30, wo die Endpunkte F von $(p_2)_f$ für gegebene $(p_1)_i$ und W auf einer Ellipse liegen, und zwar so, dass $a < \bar{a} < (p_1)_i$ ist :

Fig. 16.30

$$\bar{a} = \frac{(p_1)_i}{2} \cdot \frac{\left[2m_2c^2(E_1)_i + (m_2c^2)^2 + (m_2c^2 + W)^2\right]}{\left[2m_2c^2(E_1)_i + (m_2c^2)^2 + (m_1c^2)^2\right]} . \qquad (16.189)$$

Grosse Halbachse :

$$a = \frac{m_2\left[(E_1)_i + m_2c^2\right]\sqrt{\left[(E_1)_i - W - \dfrac{W^2}{2m_2c^2}\right]^2 - \left[m_1c^2 + \left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)W\right]^2}}{2m_2c^2(E_1)_i + (m_2c^2)^2 + (m_1c^2)^2} . \qquad (16.190)$$

Kleine Halbachse :

$$b = \frac{\sqrt{2m_2c^2(E_1)_i + (m_1c^2)^2 + (m_2c^2)^2}}{m_2c^2 + (E_1)_i} \cdot a . \qquad (16.191)$$

Bedingung für unelastische Streuung :

$$T_1 \geq \frac{W}{m_2c^2}\left[m_1c^2 + m_2c^2 + \frac{W}{2}\right] . \qquad (16.192)$$

Im speziellen Falle, wo $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ ist und die Endgeschwindigkeiten der Teilchen gleich sind, gilt

$$v_1 = v_2 = c \sqrt{1 - \left[\frac{m_1 c^2 + m_2 c^2 + W}{(E_1)_i + m_2 c^2} \right]^2} \,. \qquad (16.193)$$

Im klassischen Grenzfall ist

$$a = b = \frac{m_2 \sqrt{(p_1)_i^2 - 2W \left(\frac{m_1}{m_2}\right)(m_1 + m_2)}}{m_1 + m_2} \,, \qquad (16.194)$$

$$\bar{a} = (p_1)_i \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} > a \,, \qquad (16.195)$$

und die Bedingung für unelastische Streuung reduziert sich auf

$$(E_1)_i \geq W \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} \,. \qquad (16.196)$$

d) Unelastische Streuung mit Teilchenerzeugung

In diesem speziellen Falle unelastischer Streuung ist die Schwellenenergie von m_1, die für die Erzeugung eines oder mehrerer neuer Teilchen mit totaler Ruhemasse M nötig ist, berechnet worden, und zwar für den Stoss mit einem ruhenden Target m_2.

Vor dem Stoss ist die totale Schwerpunktsenergie gleich

$$(E_1')_i + (E_2')_i = \gamma_1' m_1 c^2 + \gamma_2' m_2 c^2 = c^2 \sqrt{m_1^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2 + m_2^2} \,. \qquad (16.197)$$

Diese kann derjenigen nach dem Stoss an der Reaktionsschwelle gleichgesetzt werden (alle kinetischen Schwerpunktsenergien sind dann gleich Null):

$$(E_1')_f + (E_2')_f = c^2 (m_1 + m_2 + M) = (E_1')_i + (E_2')_i \,. \qquad (16.198)$$

Aus der Beziehung

$$(T_1)_i = m_1 c^2 (\gamma_1 - 1) = (T_1)_{Schwelle} \qquad (16.199)$$

folgt mit (16. 197) und (16. 198) dass

$$(T_1)_{Schwelle} = \frac{Mc^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M\right)}{m_2} \,. \qquad (16.200)$$

So wäre die Schwellenenergie für die Erzeugung eines Nukleonenpaares bei einem p-p-Stoss gleich $(T_1)_{Schw} = 6M_p c^2 \approx 5{,}6$ GeV, wogegen für Photonen- oder Elektronengeschosse ($m_1 \to 0$) die Schwelle auf $(T_1)_{Schw} = 4M_p c^2 \approx 3{,}8$ GeV reduziert wird.

16.9.7 Zusammenstellung nichtrelativistischer, kinematischer Formeln (Kernreaktionen)

Der Stossvorgang ist in Fig. 16.31 mit den betreffenden Bezeichnungen dargestellt (gestrichene Grössen = Schwerpunktssystem).

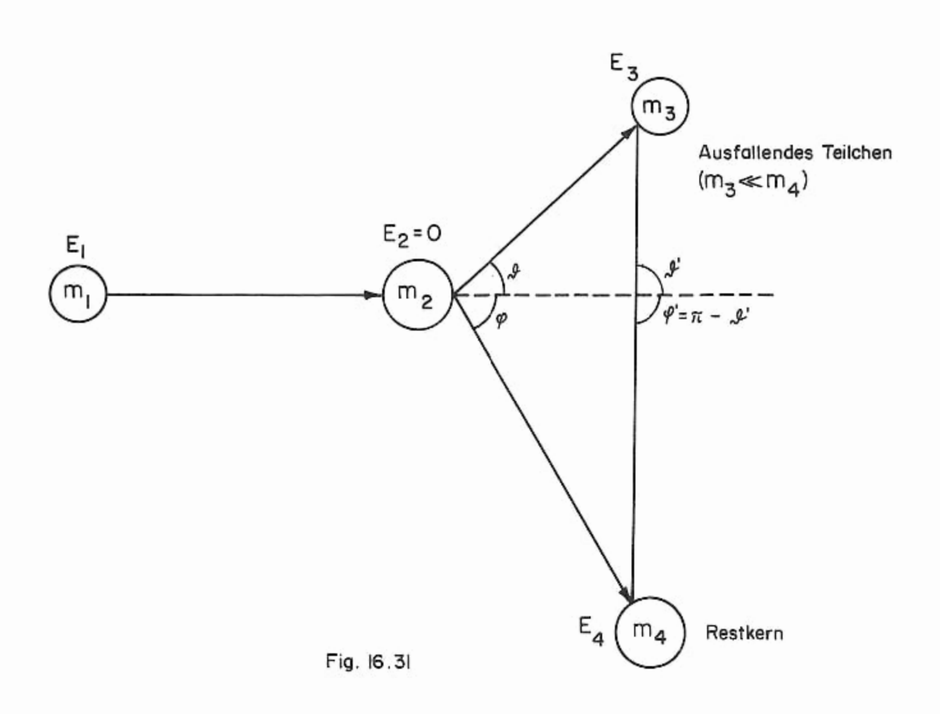


Fig. 16.31

Die Ausdrücke gelten für die Reaktion $m_2\,(m_1,\,m_3)\,m_4$ oder, wenn $m_3 = m_1$, und $m_4 = m_2$ ist, für den nichtrelativistischen Streuprozess $m_2\,(m_1,\,m_1')\,m_2^*$.

Der Q-Wert ist gegeben durch

$$Q = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)\,c^2, \qquad (16.201)$$

und die totale Reaktionsenergie im Laborsystem durch

$$E_T = E_1 + Q = E_3 + E_4 . \qquad (16.202)$$

Der Kürze halber werden in den endgültigen Ausdrücken folgende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt :

$$A_{13} \equiv \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \cdot \frac{E_1}{E_T}, \qquad (16.203)$$

$$A_{14} \equiv \frac{m_1 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \cdot \frac{E_1}{E_T}, \qquad (16.204)$$

$$A_{23} \equiv \frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{Q}{E_T}\right) = \frac{E_4'}{E_T}, \qquad (16.205)$$

$$A_{24} \equiv \frac{m_2 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{Q}{E_T}\right) = \frac{E_3'}{E_T}, \qquad (16.206)$$

worin

$$A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} = 1 . \qquad (16.207)$$

Die betreffenden Ausdrücke sind in Tab. 16.6 zusammengestellt:

Tab. 16.6

Reduzierte Laborenergie des emittierten Teilchens	$\frac{E_3}{E_T} = A_{13} + A_{24} + 2\sqrt{A_{14}A_{23}} \cdot \cos\vartheta'$ $= A_{13}\left[\cos\vartheta \pm \sqrt{\frac{A_{24}}{A_{13}} - \sin^2\vartheta}\right]^2,$ wobei das "+"-Zeichen verwendet werden muss, ausgenommen für $A_{13} > A_{24}$, in welchem Falle $\vartheta_{max} = \arc\sin\left(\frac{A_{24}}{A_{13}}\right)^{1/2}.$
Reduzierte Laborenergie des Restkernes	$\frac{E_4}{E_T} = A_{14} + A_{23} + 2\sqrt{A_{14}A_{23}} \cdot \cos\varphi'$ $= A_{14}\left[\cos\varphi \pm \sqrt{\frac{A_{23}}{A_{14}} - \sin^2\varphi}\right]^2,$ wobei das "+"-Zeichen verwendet werden muss, ausgenommen für $A_{14} > A_{23}$, in welchem Falle $\varphi_{max} = \arc\sin\left(\frac{A_{23}}{A_{14}}\right)^{1/2}.$
Schwerpunktswinkel des emittierten Teilchens	$\sin\vartheta' = \sqrt{\frac{1}{A_{24}} \cdot \frac{E_3}{E_T}} \cdot \sin\vartheta$
Laborwinkel des Restkernes	$\sin\varphi = \sqrt{\frac{m_3}{m_4} \cdot \frac{E_3}{E_4}} \cdot \sin\vartheta$
Intensitäts- oder Raumwinkelverhältnis des emittierten Teilchens	$\frac{\sigma(\vartheta')}{\sigma(\vartheta)} = \frac{I(\vartheta')}{I(\vartheta)} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} \cdot \frac{d\vartheta}{d\vartheta'} = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta'} \cdot \cos(\vartheta' - \vartheta)$ $= \frac{E_T}{E_3}\sqrt{A_{14}A_{23}}\sqrt{\frac{A_{24}}{A_{13}} - \sin^2\vartheta}$
Intensitäts- oder Raumwinkelverhältnis des Restkernes	$\frac{\sigma(\varphi')}{\sigma(\varphi)} = \frac{I(\varphi')}{I(\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'} \cdot \cos(\varphi' - \varphi)$ $= \frac{E_T}{E_4}\sqrt{A_{14}A_{23}}\sqrt{\frac{A_{23}}{A_{14}} - \sin^2\varphi}$
Intensitäts- oder Raumwinkelverhältnis der Reaktionsprodukte im Laborsystem	$\frac{\sigma(\varphi)}{\sigma(\vartheta)} = \frac{I(\varphi)}{I(\vartheta)} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi}$ $= \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\varphi} \cdot \frac{\cos(\vartheta' - \vartheta)}{\cos(\varphi' - \varphi)}$

16.10 Polarisationsbestimmung aus Streuexperimenten

Die partielle lineare Polarisation, hervorgerufen z. B. durch elastische Streuung von ursprünglich unpolarisierten Protonen an einem Target, kann aus der Richtungs-Asymmetrie bei der Streuung an einem anderen Kern analysiert werden (Fig. 16.32).

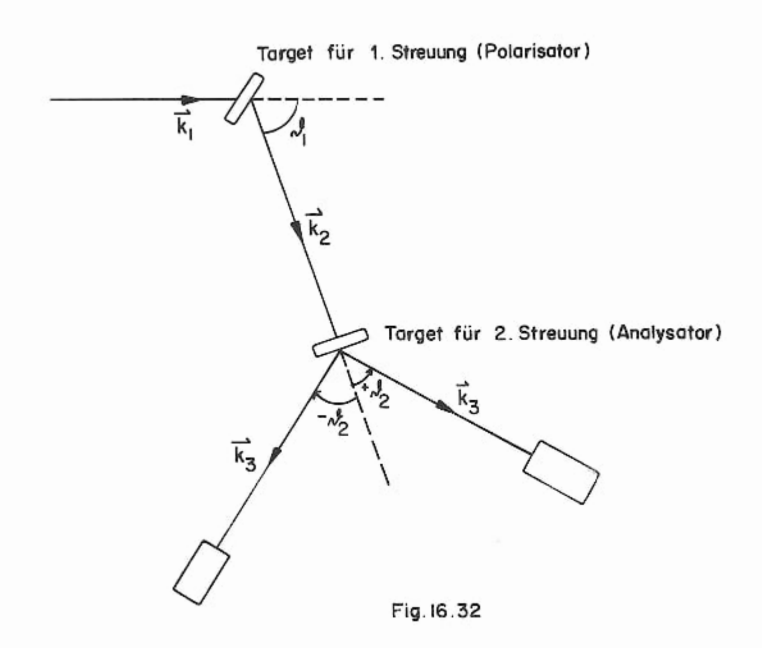


Fig. 16.32

Die zugrundeliegenden physikalischen Prinzipien sind in Abschn. 13.6 diskutiert worden. Der Einfachheit halber kann das zweite Streuzentrum als Kern mit Spin 0 im Grundzustand angenommen werden, z. B. He oder C. Man nehme ferner an, dass nach einer ersten Streuung um den Laborwinkel ϑ_1 die POLARISATION P_1 definiert sei als

$$\boxed{P_1 = \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{N_\uparrow + N_\downarrow}.} \qquad (16.208)$$

Darin bedeuten $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ die Anzahl Teilchen pro Strahlvolumen-Einheit mit Spin "up" resp. "down". Man sieht, dass P_1 vom Streuwinkel abhängt :

$$P_1 = P_1(\vartheta_1). \qquad (16.209)$$

Ähnlich wird die Polarisation, die ein anfänglich unpolarisierter Strahl bei der Streuung um den Winkel ϑ_2 am zweiten Streuzentrum erfährt, mit $P_2(\vartheta_2)$ bezeichnet. Die 1. und 2. STREUEBENE (SCATTERING PLANES) werden durch die Wellenzahlvektoren (propagation vectors) $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$, resp. $\vec{k}_2$ und $\vec{k}_3$ bestimmt, und ihre Normalen werden definiert als

$$\vec{n}_1 \equiv \frac{[\vec{k}_2 \times \vec{k}_1]}{|k_2 . k_1|} \quad \text{resp.} \quad \vec{n}_2 \equiv \frac{[\vec{k}_3 \times \vec{k}_2]}{|k_3 . k_2|}. \qquad (16.210)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die zweite Streuung ist (vgl. (10.109))

$$\frac{d\sigma(\vartheta_2, \varphi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma^*(\vartheta_2)}{d\Omega} \left\{ 1 + P_1(\vartheta_1) . P_2(\vartheta_2) . (\vec{n}_1 . \vec{n}_2) \right\}, \qquad (16.211)$$

wo φ der "azimutale" Winkel zwischen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ ist. Die Grösse $\frac{d\sigma^*(\vartheta_2)}{d\Omega}$ ist der differentielle Streuquerschnitt für unpolarisierte Teilchen derselben Energie, die auf einen Streukörper der gleichen Art wie das 2. Target fallen.

Wenn beide Streuungen in der gleichen Ebene stattfinden, so gilt

$$(\vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \pm 1 , \qquad (16.212)$$

so dass in diesem Falle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta_2)_{\text{vorwärts}} = \frac{d\sigma^*}{d\Omega}(\vartheta_2)\left\{1 - P_1(\vartheta_1) \cdot P_2(\vartheta_2)\right\}, \qquad (16.213)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta_2)_{\text{rückwärts}} = \frac{d\sigma^*}{d\Omega}(\vartheta_2)\left\{1 + P_1(\vartheta_1) \cdot P_2(\vartheta_2)\right\}. \qquad (16.214)$$

Aus der ASYMMETRIE, definiert als

$$A = \frac{\text{Anzahl vorwärtsgestreueter Teilchen}}{\text{Anzahl rückwärtsgestreueter Teilchen}} = \frac{1 - P_1(\vartheta_1) \cdot P_2(\vartheta_2)}{1 + P_1(\vartheta_1) \cdot P_2(\vartheta_2)}, \qquad (16.215)$$

und aus der Polarisation $P_2(\vartheta_2)$, die aus den Streuphasen der p-He-Streuung berechnet werden kann, kann man den Wert von $P_1(\vartheta_1)$ bestimmen :

$$P_1(\vartheta_1) = \frac{1}{P_2(\vartheta_2)} \cdot \frac{1 - A}{1 + A}. \qquad (16.216)$$

Die Resultate, die man unter Verwendung der bekannten, in Fig. 16.33 aufgetragenen Polarisationen P_2 für p-He-Streuung erhalten hat, sind für die Streuung von 3,9-MeV-Protonen an Mg in Fig. 16.34 dargestellt. Die Resultate für Al sind in Fig. 16.35 mit den Voraussagen aus dem optischen Modell aus Fig. 15.42 verglichen, und zwar vor der Korrektur für Compound-elastische Streuung (ausgezogene Linie) und nach dieser Korrektur (gestrichelte Linie).

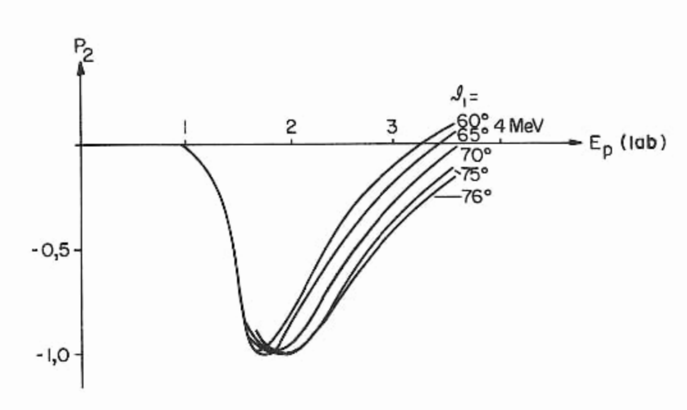


Fig. 16.33

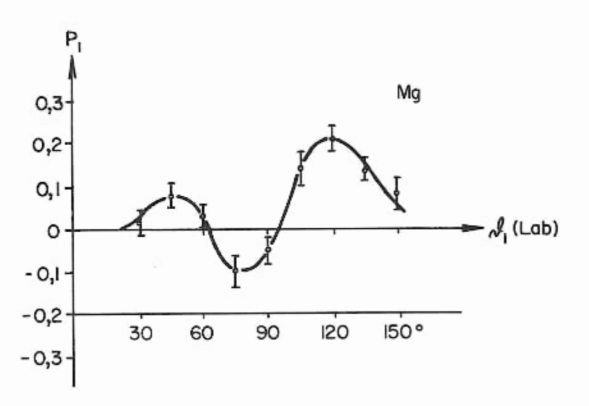


Fig. 16.34

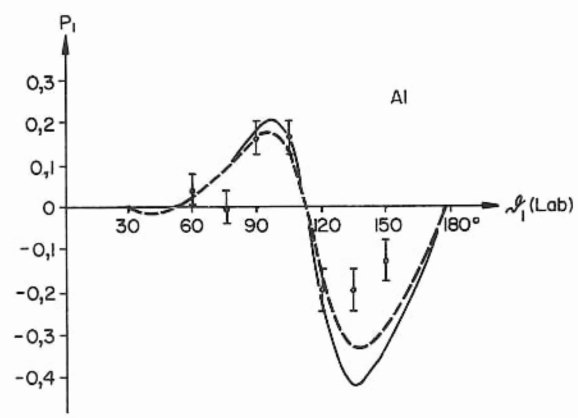


Fig. 16.35

17. SCHWERE IONEN

17.1 Besonderheiten der Schwer-Ionen-Physik

Die Untersuchungen von Kernen durch Beschuss mit schweren Ionen (Z > 2) stellen ein erst vor kurzem erschlossenes, sich rasch ausdehnendes Gebiet dar. Einige seiner Besonderheiten sind von Zucker (Ann. Rev. Nucl. Sci. 1960, 10, 27; dort auch reichhaltige Bibliographie) beschrieben worden, vgl. dafür auch die beiden "Proceedings of Conferences on Reactions between Complex Nuclei", 1958 und 1960.

Die jetzige Behandlung beschränkt sich auf einige besondere Aspekte, z. B. Streuvorgänge, Nukleonumtausch, und Zwischenkernbildung, einschliesslich Erzeugung von Quasi-Molekülen. Diese Themen entsprechen aber nur zu einem Teil den zahlreichen und mannigfaltigen Anwendungen, bei welchen Untersuchungen mit schweren Ionen Erfolg versprechen; diese werden bis in den Bereich der Kernspaltung sowie der Festkörperphysik ausgedehnt.

Folgende Punkte empfehlen sich zur besonderen Notiz:

(i) Der klassische Charakter der Wechselwirkungen mit schweren Ionen; das Wellenpaket, welches dem Ion entspricht, ist klein im Vergleich zu charakteristischen nuklearen Entfernungen, wie z. B. dem kürzesten Abstand bei direktem Stoss mit einem Target:

$$d_{min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_{Ion}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} M_{Ion} v^2} \cong \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2} . \qquad (17.1)$$

Die reduzierte Wellenlänge des Ionen-Wellenpakets ist

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{\mu v} , \qquad (17.2)$$

wobei μ die reduzierte Masse des Ions ist.

Ein Stoss kann dann als klassisch betrachtet werden, d. h., die Teilchenbahnen werden Coulomb-artig sein, wenn

$$\boxed{\eta \equiv \frac{d_{min}}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} > 1 .} \qquad (17.3)$$

Experimentell treten η -Werte von ungefähr 5 bis 9 auf; zum Beispiel bei einem O^{16} - O^{16}-Zentralstoss mit einer Energie von 80 MeV (d. h. 5 MeV pro Nukleon) ist $d_{min} \approx$ 20 f und $\lambda\!\!\!^{-} \approx 4$ f, woraus $\eta \approx 5$.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit dieser Annahme, dass die Teilchenbahnen klassisch verlaufen, kann man Information über nukleare Wechselwirkungsabstände und die diffuse Oberfläche des Kerns gewinnen.

(ii) Ausserordentlich hohe Drehimpulse können erreicht werden im Zweikörpersystem, infolge der (klassisch angesehen) im Vergleich zu normalen Geschossteilchen schweren Masse und dem grossen Radius eines schweren Ions. Während bei normalen Kernreaktionen Bahndrehimpulse von ungefähr $\ell \sim 2$, die einfallenden Nukleonen der Energie $\sim$ MeV entsprechen, vorkommen, treten im Gegenteil bei hochenergetischen (E $\gtrsim$ 100 MeV) Schwer-Ionen-Reaktionen (z. B. Beschuss eines Au-Targets mit 160 MeV-O^{16}-Ionen) Drehimpulse bis $\ell \sim 90$ massgeblich auf. Das Vorhandensein solcher hoher Bahndrehimpulse kann einen drastischen Einfluss auf den Verlauf einer Kernreaktion ausüben.

(iii) Niederenergetische (E $\lesssim$ 50 MeV) schwere Ionen sind geeignet für Untersuchungen über Niveaudichten und statistische Eigenschaften der Zwischenkerne, da infolge der geringen Geschwindigkeiten, aber hohen linearen Impulse der Ionen die Bildung eines Zwischenkerns gegenüber reinem Oberflächenstoss bevorzugt ist.

(iv) Die Anzahl Reaktionskanäle ist wesentlich grösser bei solchen Vorgängen als bei normalen Kernreaktionen, die von Nukleonen induziert werden.

Der folgende Überblick enthält keine Betrachtung des sehr interessanten Problems der Energie-Reichweite-Beziehung und des Bremsvermögens, sondern befasst sich zunächst mit Wechselwirkungen bei relativ grossen Entfernungen, dann mit näheren Teilchenbegegnungen (Streuung), Streiff-Stössen (grazing collisions, nucleon transfer) und schliesslich mit sehr nahen Stössen (Bildung von Zwischenkernen und Quasi-Molekülen). Die betreffenden Stoss-Systeme sind in Fig. 17. 1 symbolisch dargestellt.

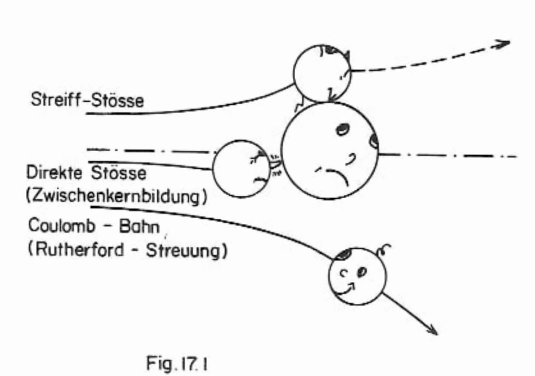


Fig. 17.1

17. 2 Entfernte Wechselwirkungen: Coulomb-Anregung

Wechselwirkungen langer Reichweite, welche durch das elektrostatische Feld eines Kerns verursacht werden, liefern die Basis für Untersuchungen über Coulomb-Anregung. Die hohen Ladungen, die mit mehrfach geladenen schweren Ionen verbunden sind, bieten besondere Möglichkeiten auf diesem Forschungsgebiet.

Der Charakter einer Wechselwirkung wird rein elektrostatisch sein, wenn der minimale Abstand (distance of closest approach) gross ist im Vergleich mit den Kernradien, und wird stark sein wegen der verhältnismässig hohen Ladungen der Stosspartner. Mehrfache Anregung, die zwei oder sogar noch mehr sukzessiven Anregungen im gleichen Stossprozess entspricht, wird dabei möglich.

17. 3 Elastische Streuung

Die elastische Streuung von schweren Ionen bietet die Möglichkeit, die Gültigkeit der halbklassischen Approximationen in der Streutheorie zu überprüfen, bzw. ihren Anwendungsbereich festzustellen. Es hat sich herausgestellt, dass auch ganz andere theoretische Zugänge, welche sich auf das optische Modell und Phasenverschiebungsanalyse stützen, eine genau so gute Anpassung an experimentell gemessene Streuverteilungen geben; unter Umständen liefern sie sogar dann noch Übereinstimmung mit experimentellen Daten, wenn eine halbklassische Betrachtung versagt.

Der klassische Ausdruck für den minimalen erreichbaren Abstand zwischen zwei Teilchen, die sich gegenseitig mit einer Coulomb-Kraft abstossen, ist für einen Schwerpunktssystems-Streuwinkel ϑ'

$$r_{min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\vartheta'}{2}}\right), \tag{17.4}$$

wobei E die totale kinetische Energie im Schwerpunktssystem sei. Für den Fall eines direkten Stosses ($\vartheta' = 180^o$) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$r_{min} = d_{min} . \tag{17.5}$$

Der dazugehörige Bahndrehimpuls ist klassisch

$$L = r_{min}\sqrt{2\mu}\sqrt{E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{min}}}, \tag{17.6}$$

welches halbklassisch als

$$L = \eta\hbar \, ctg\frac{\vartheta'}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{v} \, ctg\frac{\vartheta'}{2} \tag{17.7}$$

geschrieben werden kann.

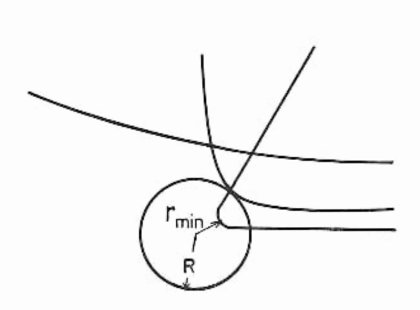


Fig. 17.2

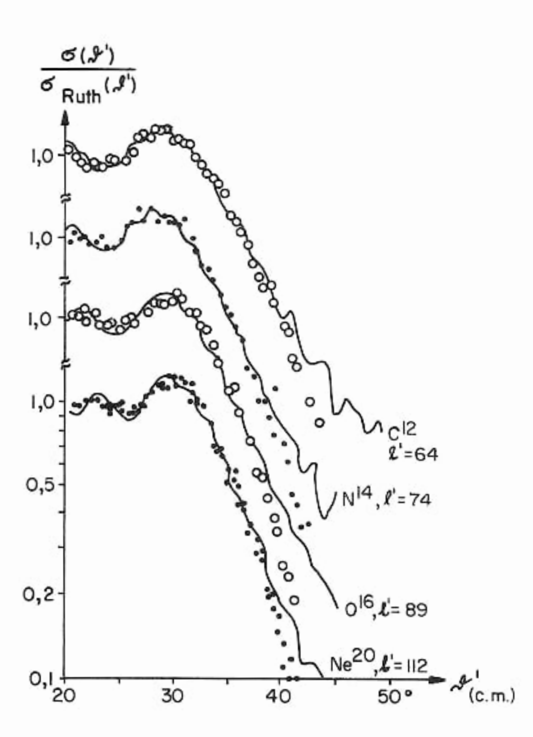


Fig. 17.3

Wenn ϑ' klein ist, muss r_{min} viel grösser sein als die Summe der Kernradien, da ein grosser Stossparameter einem kleinen Streuwinkel entspricht, und umgekehrt (Fig. 17. 2). Also sollte für kleine Streuwinkel ϑ' die Rutherford'sche Behandlung der Coulomb-Streuung gültig sein. Wenn andererseits r_{min} kleiner ist als die Summe der Kernradien (Streuung durch einen grossen Winkel), findet gegenseitige Durchdringung statt, die zu unelastischer Streuung und zu Kernreaktionen führt, so dass der elastische Querschnitt kleiner als der Rutherford-Querschnitt wird. Dies entspricht in sehr grober Näherung dem experimentellen Befund. Aber bei näherem Untersuchen sind zwei störende Effekte entdeckt worden, nämlich erstens, dass gerade beim Übergangswinkel, wo r_{min} genau gleich der Summe der Kernradien wird, der beobachtete Streuquerschnitt den entsprechenden Rutherford-Wert übersteigt, und zweitens, dass bei höherem Streuwinkel der Wirkungsquerschnitt, obwohl wie erwartet geringer als $\sigma_R(\vartheta')$, keine stetige Funktion des Streuwinkels ist, sondern eine Art Resonanzstruktur zeigt.

Typische Resultate für die Streuung von verschiedenen schweren Ionen an Gold sind in Fig. 17. 3 angegeben. Diese zeigt die Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquer-

schnittes im Schwerpunktssystem, bezogen auf den Rutherford-Querschnitt. Darin wird ein Vergleich gezogen zwischen experimentellen Ergebnissen und den Voraussagen der halbklassischen Theorie des "SHARP CUT-OFF" (SCHARFES IMPULS-ABSCHNEIDEN)-Modells von Blair (PR 1954, 95, 1218), welches ziemlich gute Übereinstimmung mit den Vorgängen bei elastischer Streuung von schweren Ionen liefert. In diesem Modell wird die klassische Coulomb-Streuung unverändert gelassen für Bahndrehimpulse, welche einem grösseren r_{min} als die Summe der Kernradien entsprechen; dagegen wird angenommen, dass keine elastisch gestreute ausgehende Welle existiert für solche Impulse ℓ', die Werten von r_{min} entsprechen, welche gleich oder kleiner als die Summe der Kernradien sind. Das scharfe Abschneiden der klassischen elastischen Streuung bei einem gegebenen Bahndrehimpuls ℓ', also bei einem gegebenen minimalen Abstand

$$r_{min} = R_0 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right) \qquad (17.8)$$

verleiht dem Streuquerschnitt anstelle des durch die Rutherford'sche Theorie gelieferten gleichmässigen Verlaufs den erwünschten Oszillationscharakter. Man könnte sich die Partialwellen als zerlegt in ihre Fourierkomponenten vorstellen, wobei, wie wohlbekannt, ein scharfes Abschneiden der Fourier-Reihe Oszillationen verursacht. Die Abschneide-Impulse sind in Fig. 17.3 angegeben; sie reichen bis zu dem hohen Wert $\ell' = 112$. In diesem Blair'schen Modell ist ℓ' der einzige veränderliche Parameter. Wenn eine Anpassung an experimentelle Verteilungen gelingt, kann der entsprechende Wechselwirkungsabstand R aus der Beziehung

$$\ell'(\ell'+1)\hbar^2 = 2\mu R^2 \left(E' - E_c \right) \qquad (17.9)$$

berechnet werden, wobei μ die reduzierte Masse des einfallenden Teilchens ist, E' seine kinetische Energie im Schwerpunktssystem und $E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$ die Höhe der Coulomb-Barriere.

Man kann aus R den Radiusparameter R_0 bestimmen: hierbei bekommt man den Wert $R_0 \approx 1.46$ f in guter Übereinstimmung mit dem aus anderen Methoden gewonnenen Wert.

Das Blair-Modell ist natürlich nur dann gültig, wenn $\eta > 1$; der daraus berechnete Wirkungsquerschnitt fängt dann an zu oszillieren, wenn das Verhältnis $\frac{\sigma(\vartheta')}{\sigma_R(\vartheta')}$ so klein wird, dass es nahe an $1/\eta$ herankommt. An dieser Stelle folgen, wie man in Fig. 17.3 sieht, die experimentellen Punkte nicht mehr dem theoretischen Verlauf, sondern fallen gleichmässig ab, während die theoretischen Kurven Diffraktionsstruktur aufweisen. Gegenwärtig scheint der gleichmässige Abfall der experimentellen Kurve für die Gültigkeit der halbklassischen Approximation zu sprechen, was in grober Näherung mit $\eta \geqslant 5$ übereinstimmt.

Obwohl also das Blair-Modell befriedigend die Maxima und Minima in der Winkelverteilung reproduziert, liefert es eine zu grosse Amplitude für die entsprechende Oszillation. Man könnte zunächst annehmen, dass diese Schwierigkeit durch "Abstumpfen" der Schärfe des Abschneidens überwunden werden könnte; es stellt sich aber heraus, dass dieses Verfahren zwar die Amplitude der Oszillation verringert, aber den Nachteil hat, dass es die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vollkommen zerstört in der Umgebung des Winkels, wo Abweichungen vom Rutherford-Wert aufzutreten beginnen, und wo der gemessene Wirkungsquerschnitt den Wert $\sigma_R(\vartheta')$ überschreitet.

Eine alternative halbklassische theoretische Behandlung wurde von Ford & Wheeler (Ann. of Phys. 1959, 7, 259) vorgeschlagen: das sogenannte REGENBOGEN-MODELL (RAINBOW MODEL). Dieses behandelt das Problem der nuklearen Streuung in zur Streuung von Lichtwellen an Wassertröpfchen analoger Weise. Es ist ein zweiparametriges "soft-core"Modell, welches annimmt, dass ein Kern einen zentralen, anziehenden Bereich und eine nichtabsorbierende, beugende Oberflächenschicht aufweist. Ein Beispiel für die Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen ist in Fig. 17.4 angegeben, welche elastische Streuresultate für 27,3-MeV-N^{14}-Ionen an Al^{27} zeigt. Die gestrichelte

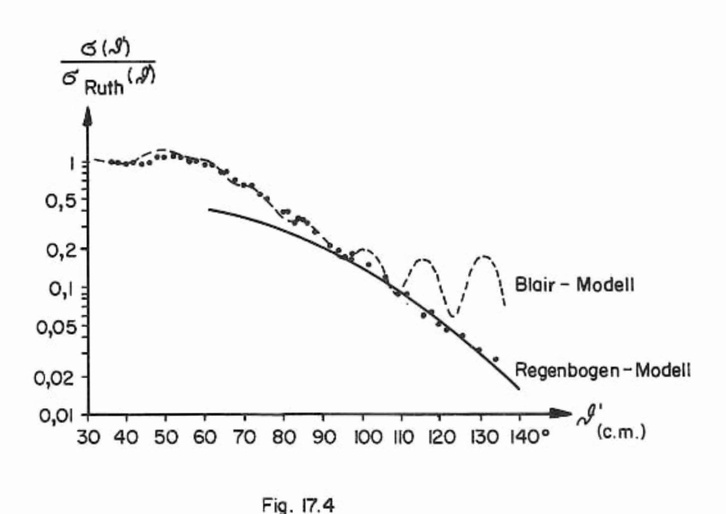


Fig. 17.4

Kurve stellt die Voraussagen des Blair-Modells mit der Parametermischung 85 % $\ell' = 11$ und 15 % $\ell' = 10$ dar, welches einen Wert $R_o = 1,68$ f gibt. Andererseits sind die Parameterwerte für das Regenbogen-Modell (ausgezogene Kurve), die die beste Anpassung liefern, $R_o = 1,59$ f und $\Delta R = 0,83$ f als Dicke der nichtabsorbierenden Oberflächenschicht. Die physikalische Bedeutung dieser letzteren ist zur Zeit noch nicht abgeklärt.

Ausgezeichnete Resultate für Streuung von schweren Ionen wurden vom optischen Modell mit Oberflächenabsorption geliefert: Für das imaginäre Potential wird eine Gauss'sche Verteilung angenommen, deren Breite b $\sim$ 1 f ist, und für das reelle Potential eine abgerundete Saxon-Verteilung mit $R_o = 1,23$ f. Fig. 17.5 zeigt das Resultat einer Analyse mit diesem optischen Potential (ausgezogene Kurve) für die elastische Streuung von N^{14} an Be^{9} bei 27,3 MeV.

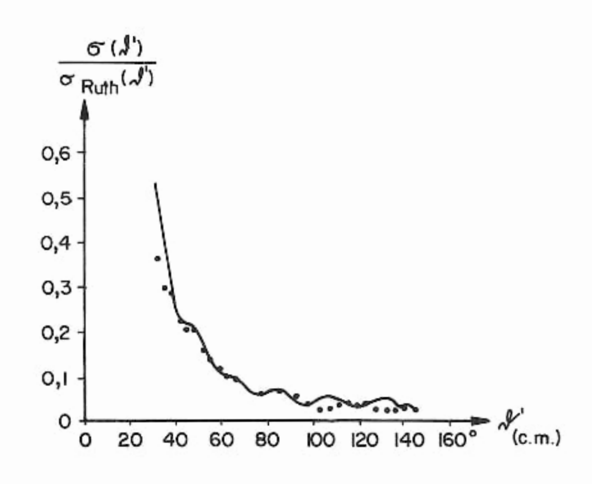


Fig. 17.5

Die Werte der fünf Anpassungsparameter sind in sehr guter Übereinstimmung mit den Werten, die sich zur Analyse von Nukleonenstreuung geeignet haben, wie man durch Vergleich mit folgenden Daten feststellen kann, die aus Untersuchungen Emmerichs von 3 MeV Neutronenstreuung stammen (Westinghouse Report 6-94511-6-R20, 1958):

Parameter	27,3 MeV-N^{14}	3 MeV-n
V_o	50 MeV	42 MeV
W	16 MeV	16 MeV
R_o	1,23 f	1,25 f
a	0,65 f	0,84 f
b	1,125 f	≈ 1,4 f

17.4 Übertragungs-("Transfer")-Reaktionen

Es ist besonders interessant, dass eine typische, einfache Transfer-Reaktion wie

$$N^{14} + Au^{197} \longrightarrow Au^{198} + N^{13},$$

bei welcher ein Neutron durch den Targetkern aus dem Geschoss eingefangen wird, sogar bei Energien, bei welchen die Kerne gar nicht in Kontakt kommen, noch stattfinden kann. Man kann ohne weiteres aus der Anisotropie der Schwerpunkts-Winkelverteilung der N^{13}-Kerne schliessen, dass bei einer solchen Reaktion keine Zwischenkernbildung als intermediärer Schritt vorkommt. In Fig. 17.6 sind die Winkelabhängigkeiten der differentiellen Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Energien wiedergegeben: sie zeigen merkliche Spitzen, welche bei umso grösseren Winkeln auftreten, je kleiner die Schwerpunktsenergie E' ist. Man sieht, dass keine Übertragung stattfindet unterhalb $\vartheta' \approx 20^o$, und nur sehr wenig bei grossen ϑ', also keine bei grossen Stossparametern und wenig bei kleinen Stossparametern, da die letzteren eher zur Zwischenkernbildung führen. Die maximale Nukleonenübertragung findet bei Streiff-Stössen (grazing collisions) statt. Aus den obigen Resultaten ergab sich $r_{min} = 12,7$ f, woraus $R_o = 1,55$ f. Dieser Wert kann mit dem

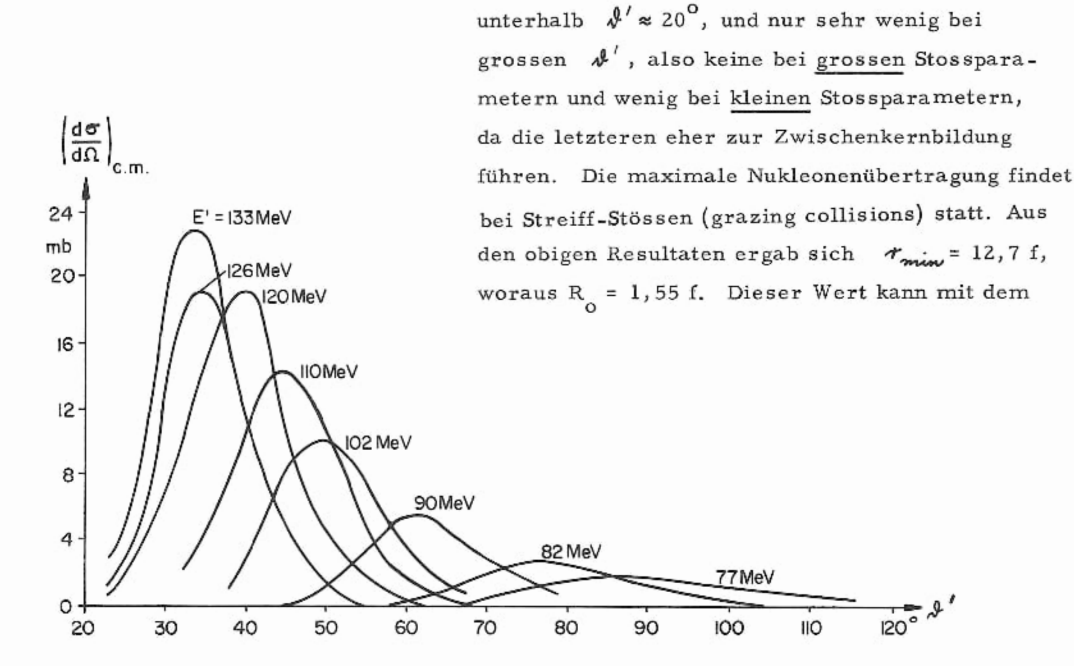


Fig. 17.6

entsprechenden Wert aus Untersuchungen über elastische Streuung mit Hilfe des Blair-Modells, nämlich $R_o = 1,47$ f (für Streuung von C^{12} auf Au^{197} im Energiebereich 78 - 118 MeV (lab)) verglichen werden. Ähnlich gute Übereinstimmung wird häufig gefunden, obwohl zur Zeit einige Schwierigkeiten und Diskrepanzen noch abzuklären sind, wie das Auftreten von zwei Spitzen (die deutlichere der beiden bei $\vartheta' = 0^o$) in der C^{11}-Winkelverteilung aus der Transfer-Reaktion Ag (C^{12}, C^{11}) Ag, ähnlich wie im Fall der Reaktion Rh (0^{16}, 0^{15}) Rh.

17.5 Zwischenkernbildung

Obwohl es vielleicht nicht vernünftig erscheint, bei solch hohe Energien, wie sie bei Schwer-Ionen-Reaktionen auftreten, an Zwischenkernbildung zu denken, so hat man dafür neuerdings doch spärliche, aber überzeugende Beweisgründe gefunden. Es ist sehr wahrscheinlich, dass ein Zwischenkern, der infolge einer Schwer-Ionen-Reaktion zustande kommt, nicht nur hoch angeregt wird, sondern sich in einem Zustand befinden würde, welcher viel höheren Spin besitzt als bisher gefunden wurde. Der Verlauf der Anregungsfunktion für Reaktionen, welche über

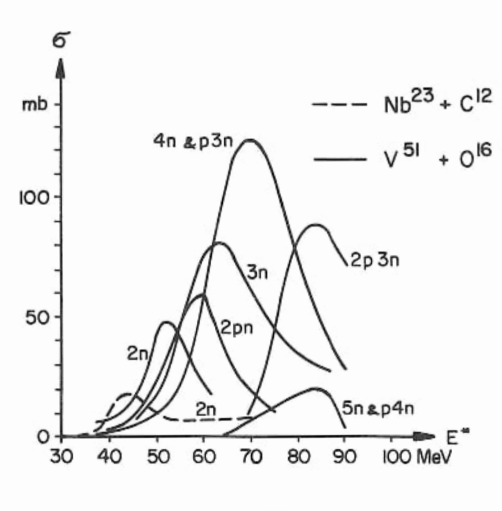


Fig. 17.7

einen Zwischenkern verlaufen, zeigt eine charakteristische Form: wenn man die Kurve für Nukleonen-induzierte Reaktionen mit der für Schwer-Ionen-induzierte Reaktionen vergleicht, die demselben Zwischenkern entsprechen, dann kann man Schlüsse über den Reaktionsmechanismus ziehen. In Fig. 17.7 sind Anregungsfunktionen dargestellt für verschiedene (O^{16} + V^{51}) - und (C^{12} + Nb^{93})-Reaktionen, wobei jede Kurve durch die emittierten leichten Teilchen bezeichnet ist.

Die Untersuchung der Einflüsse hoher Einfalls-Bahndrehimpulse auf Bildung, Lebensdauer und Zerfall des Zwischenkerns bietet aussichtsreiche Möglichkeiten. Es wurde z. B. schon gefunden, dass durch die Reaktion O^{16} (70 MeV) + Se^{80} ein isomerer Zustand des Mo^{93m} erzeugt wurde mit einem Reaktionsquerschnitt, der 100 mal grösser war als derjenige für die Produktion desselben Isomers durch die p (6,7 MeV) + Nb^{93}- Reaktion.

In diesem Zusammenhang wurde eine interessante Hypothese vorgeschlagen, um über die erstaunlich hohe Wahrscheinlichkeit für Emission schwerer Fragmente in der O^{16} + Al^{27} Reaktion Rechnung zu tragen. Es wurde postuliert, dass die Bildung eines Zwischenkerns beim Auftreffen schwerer Ionen auf ein leichtes Target wegen der Grösse der beteiligten Drehimpulse sogar verboten sei. Bevor diese Hypothese akzeptiert werden kann, sind noch zusätzliche, gründlichere Untersuchungen nötig.

17.6 Bildung eines "Quasi-Moleküls"

Eines der neuesten und bemerkenswertesten Ergebnisse der Schwer-Ionen-Forschung betrifft die Hypothese, dass als intermediärer Schritt im elastischen C^{12} - C^{12}- Streuprozess eine molekül-ähnliche Verbindung zweier C^{12}-Kerne vorkommt, statt eines gewöhnlichen Mg^{24}-Zwischenkernes.

Eine Reihe von Untersuchungen wurde von Bromley, Kuehner und Almqvist (PRL 1960, 4, 365 & 515; Complex Nuclei Conference Proceedings 1960, S. 151 & 282) mit C^{12}- und O^{16}-Ionen durchgeführt, die im Chalk River Tandem-van-de-Graaff-Beschleuniger zu sehr genau bekannten Energien beschleunigt wurden. Die Energieschärfe betrug ungefähr $5:10^4$, was einer Ungenauigkeit von nur 18 keV für einen 36-MeV-Strahl entspricht. Präzisions-Registrierung von Reaktionsprodukten wurde mit Hilfe neuentwickelter Au-Si HALBLEITER-DETEKTOREN (SURFACE BARRIER DETECTORS) mit einer effektiven Fläche von 2 x 2 mm und einer Energieauflösung von rund 1 - 2 % erreicht. Ein typisches, auf diese Weise gemessenes Schwer-Ionen-Spektrum ist in Fig. 17.8 dargestellt. Dieses wurde bei 26° für 26,5 MeV-Strahlen von C^{12} und O^{16} auf 50 $\mu g.cm^{-2}$ bzw. 100 $\mu g.cm^{-2}$- Targets aus C resp. SiO gemessen.

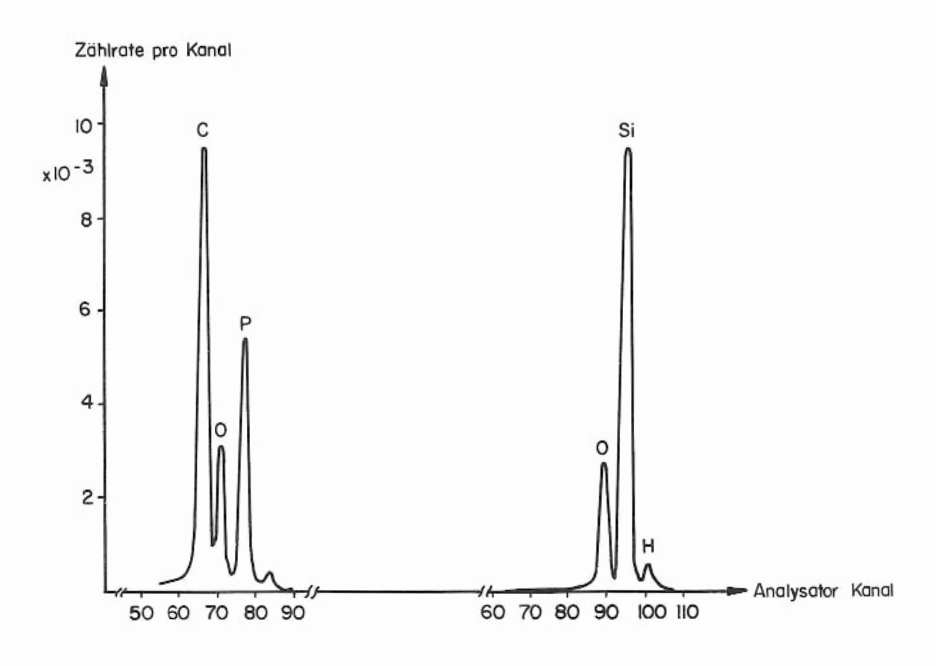


Fig. 17.8

Folgendes Verhalten wurde aus Messungen der Anregungsfunktionen für O - O, O - C und C - C elastische Streuung festgestellt:

(i) <u>O - O -Streuung</u>

Die Anregungsfunktion (Fig. 17.9) zeigt, dass bei Energien unterhalb der Coulomb-Barriere (E_C = 10,5 MeV) ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Voraussagen der Mott'schen Streu-Theorie erzielt wird. Mott'sche Streuung (Abschn. 16.9.4) befasst sich mit der klassischen elastischen Streuung zweier identischer geladener Teilchen und ist also für O - O - Streuung anwendbar. Man sieht die charakteristische theoretische $\frac{1}{E^2}$ -Abhängigkeit, welche für Schwerpunkts-Streuwinkel im Bereich von $\vartheta' = 90^\circ$ ein wenig abweicht. Die Übereinstimmung mit der Mott'schen Theorie versagt aber bei Energien oberhalb E_C; der differentielle Streuquerschnitt sinkt rasch aber monoton ab (vgl. O - C und C - C-Resultate) infolge Absorption und Zwischenkernbildung.

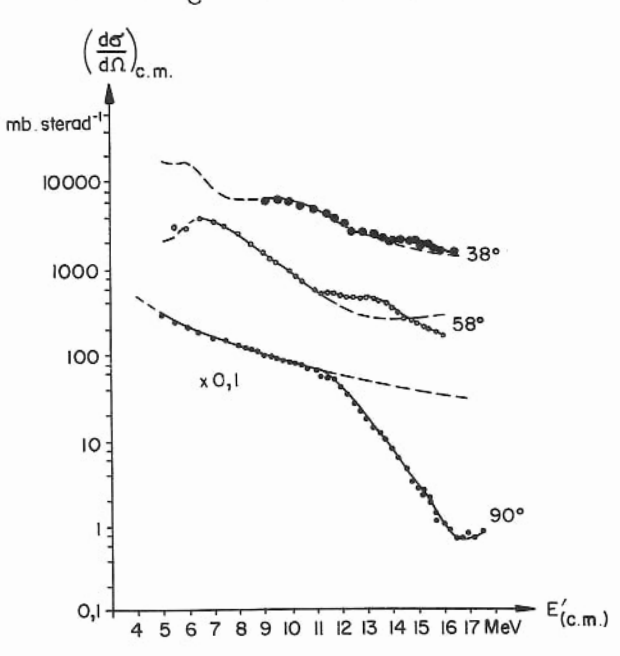


Fig. 17.9

(ii) O - C-Streuung

Aus Fig. 17.10 ist zu ersehen, dass die Anregungsfunktion in Übereinstimmung mit der Rutherford'schen Streutheorie ($\frac{1}{E^2}$ -Abhängigkeit) unterhalb der Coulomb-Energie verläuft (E_C = 8,8 MeV). Wie im Fall der O - O-Streuung ist der Abfall des Streuquerschnitts oberhalb E_C steiler als die Theorie voraussagt; bemerkenswert ist aber, dass der Abfall für ϑ' = 90° nicht monoton ist: er weist Resonanzspitzen auf (welche natürlich nicht mit denen des Blair-Modells zu verwechseln sind !).

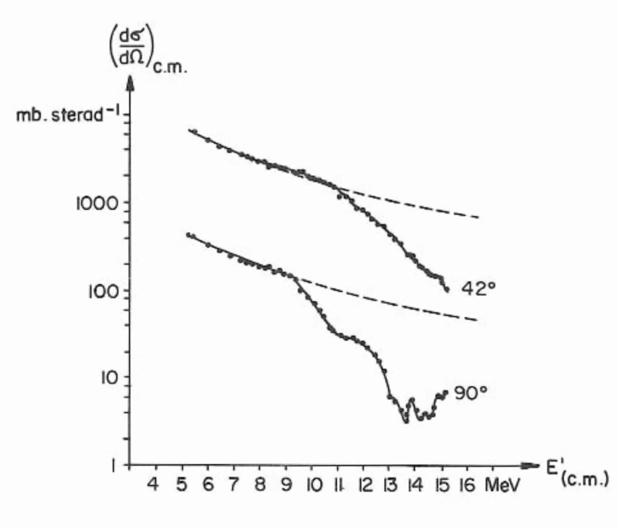


Fig. 17.10

(iii) C - C -Streuung

Die Spitzen oberhalb E_C = 6,6 MeV, wo die empirischen Daten von den Mott'schen Voraussagen abweichen, zeigen sehr deutliche Resonanz-Struktur, und zwar nicht nur bei ϑ' = 90°, sondern auch bei kleineren Schwerpunkts-Streuwinkeln. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Resonanz-Struktur der verschiedenen Winkel nicht korreliert ist und infolgedessen sehr wahrscheinlich von Interferenz-Effekten herrührt.

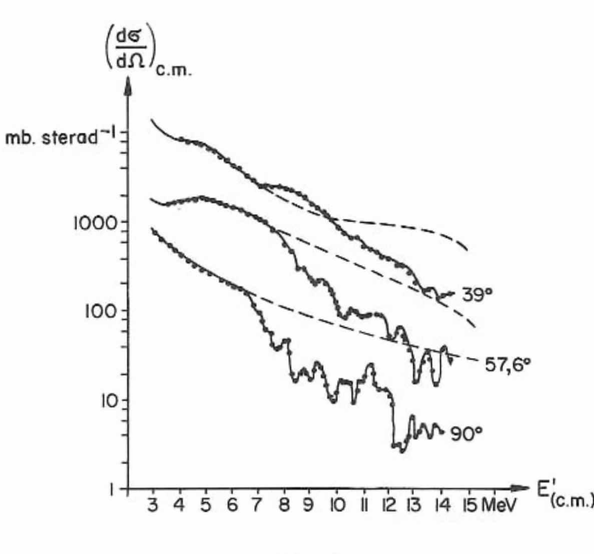


Fig. 17.11

Der Wechsel von monotonen zu stark oszillierenden Abweichungen beim Übergang von O - O zu C - C-Systemen ist am besten aus den Anregungsfunktionen bei 90° zu ersehen, welche in Fig. 17.12 zusammengestellt sind. Es ist auffällig, dass die Streuquerschnitte für alle drei Systeme einem gemeinsamen Wert von ungefähr 10 mb. sterad^{-1} für Energien weit oberhalb E_C zuzustreben scheinen.

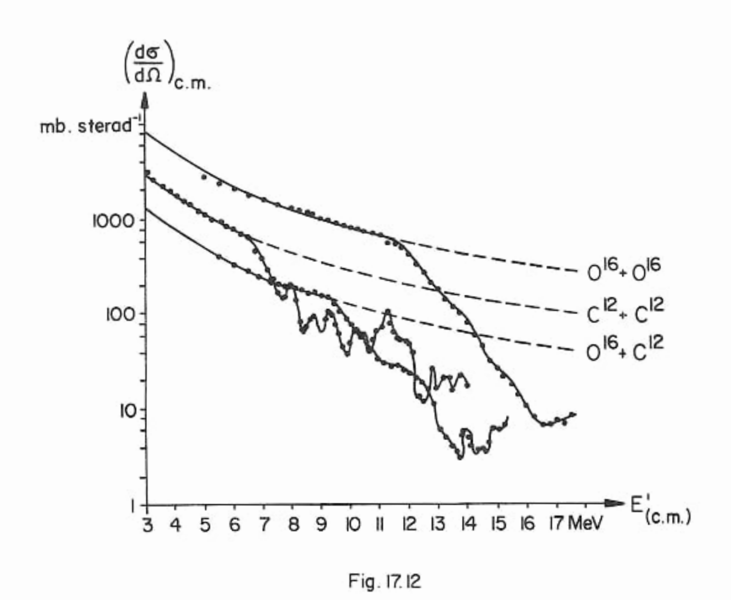


Fig. 17.12

Es könnte vielleicht sein, dass dieser Grenzquerschnitt einem Reaktionsquerschnitt für "Compound-elastic"-Prozesse, wie Diffraktionsstreuung und Potentialstreuung über eine normale Zwischenkernbildung entspricht. Weiter sind die Breiten der C - C-Oszillationen zu bemerken, welche ungefähr $2\Gamma \approx 200$ keV betragen, was einer Lebensdauer von $\tau \sim \frac{\hbar}{2\Gamma} \sim 3.10^{-21}$ sec entspricht. Dieser Punkt wird später weiter behandelt werden.

Die Winkelverteilungen für verschiedene Energien weisen einen ähnlichen systematischen Verlauf auf. Die Schwerpunkts-Winkelverteilung für C - C-elastische Streuung bei 5,00 MeV, also weit unterhalb der Coulomb-Barriere, ist in Fig. 17.13 dargestellt. Man sieht, dass die experimentellen Punkte genau mit den Modulationen der Mott'schen Theorie übereinstimmen. Oberhalb der Coulomb-Barriere (E_C = 6,6 MeV), also zum Beispiel bei 10 MeV (Fig. 17.14), verlaufen die experimentellen Werte nicht genau mit den Mott'schen Voraussagen übereinstimmend, weisen aber genau ähnliche Modulationen auf - sie sind sozusagen einfach parallel verschoben gegen die theoretischen

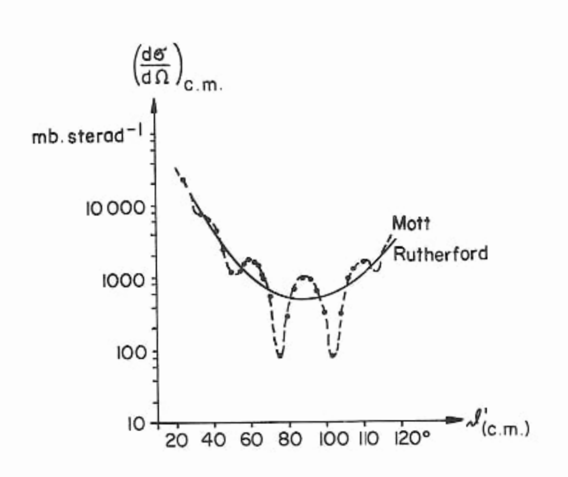


Fig. 17.13

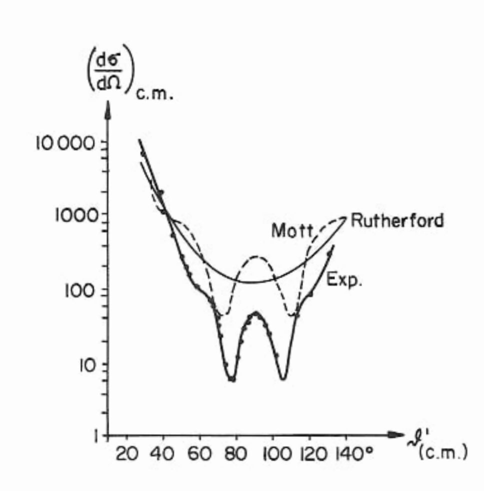


Fig. 17.14

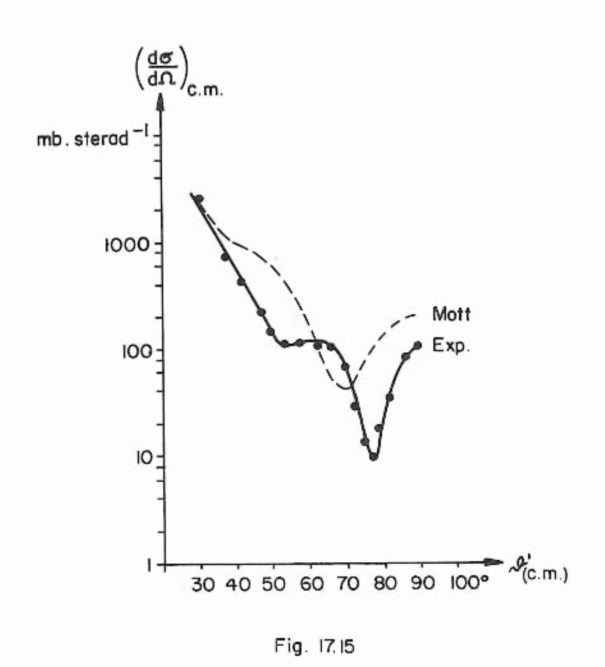


Fig. 17.15

Werte. Jedoch bei höheren Energien, oberhalb E_C, ändert sich die ganze Struktur vollkommen, wie in Fig. 17.15 die Daten für die C - C-elastische Streuung bei 11,25 MeV zeigen. Die Abweichung der experimentellen Punkte ist jetzt nicht einfach eine parallele Verschiebung, sondern jene verlaufen völlig verschieden.

Dieses auffällige Verhalten, das Nichterscheinen einer Resonanzstruktur bei O - O-Systemen, und ihr Vorkommen bei C - C-Systemen, ist nicht nur auf elastische Streuergebnisse beschränkt, sondern tritt auch bei Kernreaktionen auf, die $O^{16} + O^{16}$ bzw. $C^{12} + C^{12}$ als Anfangssysteme haben. Einige Anregungsfunktionen (mit willkürlicher Normierung) für solche Reaktionen sind in Fig. 17.16 bzw. Fig. 17.17 wiedergegeben; die Pfeile deuten die Höhe der Coulomb-Barriere an.

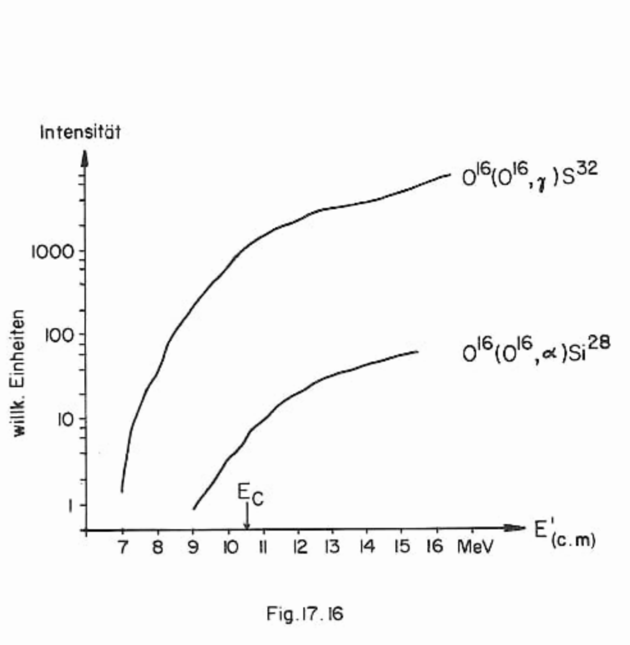


Fig. 17.16

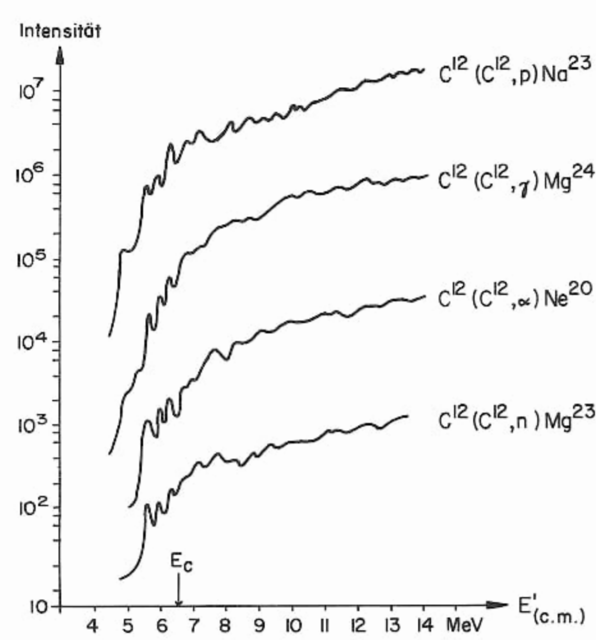


Fig. 17.17

Die O + O-Kurven weisen einen stetigen Verlauf auf, während die C + C-Kurven sehr merkliche Resonanzspitzen der Breite $2\Gamma \approx 200$ keV mit Abständen von $\sim$ 320 keV bei Energien von 5,64, 6,00 und 6,32 MeV, also gerade unterhalb der Coulomb-Barriere besitzen. Diese Resonanzstruktur wurde bei der elastischen Streuung nicht gefunden, weil unterhalb der Coulomb-Barriere die Coulomb-Streuung sehr stark ist und solche Kernreaktionseffekte vollkommen überdeckt. Die Tatsache, dass bei Kernreaktionen die Resonanzspitzen in der Anregungsfunktion bei der gleichen Energie, unabhängig vom Beobachtungswinkel für alle möglichen Reaktionsprodukte auftreten, schliesst in diesem Falle Interferenzeffekte aus, im Vergleich zu der Situation bei elastischer Streuung.

Um das Auftreten einer solchen Struktur bei C + C-Systemen und ihr Nichterscheinen bei O + O-Systemen zu erklären, haben manche Forscher, wie Vogt und McManus (PRL 1960, 4, 518), die kühne Hypothese vorgeschlagen, dass statt der Bildung eines normalen Mg^{24}-Zwischenkerns, der "vergisst", wie er zustande gekommen ist, eine besondere Art von Zwischensystem auftritt, ein Analogon zum Mg^{24} in einem Zustand sehr hohen Kernspins, aber mit der charakteristischen Eigenschaft, dass die C^{12}-Kerne ihre Identität nicht darin verlieren, sondern über eine längere Zeit als mehr oder weniger getrennte Einheiten bestehen. Innerhalb der "Lebensdauer" ($\tau \sim 10^{-20}$ sec, wie aus Resonanzbreiten folgt) dieser "QUASI-MOLEKÜLE", können C^{12}-Kerne wieder emittiert werden. Dabei interferieren die Compound-elastic Zerfallsamplituden mit den Coulomb-Amplituden und verursachen so die beobachteten Resonanzeffekte. Die Bindung zwischen den zwei C^{12}-Kernen eines Quasi-Moleküls kommt durch eine Neutronenaustauschkraft (vgl. Fig. 13.6 & 13.7) zustande, wobei diese Anziehungskraft durch die abstossenden Coulomb- und Zentrifugalkräfte ausgeglichen wird, die die C^{12}-Kerne voneinander entfernt halten. Ein solches Quasi-Molekül würde ein Potential der Form wie in Fig. 17.18 besitzen; bei kleinen Abständen r nimmt es die Gestalt eines gewöhnlichen Kernpotentials für Mg^{24} an, wobei der Buckel den Coulomb- und Zentrifugal-Abstossungen entspricht, die einen $\frac{1}{r}$- bzw. $\frac{1}{r^2}$ -Verlauf aufweisen. Es wird hingegen angenommen, dass die äussere Barriere bei grösseren Werten von r von Deformationen der C^{12}-Kerne in einem Quasi-Molekül von Hantelgestalt herrührt (Fig. 17.19). Gestützt wird diese Hypothese durch die Kleinheit der Molekül-Dimensionen: man nimmt an, dass der Abstand zwischen beiden C^{12}-Kernen ungefähr 10 f beträgt, während der Wechselwirkungsabstand nach dem Blair-Modell sich zu 8,02 f ergibt, entsprechend dem sehr hohen Wert $R_o = 1,75$ f, und in Übereinstimmung mit der Annahme einer Deformation. Weitere bestätigende

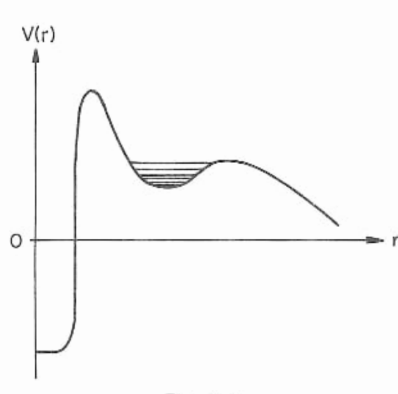


Fig. 17.18

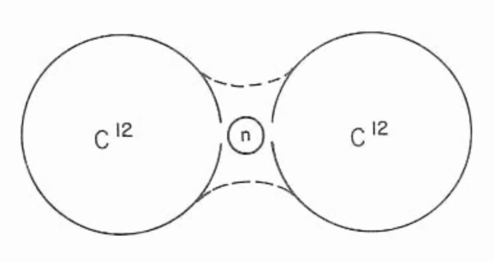


Fig. 17.19

Evidenz dafür, dass sich die C^{12}-Kerne leicht deformieren lassen, besteht darin, dass die tief-angeregten Niveaus einen merklich kollektiven Charakter aufweisen. Die Annahme liegt also auf der Hand, dass bei der Anwesenheit von vier Löchern in der p-Schale des C^{12}-Kernes und seiner Deformierbarkeit eine partielle Durchdringung beim Zusammenstoss zweier solcher Kerne stattfindet und eine Hantelstruktur dadurch zustande kommt. Die Mulde zwischen den zwei Hügeln des Molekülpotentials gibt dann Anlass zu charakteristischen Energiezuständen, die daher eine Erklärung für die beobachtete Resonanzstruktur liefern. Man könnte sich also leicht vorstellen, dass bei C - C-Streiff-Stössen, d.h. klassisch entweder bei Energien unterhalb der Coulomb-Barriere oder bei höheren Energien, verbunden mit einem hohen Drall, die nötige Neutronenaustausch-Wechselwirkung zustande kommt. Es ist dann fast unmöglich, dass bei Zuständen mit sehr hohem Spin das Quasi-Molekül-System in ein reines Zwischenkern-System mit kleinen Abmessungen zerfallen könnte - eher wird der Zerfall unter Emission der ursprünglichen Stosspartner vor sich gehen und so merklich den Compound-elastic Querschnitt erhöhen. Andererseits können bei kleinen Energien unterhalb E_C Stösse mit kleinem Drall auftreten, und da hier die Zentrifugalbarriere nur gering ist, wird ein Zerfall in das Zwischenkernsystem bevorzugt und eine Emission von Nukleonen und anderen leichten Teilchen statt der von schweren Ionen vorkommen. Auch ist die Bemerkung wichtig, dass Nukleonenübertragungen aus energetischen Gründen streng verboten sind; ferner kann kein Aufbrechen der Moleküle, z. B. zu $C^{11} + C^{13}$, vorkommen. Die quantitative Theorie dieses Modells ergibt nicht nur gute Übereinstimmung mit den beobachteten Breiten der Resonanzspitzen (diese könnten eigentlich auch durch Bildung eines normalen Mg^{24}-Zwischenkerns mit einer Anregungsenergie von ungefähr 20 MeV bei $E = E_C = 6,6$ MeV eklärt werden), sondern es ergeben sich auch die Abstände der Maxima von rund 320 keV (während die Zwischenkern-Hypothese Abstände von nur 50 keV voraussagen würde).

Die Tatsache, dass eine Resonanzstruktur bei O - O - Systemen nicht vorkommt, ist dadurch zu erklären, dass ein 0^{16}-Kern doppel-magisch ist und völlig abgeschlossene Schalen besitzt und infolgedessen kaum deformierbar ist. So kann bei den Entfernungen, bei denen die Kernbarriere (Coulomb- und Zentrifugalbarriere) immer noch wirksam eine Durchdringung verhindert, keine Neutronenaustauschbindung zustande kommen. Im O - O - System gibt es keinen Neutronenaustausch zwischen p-Schalen wie im C - C-System, sondern nur möglicherweise zwischen den p- und d-Schalen, was bedeutend weniger wahrscheinlich ist.

Zur Zeit ist noch nicht bekannt, ob das C - C-System ein Sonderfall ist, oder ob die Bildung eines Quasi-Moleküls auch bei Wechselwirkungen von anderen schweren Ionen vorkommen kann. Diese Frage und viele ähnliche werden in verschiedenen Laboratorien mit Schwer-Ionen-Zyklotrons und Tandem-van-de-Graaff-Beschleunigern intensiv untersucht.

18. DEUTERONEN

18.1 Einleitung

1932 gaben Urey, Brickwedde und Murphy (PR 1932, 39, 164 (L) und PR 1932, 40, 1) die Entdeckung eines schweren Wasserstoffisotops bei der Spektralanalyse angereicherter Säure aus elektrischen Akkumulatoren bekannt. Es wurden nicht nur die Balmer-Linien von H^1, sondern auch eine weitere, ein wenig gegenüber diesen verschobene Serie von Linien beobachtet, die von H^2 herrührte; beispielsweise war die Wellenlänge der H^1_α -Linie um 1,79 Å grösser als die der H^2_α -Linie; auf diese Weise konnte das schwere Isotop selbst bei einer Konzentration von nur 0,015 % nachgewiesen werden.

Die ISOTOPENVERSCHIEBUNG (ISOTOPE SHIFT) der entsprechenden Spektrallinien lässt sich mit Hilfe der Spektralenergien berechnen,

$$E = Ry(M)\, Z^2 h \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \tag{18.1}$$

worin E die Energie der Spektrallinie, Ry(M) die von der Kernmasse M abhängige Rydberg-Konstante,

$$Ry(M) = \frac{Ry(\infty)}{1 + \frac{m_e}{M}} \quad \text{mit} \quad Ry(\infty) \equiv \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3}, \tag{18.2}$$

n_1 und n_2 die Hauptquantenzahlen von Anfangs- und Endzustand sind. Für die Balmer-Serie ist $n_1 = 2$ und $n_2 = 3, 4, 5, \ldots$ Das Verhältnis der Rydberg-Konstanten von Deuterium und H^1 ist dann gleich dem Verhältnis der reduzierten Massen μ_e des Elektrons im Deuterium und Wasserstoff:

$$\frac{Ry(2)}{Ry(1)} = \frac{1 + \frac{m_e}{M_H}}{1 + \frac{m_e}{M_D}} = \frac{\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_H}}{\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_D}} = \frac{(\mu_e)_D}{(\mu_e)_H}. \tag{18.3}$$

Die relative Energieverschiebung ergibt sich daraus in erster Näherung zu

$$\frac{\delta E}{E} \equiv \frac{E_D - E_H}{E_H} = \frac{m_e}{2M'} = 0,272 \cdot 10^{-3}, \tag{18.4}$$

wobei M' die Nukleonenmasse und m_e die Elektronenmasse ist.

18.2 Wellenfunktion des Deuterons im Grundzustand

Ein direktes Beispiel der Kraft zwischen Nukleonen, die man heute auf Mesonenaustausch zurückführt, ist die Anziehung zwischen Proton und Neutron, die das stabile Deuteron ergibt. Dieses hat eine positive, wenn auch kleine Bindungsenergie, deren Wert B = 2,225 MeV experimentell aus der Schwellenenergie für die Photospaltung (photo-disintegration) oder aus den spektrographisch gewonnenen Kernmassen bestimmt werden kann.

Diese anziehende Kraft ist mit einer Energie W, der kinetischen Energie des Proton-Neutron-Systems, W = - B, verknüpft und kann als

(i) im allgemeinen kugelsymmetrisch (d. h. S-Zustand des Deuterons mit $\ell = 0$),

(ii) nicht elektromagnetisch ,

(iii) kurzreichweitig ($\approx 10^{-13}$ cm)

angesehen werden.

Während in der Atomphysik die Aufgabe bestand, die Energien zu bekannten Potentialen zu ermitteln, kann das Problem in der Kernphysik umgekehrt beschrieben werden, nämlich als die Bestimmung der Form des unbekannten Potentials aus Energiemessungen. Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung des Potentialverlaufs für das Deuteron, d. h. die Bestimmung der Wellenfunktion für das Deuteron in seinem Grundzustand, wenn man den Abstand zwischen Proton und Neutron verändert.

Wenn diese erst einmal bekannt ist, lässt sich der "Deuteronendurchmesser" abschätzen. Natürlich hängt diese Grösse von dem gewählten Potentialverlauf ab und stellt nur eine Art "mittleren Abstandes" dar. Dagegen hängt die Wellenfunktion nicht stark von der Form des Potentials ab.

18. 2. 1 Qualitative Behandlung

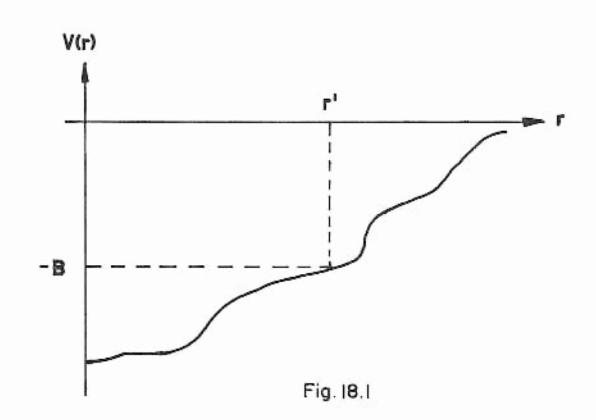


Fig. 18.1

Zunächst sei ein beliebiges Potential V(r) angenommen, worin r der Neutron-Proton-Abstand ist. Dann stellt das zu einer Energie V(r') = - B zugehörige r' die Reichweite der Kraft zwischen den Nukleonen dar (Fig. 18. 1).

Die Schrödinger-Gleichung lässt sich in der Form

$$\nabla^2\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[W - V(r)\right]\psi = 0 \qquad (18.5)$$

schreiben, worin

$$\mu \equiv \frac{M_p M_n}{M_p + M_n} \approx \frac{1}{2} M' \qquad (18.6)$$

die reduzierte Masse des Deuterons und M' die Nukleonenmasse ist. ψ stellt eine normierte Wellenfunktion

$$\int_\tau |\psi|^2 \, d\tau = 1 \qquad (18.7)$$

dar, die angibt, dass die Wahrscheinlichkeit, das Deuteron innerhalb des Volumens τ anzutreffen, gleich 1 ist.

Die Wellenfunktion lässt sich in ein Produkt eines radiusabhängigen und eines winkelabhängigen Anteils zerlegen:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \, . \, Y(\vartheta, \varphi) . \qquad (18.8)$$

Man führt die modifizierte radiale Wellenfunktion u(r) ein, die durch

$$f(r) \equiv \frac{1}{r} \cdot u(r) \qquad (18.9)$$

definiert wird; Y ist hier konstant, weil ein kugelsymmetrischer Zustand betrachtet wird. u(r) erfüllt die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = 0 \quad \text{weil} \quad f(0) \neq \infty \\ u(r) \text{ darf nicht schneller wachsen als } r, \text{ wenn } r \to \infty \text{, weil } f(\infty) = 0. \end{array}\right\} \qquad (18.10)$$

Die Schrödinger-Gleichung kann in eine radiale und eine winkelabhängige Gleichung separiert werden, von denen die erste

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{M'}{\hbar^2}\left[W - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{M' r^2}\right] u = 0 \qquad (18.11)$$

lautet, mit $2\mu = M'$, so dass für den S-Zustand ($\ell = 0$),

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{M'}{\hbar^2}\left[W - V(r)\right] u = 0 \qquad (18.12)$$

gilt. In einfacher Form lässt sich dies schreiben als

$$\frac{d^2u}{dr^2} + K^2 u = 0 \qquad (18.13)$$

mit

$$K \equiv \sqrt{\frac{M'}{\hbar^2}\left[W - V(r)\right]} \; . \qquad (18.14)$$

Die Lösungen sind

$$u \sim \sin Kr \qquad r < r', \qquad \text{(K reell)},$$

$$u \sim e^{-r/\rho} \qquad r > r', \qquad \text{(K imaginär)}, \qquad (18.15)$$

wobei $\rho = \frac{\hbar}{\sqrt{M'B}}$ ist und $V(r)$ vernachlässigt wird.

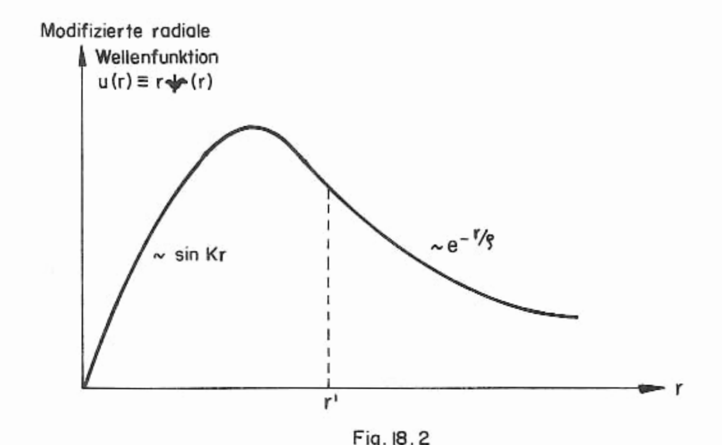


Fig. 18.2

Die Grösse

$$\rho = \frac{\hbar}{\sqrt{M'B}} = 4{,}31 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \qquad (18.16)$$

wird "DEUTERONENDURCHMESSER" (manchmal ungenau "Deuteronenradius") genannt. ρ ist grösser als die Reichweite r' der Kern-Austauschkräfte. Es lässt sich zeigen, dass für etwa 54 % der Zeit die Nukleonen einen grösseren Abstand haben als die Reichweite der Kräfte zwischen ihnen; obwohl eine solche Situation klassisch nicht statthaft wäre, ist sie aus quantenmechanischen Gründen möglich.

Man kommt auf diese Weise dazu, eine schwache Bindung zu erwarten. Das ist tatsächlich der Fall, wie sich bei dem Vergleich der Bindungsenergie des Deuterons von 2,225 MeV mit der des Heliumkerns von 28 MeV oder der eines Nukleons in einem durchschnittlichen Kern von 8 MeV zeigt.

18.2.2 Kastenpotential (Rectangular Well)

Nimmt man eine bestimmte Form für das Potential $V(r)$ an, und zwar einfachheitshalber eine rechteckige Form mit

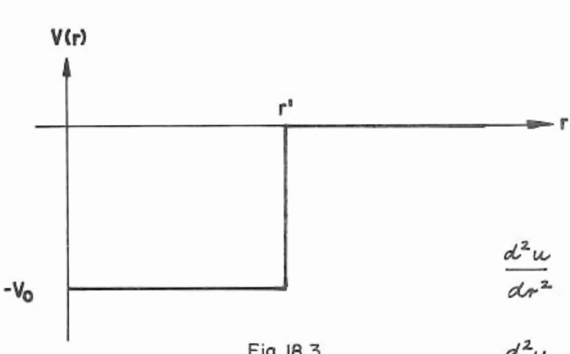


Fig. 18.3

$$V(r) = -V_0 \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq r'$$
$$V(r) = 0 \quad \text{für} \quad r' \leq r \leq \infty \qquad (18.17)$$

(Fig. 18.3), dann erhält man als Wellengleichungen für die zwei Gebiete

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{M'}{\hbar^2}(V_0 - B)\,u = 0, \qquad (r < r') \quad (18.18)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{M'B}{\hbar^2}\,u = 0, \qquad (r > r') \quad (18.19)$$

mit den Lösungen

$$u = A \sin Kr, \qquad (r < r') \quad (18.20)$$

bzw.

$$u = C\, e^{-r/\rho}, \qquad (r > r') \quad (18.21)$$

worin

$$K \equiv \sqrt{\frac{M'}{\hbar^2}(V_0 - B)} \qquad (18.22)$$

und

$$\rho \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{M'B}}, \qquad (18.23)$$

wenn man die Randbedingungen

$$u(0) = \left.\frac{u(r)}{r}\right|_{r \to \infty} = 0 \qquad (18.24)$$

beachtet. Bei r = r' muss u(r) und die Ableitung $\frac{du}{dr}$, bzw. die logarithmische Ableitung $\frac{d(\ln u)}{dr}$, stetig sein. Wendet man diese Bedingung auf die beiden Lösungen an, indem man ihre logarithmischen Ableitungen gleichsetzt,

$$K \operatorname{ctg} Kr' = -\frac{1}{\rho}, \qquad (18.25)$$

dann besteht eine Beziehung zwischen der Bindungsenergie des Deuterons, B, der Tiefe des Potentialtopfes V_0 und dem Radius r'.

Also ist

$$\operatorname{ctg} Kr' = -\frac{1}{\rho K} \approx \sqrt{\frac{B}{V_0}} \qquad (18.26)$$

und da B klein gegen V_0 ist, kann man diesen Ausdruck näherungsweise null setzen, woraus

$$Kr' \approx \frac{\pi}{2}, \qquad (18.27)$$

d. h.

$$\boxed{V_0 \cdot r'^2 \cong \frac{\pi^2\hbar^2}{4M'} \approx 10^{-24}\ \text{MeV}\cdot\text{cm}^2} \qquad (18.28)$$

folgt. Man kann nur das Produkt $V_0 \cdot r'^2$, aber nicht V_0 und r' getrennt ausrechnen. Da in die ursprünglichen Gleichungen nur ein bekannter Parameter B eingesetzt wurde, ist nur eine Unbekannte bestimmbar. Infolgedessen können sich die Potentiale von solchen mit tiefem Topf und kleinem Radius bis zu solchen mit flachem Topf und grossem Radius erstrecken; nimmt man den plausiblen Wert

$$r' = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}$$

an, so erhält man

$$V_0 \sim 43\ \text{MeV}.$$

Erst für $r' \cong 2 \cdot 10^{-13}$ cm wird $V_0 = 25$ MeV, was besser mit anderen Potentialwerten übereinstimmt.

Man hätte auch andere Formen für das Potential einsetzen können, z. B.

Gauss-Potential: $$u(r) = -u_0\, e^{-r^2/\rho^2}, \qquad (18.29)$$

Exponentielles Potential: $$u(r) = -u_0\, e^{-2r/\rho}, \qquad (18.30)$$

Yukawa-Potential: $$u(r) = -u_0\, \frac{e^{-r/\rho}}{r/\rho}. \qquad \text{(PR 1938, 57, 991)} \quad (18.31)$$

Wenn der Potentialverlauf mit dem bei Kräften kurzer Reichweite zwischen Nukleonen übereinstimmt, so hat seine Form, wie sich zeigt, nur geringen Einfluss auf die daraus folgenden Resultate. In jedem Falle folgt:

(i) Potential $\gg$ Bindungsenergie.

(ii) Ausserhalb der Reichweite der Nukleonenkräfte nimmt die radiale Wellenfunktion des Deuterons wie $e^{-r/\rho}$ ab.

18.2.3 Durchmesser des Deuterons

Wie an den Betrachtungen beim Topfpotential gezeigt wurde, ist es nicht möglich, für das Deuteron den Radius r' des Potentialtopfes eindeutig zu bestimmen, den man als die Reichweite der Nukleonenkräfte nehmen könnte. Es folgt auch nicht, dass der Durchmesser des Deuterons notwendigerweise genau gleich dieser Reichweite sein muss. Es ist auch tatsächlich üblich, weniger den Kastenradius r', bei dem die Wellenfunktion im Grundzustand ihre analytische Form ändert, dem Deuteronendurchmesser gleichzusetzen, als vielmehr den Wert von ρ, bei dem also die Wellenfunktion auf den e-ten Teil ihres Wertes abgesunken ist:

$$\rho = \frac{\hbar}{\sqrt{M'B}} = 4,31 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}. \qquad (18.32)$$

Dieser Wert ist grösser als r' (Fig. 18.4).

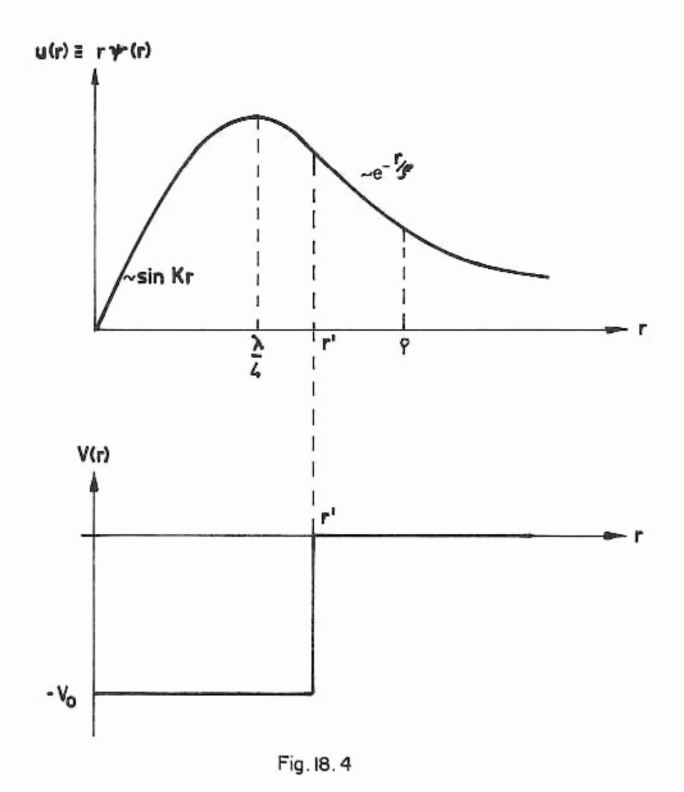


Fig. 18.4

Die Funktion $\psi(r)$ verhält sich nun, abgesehen von dem kleinen Bereich $0 \leq r \leq r'$ innerhalb des Potentialtopfes, exponentiell. Infolgedessen ist es möglich, sie in gewissen Fällen, wo ihr Integral über den ganzen Raum $0 < r < \infty$ zu erstrecken ist, einfachheitshalber durch

$$\psi = \frac{u}{r} = \frac{e^{-r/\rho}}{r} \qquad (18.33)$$

zu ersetzen (was aber nicht mit der Form des Yukawa-Potentials in dem Bereich $0 < r < r'$ zu verwechseln ist). Durch die Normierung wird (18.33) zu

$$\psi' = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho}} \cdot \frac{e^{-r/\rho}}{r}. \qquad (18.34)$$

Mit dieser Form der Wellenfunktion ist der mittlere Abstand zwischen p und n im Deuteron

$$S_D = \frac{3}{4}\rho = 3,24 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}; \qquad (18.35)$$

dieser Wert stellt empirisch den vernünftigsten Wert des "Deuteronendurchmessers" dar.

18. 3 Bindungsenergie des Deuterons

Da das Deuteron ein einzigartiges Zweikörperproblem darstellt, ist seine Bindungsenergie von besonderer Bedeutung für Überlegungen über die Kernkräfte. Ihr Wert bestimmt den "Durchmesser" des Deuterons.

Der Mittelwert der von verschiedenen Autoren gemessenen Bindungsenergie ist nach Berechnungen von Li, Whaling, Fowler und Lauritsen (PR 1951, 83, 512)

$$B = 2,225 \pm 0,002 \text{ MeV}.$$

Neben anderen Methoden benützte man zur experimentellen Bestimmung

(i) die $D(\gamma, p)n$-Reaktion : Photospaltung des Deuterons, und

(ii) die $H^1(n,\gamma)D$-Reaktion : Energiemessung der γ's beim Neutroneneinfang.

Die erste Methode verlangt die Erzeugung von γ's bekannter und kontrollierbarer Energie als Bremsstrahlung, bei plötzlicher Abbremsung schneller Elektronen in einer Targetanode. Diese γ's treffen dann auf ein Target aus schwerem Eis und lösen die Reaktion

$$\gamma + H^2 \rightarrow H^1 + n$$

aus, wenn ihre Energie den kritischen Wert E übersteigt, der durch den Q-Wert der Kernreaktion bestimmt ist (Fig. 18. 5). Dieser kritische Wert wird gemessen. Unter der Annahme, dass dann p und n mit verschwindender kinetischer Energie emittiert werden, ist die Deuteronenbindungsenergie auf diese Weise bestimmt.

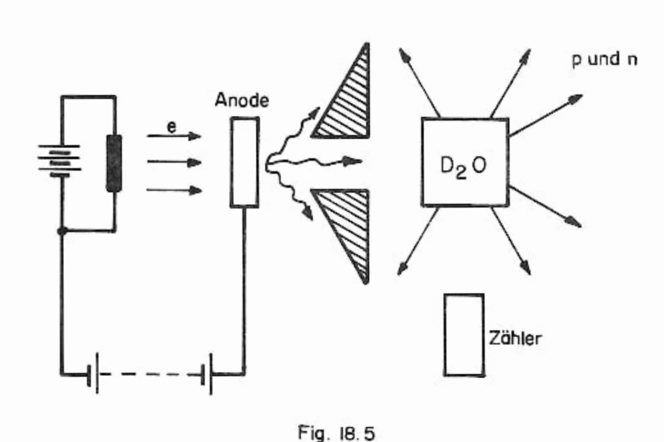


Fig. 18.5

Die zweite Methode wurde von Bell und Elliott benützt (PR 1950, 79, 282), die die Energie der γ's nach dem Neutroneneinfang zu 2,229 ± 0,005 MeV bestimmten. Nach Addition der Rückstossenergie des Deuterons von 0,0013 MeV ergibt sich die Bindungsenergie des Deuterons zu

$$B = 2,230 \pm 0,007 \text{ MeV}.$$

Dieselbe Methode wurde kürzlich von Chupp, Jewell u. John (PR 1961, 121, 234) benützt. Mit Hilfe eines DuMond-Spektrometers wurde die γ-Energie in Cauchois-Geometrie bestimmt. Nach Rückstoss-Korrektur ergab sich der Wert

$$B = 2,225 \pm 0,003 \text{ MeV}.$$

18. 4 Spin und magnetisches Moment des Deuterons

Da Proton und Neutron im Deuteron parallelen Spin haben, ist der SPIN des Deuterons + 1 in Einheiten $\hbar$. Das MAGNETISCHE MOMENT des Deuterons zeigt jedoch eine Anomalie, denn sein experimenteller Wert ist 0,8565 μ_K, während die Summe aus den Momenten des Protons 2,7928 μ_K und des Neutrons - 1,9131 μ_K gleich 0,8797 μ_K ist. Der Unterschied von 2,6 % lässt sich darauf zurückführen, dass die Annahme, das Deuteron bestehe allein im S-Zustand, teil-

weise nicht erfüllt ist. Ein magnetisches Moment in Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert ergibt sich aus einer Mischung von 96 % Zuständen mit $\ell = 0$ und 4 % mit $\ell = 2$, da für den Zustand $\ell = 2$ das theoretische magnetische Moment gleich 0,3104 μ_K ist. Der Zustand $\ell = 1$ ist durch Paritätsüberlegungen ausgeschlossen.

18.5 Deuteronenreaktionen

18.5.1 Einleitung

Es ist im Hinblick auf den verhältnismässig grossen Abstand zwischen dem Schwerpunkt und dem Ladungsmittelpunkt zu erwarten, dass das Deuteron sich relativ leicht spalten lässt; sein Stossquerschnitt ist gross. Solche Spaltungsreaktionen lassen sich einteilen in:

(i) Photospaltung ;
(ii) elektrisches Zerreissen des Deuterons im Coulomb-Feld eines Kernes ;
(iii) Stripping bei hohen Deuteronenenergien.

Von diesen ist die Photospaltung des Deuterons

$$H^2 + \gamma \rightarrow H^1 + n$$

schon kurz erörtert worden.

18.5.2 Elektrische Spaltung des Deuterons im Coulomb-Feld eines Kernes

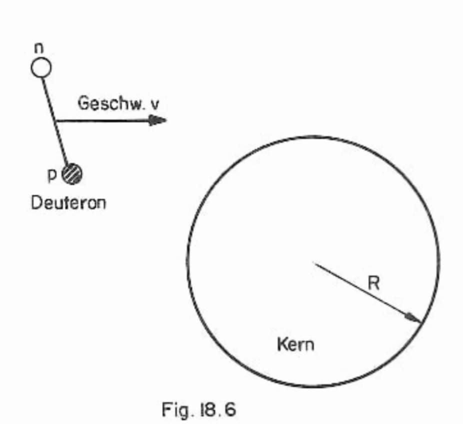


Fig. 18.6

Das Deuteron erfährt beim Annähern an den Stosskern (Fig. 18.6) einen schnellen Wechsel des elektromagnetischen Potentials. Dadurch kommt es zur elektrischen Spaltung des Deuterons:

$$d + X \begin{cases} \nearrow p + (n + X) \\ \searrow n + (p + X) \end{cases} \quad (18.36)$$

wobei X der Targetkern ist. Die Stosszeit t ist von der Grössenordnung $\frac{R}{v}$. Der Wechsel des Potentials entspricht einem Energiebetrag, dessen maximale Grösse durch die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{t} = \frac{v}{R} \quad (18.37)$$

gegeben wird. Setzt man die typischen Werte $v = 3 \cdot 10^9$ cm/sec (0,1c) und $R = 5 \cdot 10^{-13}$ cm ein, dann ist die Energie $h\nu = 3,6$ MeV, was die Bindungsenergie des Deuterons übertrifft. Der Wirkungsquerschnitt für einen solchen Prozess ist gross. Beispielsweise ist für Deuteronen von 200 MeV $\sigma = 2 \cdot 10^{-29} Z^2 cm^2$; σ kann bei den schwersten Elementen Werte bis zu 0,2 b erreichen.

18.5.3 Stripping

Bei diesem Prozess wird angenommen, dass nur eines der beiden Nukleonen des Deuterons mit dem Targetkern in Wechselwirkung tritt, während das andere in freiem Zustand weiterfliegt, einen Teil der ursprünglichen Energie mit sich tragend (Fig. 18.7). Das Deuteron wird also im

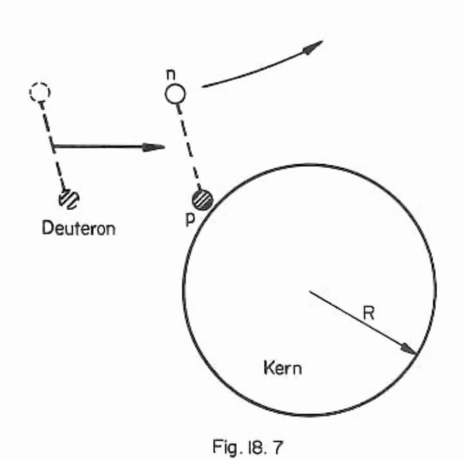


Fig. 18. 7

Feld des Kerns auseinandergerissen ("stripped") und eines seiner beiden Nukleonen im Kern eingefangen. Der Wirkungsquerschnitt für einen solchen Prozess ist gross, sogar für einen leichten Kern; z. B. für Be^7 ist $\sigma \sim 100$ mb. Der Wirkungsquerschnitt wird weiter unten berechnet.

Es werde nun der Stripping-prozess (d, n) betrachtet, bei dem das Proton vom Targetkern eingefangen wird, wie es beispielsweise experimentell an C^{13} von Bromley et al. (PR 1952, 88, 565) und Schecter et al. (PR 1955, 97, 184) und theoretisch von Serber (PR 1947, 72, 1008) untersucht wurde. Die Neutronenenergie kann wie folgt in einer vereinfachten, angenäherten Weise berechnet werden:

Es sei p_o der Impuls des Neutrons, der aus der Translationsenergie des Deuterons folgt, p_r der Impuls des Neutrons infolge der relativen, internen Bewegung zwischen den Nukleonen des Deuterons, p der totale Anfangsimpuls des Deuterons, E_d die kinetische Energie des Deuterons, $M_d = 2M'$ seine Masse, wobei $M' = 1836\ m_e$ die Nukleonenmasse ist, und B die Bindungsenergie. Nun hat jedes der Nukleonen des Deuterons einen Anfangsimpuls von $\approx p_o$ infolge seiner Translationsbewegung; dann ist

$$p = 2 p_o \qquad (18.38)$$

und

$$E_d = \frac{p^2}{2M_d} = \frac{(2p_o)^2}{2(2M')} = \frac{p_o^2}{M'} . \qquad (18.39)$$

Somit ist

$$p = \sqrt{M' E_d} \qquad (18.40)$$

und

$$p_r = \sqrt{M' B} \qquad (18.41)$$

in dem Augenblick, wo das Deuteron zerreisst. Vektoriell ergibt sich mit $\vartheta \approx \sqrt{\frac{B}{E_d}}$, wenn man vereinfacht $p_r \perp p_o$ annimmt (Fig. 18. 8), der maximale Winkel ϑ_{max}, unter dem das Neutron gegenüber der ursprünglichen Richtung des Deuterons gestreut wird. Für Deuteronen von 190 MeV ist

$$\vartheta_{max} \cong \sqrt{\frac{2}{190}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 6^\circ . \qquad (18.42)$$

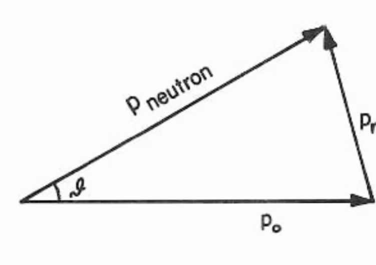


Fig. 18.8

Die Neutronen von der Strippingreaktion sind also dadurch charakterisiert, dass sie auf einen Kegel in Vorwärtsrichtung beschränkt sind, im Gegensatz zu solchen, die durch eine (d, n)-Reaktion entstehen und in einen grossen Winkelbereich gestreut werden (Fig. 18. 9).

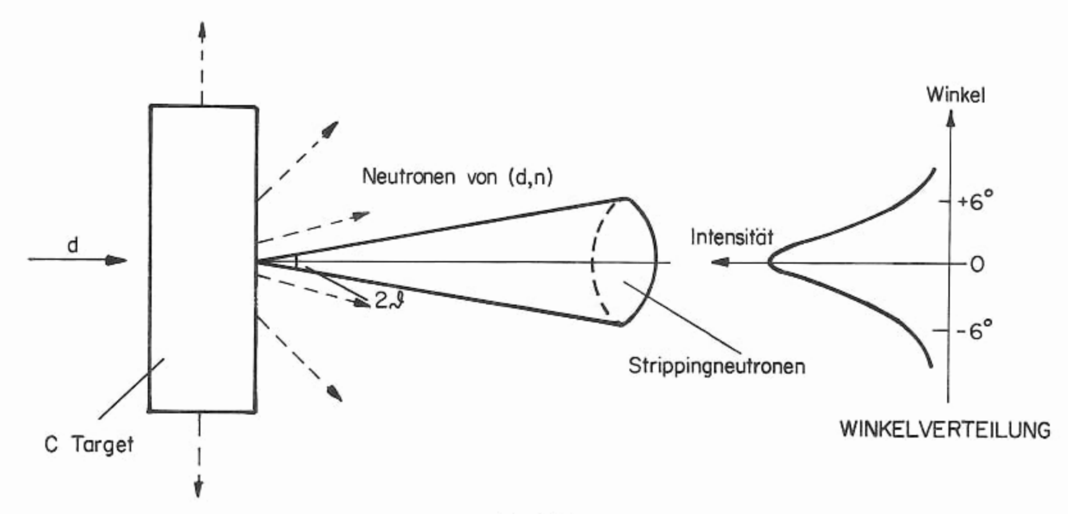


Fig. 18.9

Die Energie der Strippingneutronen E_n ist gegeben durch

$$E_n \cong \frac{(p_0 \pm p_r)^2}{2M'} = \frac{(\sqrt{E_d} \pm \sqrt{B})^2}{2} . \qquad (18.43)$$

Dieses lässt sich für $E_d \gg B$ entwickeln nach

$$E_n \cong \frac{E_d}{2}\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{B}{E_d}}\right), \qquad (18.44)$$

woraus zu sehen ist, dass die Energie der freiwerdenden Neutronen ungefähr gleich der halben Deuteronenenergie ist, mit einer Abweichung von $\pm\sqrt{E_d B}$. Für E_d = 190 MeV folgt $E_n \approx 95 \pm 20$ MeV. Die theoretische Energieverteilung, wie sie strenger für C von Serber berechnet wurde, ergibt eine Maximalenergie von 85 MeV mit einer Winkelverteilung wie in Fig. 18. 10.

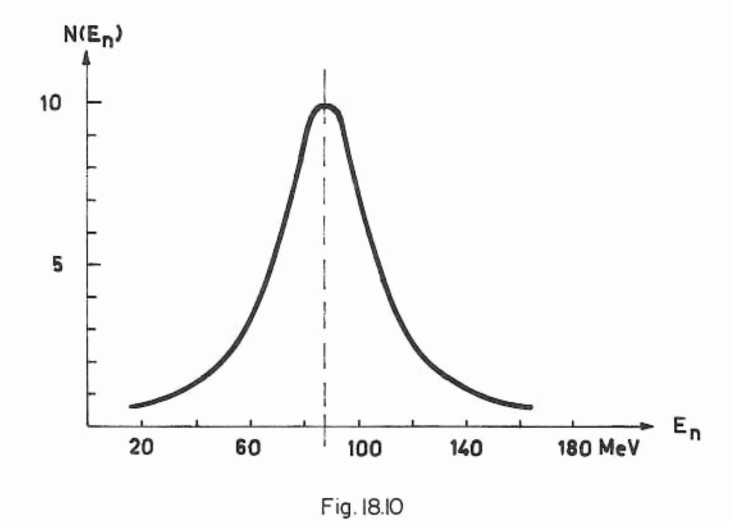


Fig. 18.10

Die experimentellen Untersuchungen an C liefern Ergebnisse in guter Übereinstimmung mit dieser Voraussage, ebenso die Messungen an Be von Hedley et al. (PR 1949, 75, 351). Resultate einer Messung der Winkelverteilung der entstehenden Protonen bei der Na^{23}(d, p) Na^{24}-Reaktion, die von Shapiro (PR 1954, 93, 290) untersucht wurde, sind in Fig. 18.11 wiedergegeben. Die ausgezogenen Kurven entsprechen den Voraussagen der Theorie von Butler für ℓ_n = 1 bzw. 2; sie liegen beide innerhalb des Bereiches der experimentellen Kurve. Da aber aus den bekannten Spins der Grundzustände von Na^{23} bzw. Na^{24} ($\frac{3}{2}$ bzw. 4) folgt, dass ℓ_n nur Werte zwischen 2 und 6 annehmen kann, ist nur ℓ_n = 2 für das eingefangene Neutron möglich. Das ist dann in Übereinstimmung mit Schalenmodell-Voraussagen, aus welchen man erwarten würde, dass der Na^{24}-Grundzustand aus dem Na^{23} durch Neutroneneinfang in der p-Schale zustande kommt. Der Wert ℓ_n = 2 bedeutet weiter, dass die Parität sich nicht durch die Reaktion ändert: Da aber der Grundzustand von Na^{24} gerade Parität hat, wird durch diese Untersuchung festgestellt, dass der Grundzustand von Na^{23} ebenfalls gerade Parität besitzen muss, also ein $\frac{3}{2}$+ -Niveau ist.

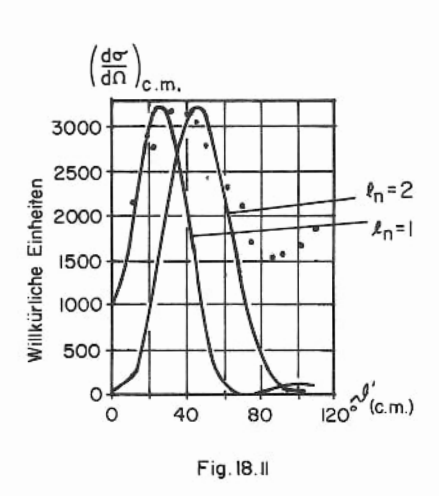


Fig. 18.11

18.5.4 Stripping-Wirkungsquerschnitt

Im Folgenden soll die Wahrscheinlichkeit, dass eine Strippingreaktion passiert, berechnet werden. Dies liefert ein Beispiel für die Berechnung eines geometrischen Wirkungsquerschnittes von Kernreaktionen.

Die Situation für eine (d, n)-Strippingreaktion kann man sich am besten veranschaulichen, indem man den Vorgang in einer zweidimensionalen Projektion betrachtet. Die Projektionsrichtung ist die Bewegungsrichtung des Deuterons, das im Begriff ist, einen nichtzentralen Zusammenstoss mit dem kugelförmigen Targetkern vom Radius R zu erleiden. Es wird zunächst angenommen, dass das einfallende Deuteron einen konstanten Durchmesser ρ und eine beliebige Orientierung besitzt. Ausserdem wird angenommen, dass der Nukleoneneinfang mit 100 % Wahrscheinlichkeit stattfindet, wenn das Nukleon innerhalb des Kernradius auftrifft. Häufig wird eine ANHEFTWAHRSCHEINLICHKEIT (STICKING PROBABILITY) ξ_p für das Proton und ξ_n für das Neutron eingeführt, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass der Einfang selbst innerhalb des Kernradius R nicht unbedingt stattfindet. Man kann folgende drei Situationen betrachten (Fig. 18.12) :

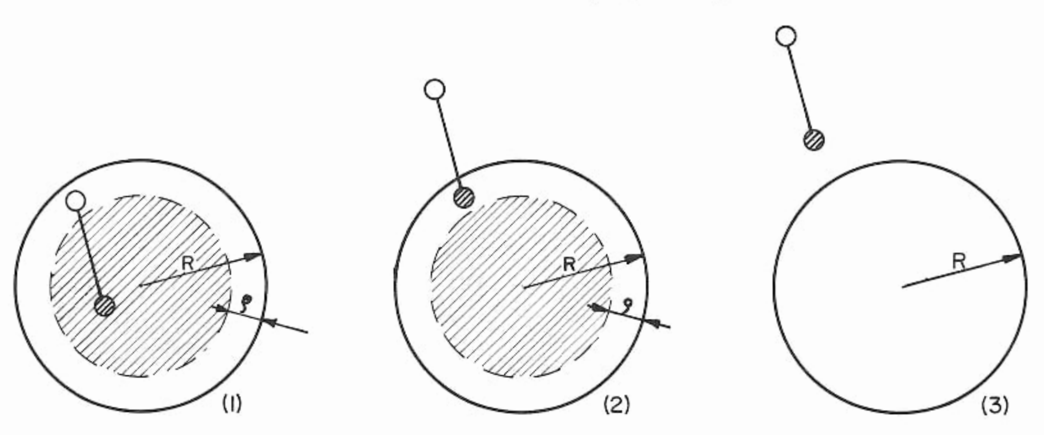


Fig. 18.12

Fall (1): Wenn das Proton innerhalb des schraffierten Kreises mit dem Radius $(R-\rho)$ auftrifft, dann wird auch das Neutron eingefangen, da es innerhalb R einfällt. Dann findet Deuteroneneinfang statt, der zu Zwischenkernbildung, aber nicht zur Strippingreaktion führt.

Fall (2): Hier wird das Proton eingefangen, aber das Neutron nicht notwendigerweise; es besteht dann die Möglichkeit einer Strippingreaktion, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist aus der Wahrscheinlichkeit bestimmbar, mit der das Neutron ausserhalb des Radius R auftrifft.

Fall (3): Obwohl eventuell Deuteronspaltung im elektrischen Feld des Kerns stattfinden kann, wird kein Nukleon eingefangen, da sich sowohl Proton als auch Neutron ausserhalb von R befinden.

Die Berechnung lässt sich also auf den Fall (2) beschränken. Dann erscheint die Situation in der Projektion wie in Fig. 18.13, worin das Kästchen in der Mitte ein Flächenelement darstellt, in dem sich das Proton befinden soll. In der umgebenden Kreisfläche, die durch den Radius aufgespannt wird, muss dann das Neutron liegen. Wenn das Neutron in dem unschraffierten Teil liegt, findet Deuteroneneinfang und Zwischenkernbildung statt; wenn es in dem schraffierten Teil ausserhalb der Kernoberfläche liegt, dann findet (d,n)-Stripping statt, so dass die Grösse der schraffierten Fläche die Strippingwahrscheinlichkeit bestimmt.

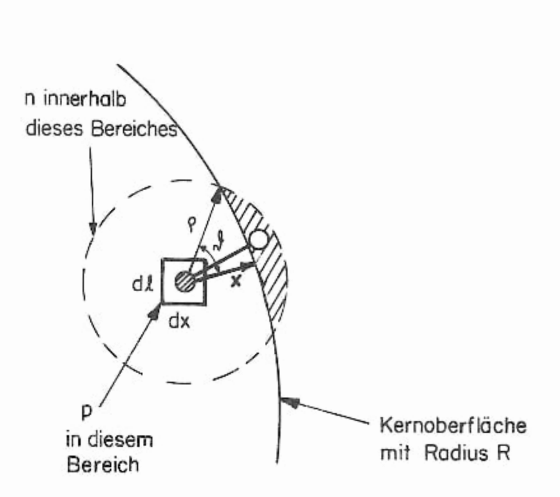


Fig. 18.13

Benützt man die Koordinaten in Fig. 18.13, wobei x den radialen Abstand des Protons von der Kernoberfläche darstellt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Proton in der rechteckigen Fläche befindet, proportional $dx, d\ell$, und die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Neutron in der schraffierten Fläche befindet, proportional $\frac{\vartheta}{\pi}$. Dann ist der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\rho) = \iint \frac{\vartheta}{\pi} \cdot dx\, d\ell \, . \qquad (18.45)$$

Für einen grossen Kern kann man in erster Näherung annehmen, dass das Proton vom Mittelpunkt des Kerns im Abstand R liegt, so dass

$$\int d\ell = 2\pi R \, . \qquad (18.46)$$

Da $x = \rho \cos\vartheta$ ist, folgt

$$dx = -\rho \sin\vartheta \, d\vartheta \qquad (18.47)$$

und damit

$$|\sigma(\rho)| = 2R\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = 2R\rho \left[\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= 4R\rho \, . \qquad (18.48)$$

Hierin geben die Integrationsgrenzen an, dass die Orientierung des Neutrons um einen Winkel der Grösse π variieren kann, wenn sich das Proton auch nahe der Kernoberfläche befindet.

Diese Rechnung stellt jedoch nur eine rohe Abschätzung des Stripping-Wirkungsquerschnittes dar und wird anschliessend strenger durchgeführt werden.

Für die genauere Rechnung muss berücksichtigt werden, dass der Deuteronendurchmesser gar nicht konstant ist. Die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand der Nukleonen im Deuteron zwischen r und r + dr liegt, ist gleich $|\psi|^2 dA$, worin ψ die Wellenfunktion des Deuterons für den betrachteten Zustand und dA das Volumenelement einer Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr ist,

$$dA = 4\pi r^2 dr \; . \qquad (18.49)$$

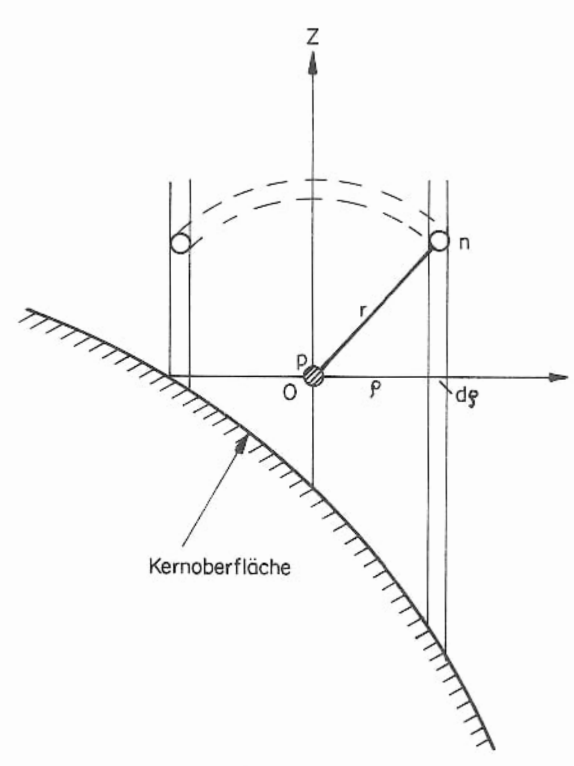


Fig.18.14

In Fig. 18.14 stellt r den unbekannten, variablen Abstand der Nukleonen im Deuteron in irgendeinem Moment dar und ρ seine Projektion auf die Ebene, die senkrecht auf der Bahn steht, auf der sich das Proton dem Kern nähert (z -Achse). Damit lassen sich alle möglichen Orientierungen des Deuterons bezüglich des Kernes bei der Integration in der Rechnung erfassen.

Der Wirkungsquerschnitt für Stripping ist gegeben durch Multiplikation von $\sigma(\rho)$ mit der Wahrscheinlichkeit, dass die Projektion des Abstandes der Nukleonen ρ ist :

$$\sigma = \sigma(\rho) \cdot |\psi|^2 \, d\rho' \qquad (18.50)$$

worin

$$d\rho' = 2\pi \rho \, d\rho \, dz \qquad (18.51)$$

ein zylindrisches Volumenelement ist,

und da

$$r^2 = z^2 + \rho^2 , \qquad (18.52)$$

$$dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \qquad (18.53)$$

ist, gilt also

$$\sigma = \int\limits_{\substack{\text{Alle } \rho \\ \text{Alle } r}} 4R\rho \cdot |\psi|^2 \cdot 2\pi \rho \, d\rho \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \; . \qquad (18.54)$$

Die Integrationsgrenzen sind $0 \to \infty$ für ρ und $0 \to \infty$ für z bzw. r. Damit ist

$$\sigma = 8\pi R \int_0^\infty |\psi|^2 \, r\,dr \int_0^r \frac{\rho^2 \, d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \; . \qquad (18.55)$$

Das rechte Integral ergibt $\frac{\pi}{4} r^2$; infolgedessen lässt sich der Ausdruck als

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \cdot R \int_0^\infty |\psi|^2 \, r \, dA \qquad (18.56)$$

schreiben, worin das Integral, wie man sieht, einfach den quantenmechanischen Erwartungswert für den Proton-Neutronabstand im Deuteron ausdrückt; bezeichnet man diesen mit $R_{Deuteron}$ (fälschlicherweise Deuteronenradius genannt, obwohl es eigentlich der Deuteronendurchmesser ist), dann ist

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi}{2} R_{Kern} \cdot R_{Deuteron}} \qquad (18.57)$$

der Wirkungsquerschnitt für Stripping.

Die Grösse $R_{Deuteron}$ kann gleich $\rho = 4,4$ f oder, wie in (18.35) gezeigt, etwas genauer gleich $\frac{3}{4}\rho$ gesetzt werden.

Setzt man

$$R = 1,5 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \text{ cm},$$

d.h.

$$R_D = 2,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm (für } A = 2),$$

dann erhält man $\rho = 2 R_D = 4,4 \cdot 10^{-13}$ cm.

Mit der Annahme $R_{Deuteron} = \frac{3}{4}\rho = 3,3 \cdot 10^{-13}$ cm folgt $\sigma = 8 \cdot 10^{-26} A^{1/3} \text{ cm}^2$, (18.58)

worin A die Massenzahl des Targetkerns ist. Dann ergibt sich für Be^7 $\sigma = 150$ mb und für U^{238} $\sigma = 480$ mb.

18.5.5 Phillips-Oppenheimer-Prozess

Bisher sind die beiden Strippingprozesse (d,n) und (d,p) analog zueinander behandelt worden, so dass beispielsweise für den (d,p)-Prozess die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Kern und freiwerdendem Proton vernachlässigt worden ist. Dies gilt für hohe Energien, ist jedoch für niedrige Energien nicht erlaubt. Dann ist die potentielle Energie des Deuterons im Coulomb-Feld des Kernes $\frac{Ze^2}{r}$ von gleicher Grössenordnung wie die Bindungsenergie und

(i) der Weg des Deuterons nicht mehr gerade;

(ii) findet eine Wechselwirkung des Coulomb-Feldes mit dem Proton statt.

Beim Neutroneneinfang braucht das Proton sich nur bis auf eine Entfernung R_{Kern} + $R_{Deuteron}$ dem Mittelpunkt des Kernes zu nähern (Fig. 18.15).

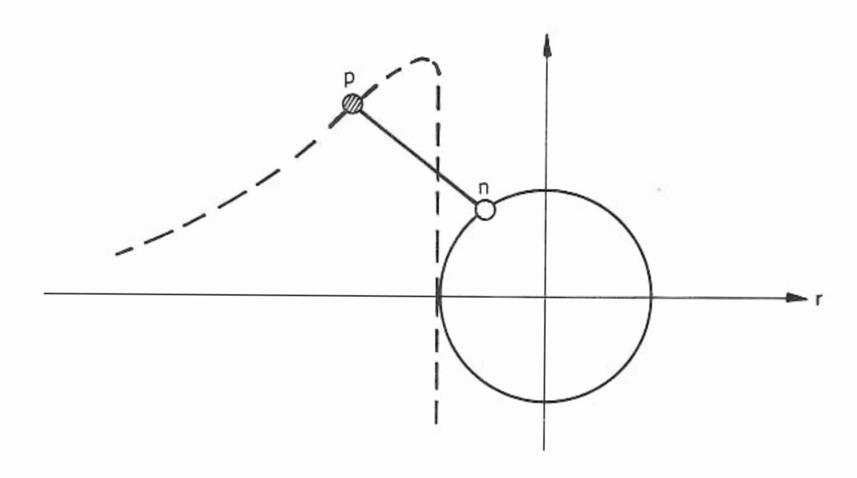


Fig. 18.15

Wenn also

$$E_d \lesssim \frac{Ze^2}{R} \tag{18.59}$$

ist, dann kann nur die Strippingreaktion (d, p) stattfinden. Prozesse dieser Art werden als "PHILLIPS-OPPENHEIMER-PROZESSE" (PR 1935, 48, 500) bezeichnet. Sie kommen nur für Deuteronenenergien unterhalb der Höhe der Coulomb-Barriere in Betracht; man dachte ursprünglich, dass Strippingprozesse nur in diesem Bereich niedriger Energien stattfinden. Peaslee (PR 1948, 74, 1001) nahm eine Erweiterung für hohe Energien vor; weitere Verbesserungen in der Theorie wurden von Butler (Proc. Roy. Soc. 1951, A208, 559) erzielt. - Wie man sieht, werden bei niedrigen Energien (d, p)-Prozesse bevorzugt; die Anheftwahrscheinlichkeit ist dabei für Neutronen $\xi_n \sim 1$ und für Protonen $\xi_p \sim 0$. Bei Energien hingegen, die höher sind als die Coulomb-Barriere, können beide Strippingreaktionen (d, p) und (d, n) stattfinden; die Coulomb-Barriere spielt dann keine Rolle, und das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte wird einfach ξ_n / ξ_p.

18. 5. 6 Anwendung des Tunneleffektes auf Stripping

Die Berechnung der Energieschwelle Q für den Phillips-Oppenheimer-Prozess $Na^{23}(d, p)Na^{24}$ ergibt $Q \cong 2$ MeV, wenn man halbklassisch rechnet. Clark und Irvine (PR 1944, 66, 231) beobachteten jedoch experimentell, dass die Reaktion schon bei Deuteronenenergien von 1, 1 MeV einsetzt. Dies lässt sich quantenmechanisch erklären, wenn man den Tunneleffekt berücksichtigt. Benützt man entsprechend der Gamow-Theorie die Beziehungen

Transparenz: $$T = e^{-G}, \tag{18.60}$$

Gamow-Faktor: $$G = \sqrt{\frac{8M_{red}Zze^2}{\hbar^2}} \cdot \sqrt{b} \left\{ \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right\} \tag{18.61}$$

und die Werte: Reduzierte Masse des Systems (Na^{23}, d) $M_{red} = 3.06 \cdot 10^{-24}$ g,
Kernradius des Na^{23} $R = 4,12 \cdot 10^{-13}$ cm,
Höhe der Coulomb-Barriere $E_C = \frac{Zze^2}{R} = 3,85$ MeV,

dann erhält man

$$\sqrt{\frac{8M_{red}Zze^2}{\hbar^2}} = 7,52 \cdot 10^6 \ cm^{-1/2} \tag{18.62}$$

und

(1) für $E_d = 1,9$ MeV
$b = 8,36 \cdot 10^{-13}$ cm
$G = 0,941$
$T = 39,1$ %

(2) für $E_d = 1,1$ MeV
$b = 1,442 \cdot 10^{-12}$ cm
$G = 5,04$
$T = 0,65$ % .

Also schon bei $E_d = 1,1$ MeV ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deuteronen die Potentialbarriere durchdringen und zum Phillips-Oppenheimer-Prozess Anlass geben, merklich verschieden von Null.

19. NEUTRONEN-PHYSIK

19.1 Die Entdeckung des Neutrons

Bei einer Reihe von Untersuchungen über α-Bestrahlung beobachteten Bothe und Becker (Z. Phys. 1930, 66, 289), dass beim Auftreffen von Po-α-Teilchen auf ein Be-Target sehr durchdringende, aber nicht ionisierende Strahlen emittiert wurden, die man ursprünglich für γ-Strahlen hielt. Curie und Joliot studierten darauf diese durchdringenden Strahlen und beobachteten ein Ansteigen des registrierten Ionisationsstromes im Geiger-Zähler, sobald sie wasserstoffhaltige Schirme vor den Zähler setzten. Diese Phänomen schrieben sie den Protonen zu, die infolge der Primärstrahlung von den Schirmen emittiert würden; mit Paraffinschirmen bestimmte man die Protonenenergie zu 5,7 MeV. Da die maximale Energie, die einem Proton durch Compton-Streuung mitgeteilt werden kann (vgl. (3.26)), gleich

$$E_p = \frac{2E_\gamma}{2 + \frac{M_p c^2}{E_\gamma}} \qquad (19.1)$$

ist, folgt daraus, dass für Protonen mit 5,7 MeV Rückstossenergie eine einfallende γ-Energie von E_γ = 55 MeV erforderlich wäre, was die Energie jeglicher damals bekannten Strahlung bei weitem übertrifft. Einen Monat später veröffentlichte Chadwick seine Untersuchungen, die ihn dazu geführt hatten, die γ-Strahlungshypothese zu verwerfen und stattdessen eine Strahlung aus neutralen Teilchen mit ungefähr Protonenmasse und einer Energie von ca. 5,7 MeV vorzuschlagen.

Die Masse dieser sogenannten "NEUTRONEN" (Nature 1932, 129, 312 und Proc. Roy. Soc. 1932, A136, 692) wurde mit der Energie von Rückstossprotonen (E_p = 5,7 MeV) und Stickstoff-Rückstosskernen (E_N = 1,5 MeV) folgendermassen festgelegt:

Ein Neutron der Masse M_n treffe mit der Geschwindigkeit u auf einen ruhenden Targetkern der Masse M_T und werde nach dem Stoss mit der Geschwindigkeit v emittiert. Dabei besagt der Energiesatz, dass

$$\frac{1}{2} M_n u^2 = \frac{1}{2} M_n v^2 + \frac{1}{2} M_T v_T^2 , \qquad (19.2)$$

und der Impulssatz, dass

$$M_n u = M_n v + M_T v_T , \qquad (19.3)$$

woraus folgt :

$$E_T \equiv \frac{1}{2} M_T v_T^2 = \frac{2 M_n^2 M_T}{(M_n + M_T)^2} \cdot u^2 . \qquad (19.4)$$

Aus den beiden Messungen ergibt sich

$$\frac{E_p}{E_N} = \frac{M_p}{M_N} \cdot \frac{(M_n + M_N)^2}{(M_n + M_p)^2} , \qquad (19.5)$$

woraus Chadwick die einzige Unbekannte, M_n, zu M_n = 1,15 M_p berechnet hat.

Neutronenbildung stellte man nicht nur bei der $Be^9(\alpha,n)C^{12}$-Reaktion fest, sondern auch beim $B^{11}(\alpha,n)N^{14}$-Prozess, dessen Untersuchung Chadwick auf seinen M_n-Wert von M_n = 1,0067 AME führte, der gut mit dem heutigen Wert von

$$M_n = 1{,}00898 \text{ AME} \mathrel{\hat{=}} 939{,}5 \text{ MeV} \qquad (19.6)$$

übereinstimmt.

19.2 Neutronenenergie und -Streuung

19.2.1 Klassifizierung der Neutronenenergien

Eine ziemlich willkürliche Einteilung der Neutronen nach verschiedenen kinetischen Energien wurde im Laufe der Erforschung von Neutronenreaktionen eingeführt. Die unten skizzierten Ausdrücke sind die gebräuchlichsten: Es muss aber bemerkt werden, dass die entsprechenden Energien nur grobe Werte darstellen.

Tab. 19.1

Energiebereich	Klassifizierung		
(eV)		Unterklassen	Energien (eV)
		kalte	$0 - 2 \cdot 10^{-3}$
$0 - 10^{3}$	langsame	thermische (Maxwell)	$\sim 0{,}025$
		epithermische	$\gtrsim 0{,}5$
		Resonanz-	1 - 100
$10^{3} - 5 \cdot 10^{5}$	intermediäre		
$5 \cdot 10^{5} - 10^{7}$	schnelle		
$10^{7} - 5 \cdot 10^{7}$	sehr schnelle		
$5 \cdot 10^{7} - 10^{10}$	ultraschnelle		
$10^{10} - \infty$	relativistische		

19.2.2 Neutronen-Streufiguren

Aus (13.11) und Fig. 13.8 folgt, dass die Nukleonenstreuung bei niedrigen Energien eine reine S-Streuung ist ($\ell = 0$): Das trifft zu für die Streuung thermischer Neutronen. Eine Vermischung mit P-, D-, F-, G-, ... Streuung erfolgt bei sukzessive gesteigerten Nukleonen-Streuenergien; man findet z. B., dass bei der Streuung schneller Neutronen nicht nur Impulse $\ell = 0$, sondern auch $\ell = 1$, 2 und möglicherweise 3 auftreten. Dies kann aus der Analyse der beobachteten Streuverteilung ermittelt werden, denn die resultierende Streufigur im Schwerpunktssystem ist eine Überlagerung der charakteristischen Figuren jedes beteiligten Impulses, begonnen bei der niedrigsten Ordnung (S-Welle) und übergehend zu Partialwellen höherer Ordnung (P-, D-, usw.). Natürlich kann man, um ein Beispiel zu nennen, keinen reinen D-Strahl erzeugen, sondern nur einen solchen, der aus einer Mischung von S-, P- und D-Partialwellen besteht.

Da S-Strahlen einen verschwindenden Stossparameter, d. h. einen zentralen Stoss voraussetzen, würde man vielleicht erwarten, dass die Streuverteilung nur auf die Einfallslinie beschränkt sei. Dennoch findet man experimentell, dass auch seitliche Streuung vorkommt, ein Resultat von Beugungseffekten. Die Winkelverteilung gestreuter S-Neutronen ist im Schwerpunkts-

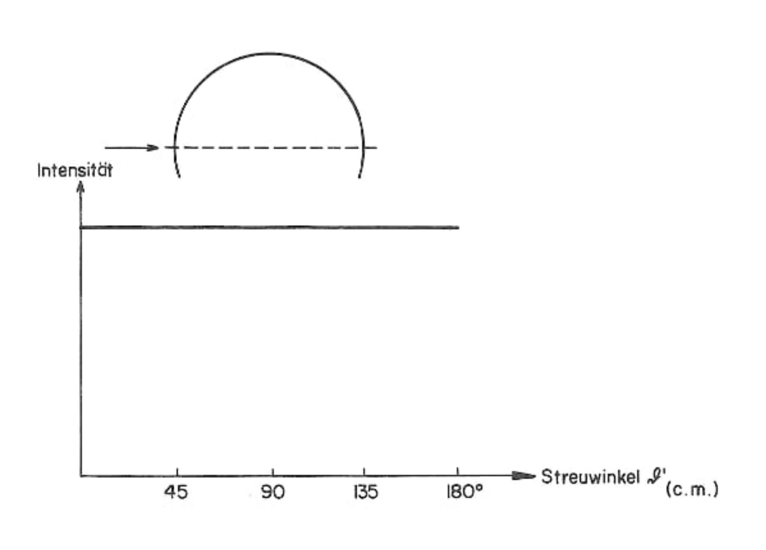


Fig. 19.1

system isotrop; die Streuintensität ist also in allen Richtungen dieselbe, wie es das Polardiagramm (Fig. 19.1) zeigt.

Die Schwerpunktsverteilung, die reiner P-Streuung entspricht, hat die in Fig. 19.2 gezeigte Form, die D-Streuverteilung zeigt Fig. 19.3.

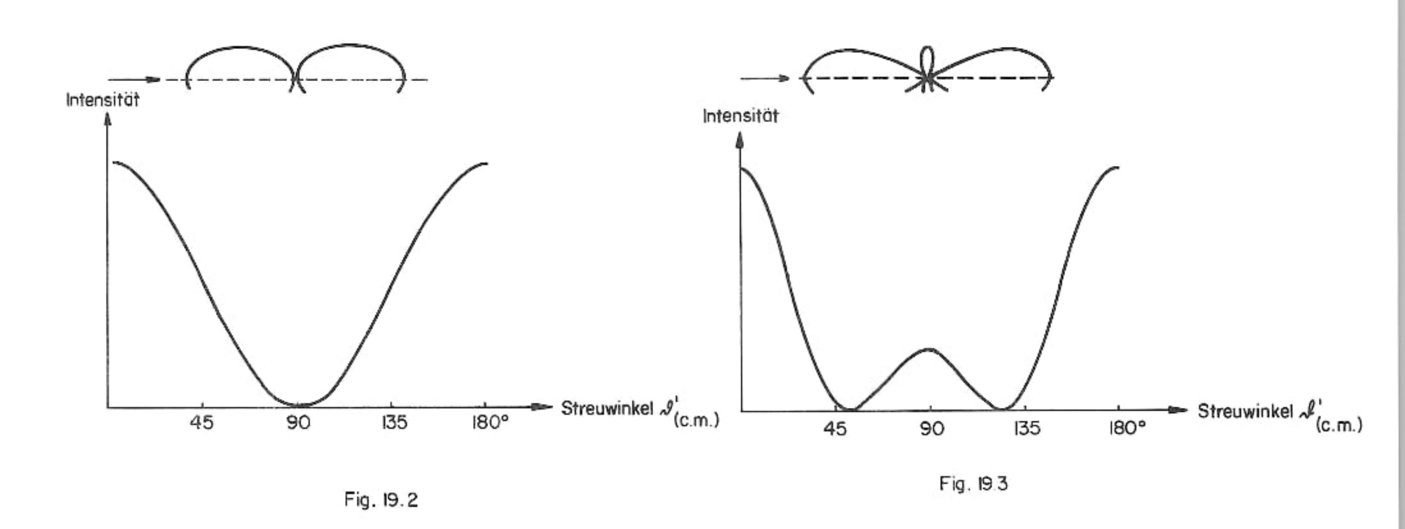


Fig. 19.2

Fig. 19.3

Die Verteilungen für höhere Bahndrehimpulse werden zunehmend komplizierter. Die resultierende Schwerpunkts-Streuverteilung für schnelle Neutronen ist dann eine Synthese der partiellen Streufiguren: Mit wachsender Geschossenergie enthält die beobachtete Figur in steigendem Masse Beiträge von Partialwellen höherer Ordnung. In vielen Beispielen kann die relative Beteiligung aus der ursprünglichen, im Laborsystem gemessenen Verteilung ermittelt werden: Letztere transformiert man zuerst, z. B. mit Hilfe von Marion-Ginzbarg-Tabellen, in eine Schwerpunktsverteilung und zerlegt sie dann in ihre einzelnen Komponenten.

19.3 Neutronenquellen

19.3.1 (α,n)-Quellen

Nicht nur vom historischen, sondern auch vom praktischen Standpunkte aus ist die Reaktion

$$ {}_4Be^9 + {}_2He^4 \longrightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1 + 5,7 \text{ MeV} \qquad (19.7)$$

eine wichtige Neutronenquelle. Die α-Teilchen stammen im allgemeinen aus dem Po^{210} - α - Zerfall ($T_{1/2} \cong$ 140 d) und haben somit eine maximale Energie von 5,3 MeV. Daher würde man naiverweise erwarten, dass die Energien des (α,n)-Neutrons ungefähr zwischen 6,7 MeV (Vorwärtsemission) und 10,8 MeV (Rückwärtsemission) lägen. In der Praxis bewirken aber verschiedene Komplikationen, wie die Anregung des C^{12}-Kernes, die endliche Dicke des Be-Targets, Tunneleffekt an der Potentialbarriere und die Abhängigkeit des Reaktionsquerschnittes von der α-Energie, eine Ausweitung des Neutronen-Energiespektrums bis unter 1 MeV (Fig. 19.4).

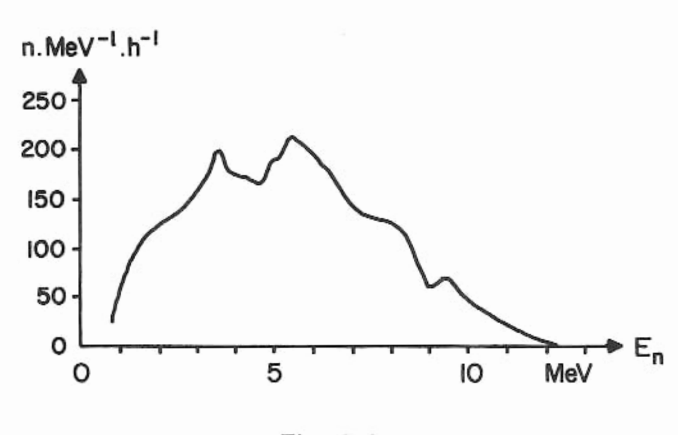


Fig. 19.4

Wegen der Gefahr der Luftverseuchung durch Po kompliziert sich die Konstruktion von Po-Be-Quellen: Eine praktisch verwendbare, ziemlich starke Neutronenquelle enthält eine Pt-Folie mit elektrolytisch angelagertem Po in der Form eines Po-Be-"Sandwich" (siehe Fig. 19.5). Sie hat aber den Nachteil, dass die Neutronen nicht isotrop emittiert werden und die Neutronen-Ausbeute pro Curie nur etwa ein Drittel so gross ist, wie die einer heterogenen Po-Be-Mischung.

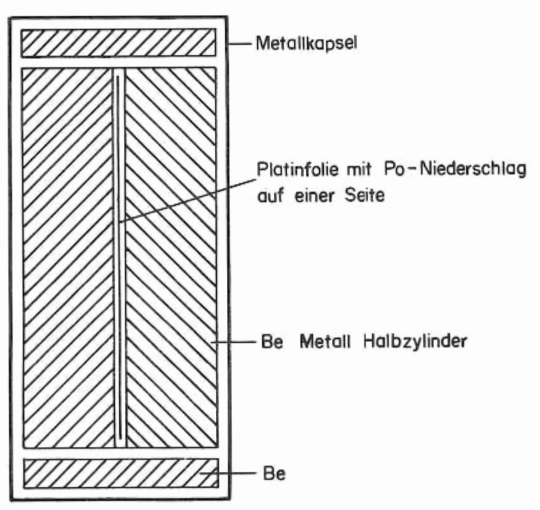


Fig. 19.5

Andererseits ist der γ-Untergrund schwach, verglichen mit dem der Ra-Be-Quellen, die vor der Zeit der Beschleuniger und Reaktoren die gebräuchlichsten Neutronenquellen gewesen sind. Wegen der langen Halbwertszeit von Ra ($T_{1/2} \cong$ 1690 y) ist deren Neutronen-Emissionsrate konstant; bei einer heterogenen Ra-Be-Mischung, komprimiert auf eine Dichte von ca. 1,75 $g.cm^{-3}$, beträgt die Ausbeute ungefähr

$$ Y = 1,7 . 10^7 \frac{M_{Be}}{M_{Be} + M_{RaBr_2}} \quad n . sec^{-1} . (g . Ra)^{-1} \qquad (19.8)$$

und kann sehr wohl 17 . 10^6 n. $Curie^{-1}$. sec^{-1} ausmachen, bei einer Neutronenenergie um 5 MeV.

Thermische Neutronen (E_{th} = 0,025 eV) kann man durch "MODERIEREN", d. h. Verlangsamen der emittierten Neutronen erhalten, indem man die Quelle mit wasserstoffhaltigem Material, wie Wasser oder Paraffin, umgibt. Schon relativ wenige elastische Stösse zwischen schnellen Neutronen und den Moderatorprotonen genügen, um die Neutronenenergie rasch auf niedrige Werte zu bringen. In 10 cm Entfernung von einer typischen 1-Curie-Ra-Be-Quelle in einem Wassertank ist der Fluss thermischer Neutronen etwa $3 \cdot 10^4$ n. cm^{-2}. sec^{-1}. Auch Po-Be-Quellen können verwendet werden ($T_{1/2}$ = $2,3 \cdot 10^4$ y), die, abgesehen von der etwas kleineren Neutronenausbeute, den Vorteil haben, dass die emittierte γ -Strahlung ziemlich weich und schwach ist und deshalb leichter abgeschirmt werden kann.

19. 3. 2 Photoneutronenerzeugung

Photonen aus γ -aktiven Kernen, wie Na^{24} (E_γ = 2,76 MeV) besitzen genügend Energie, um eine (γ, n)-Reaktion in H^2 oder Be^9 auszulösen. H^2- und Be^9-Kerne zeigen besonders niedrige Schwellenenergien, nämlich 2,23 bzw. 1,67 MeV; bei allen anderen Kernen liegen die Schwellen oberhalb 6 MeV, also über dem verfügbaren γ -Energiebereich. Für H^2 und Be^9 ist der Reaktionsquerschnitt nahe der Schwellenenergie klein: er liegt in der Gegend von 0,7 mb.

Abgesehen von einer geringen Energieunschärfe, bedingt durch den Richtungsunterschied zwischen einfallendem Photon und emittiertem Neutron, sollte es im Prinzip möglich sein, monoenergetische Photoneutronen zu erhalten, wenn der γ -Strahler nur eine γ -Strahlung aussendet, deren Energie über der Schwelle liegt. Aus Energie- und Impulssatz kann die Energie des ausgestrahlten Neutrons hergeleitet werden:

$$E_n = \frac{A-1}{A}\left[E_\gamma - Q - \frac{E_\gamma^2}{1862\,(A-1)}\right] + \delta, \qquad (19.9)$$

wo Q die Schwellenenergie, d. h. die Bindungsenergie des Neutrons, bedeutet (alle Energien in MeV). Der approximative Wert des Korrekturtermes δ ist

$$\delta \cong E_\gamma \cos\vartheta_n \sqrt{\frac{2(A-1)(E_\gamma - Q)}{931\,A^3}}\,. \qquad (19.10)$$

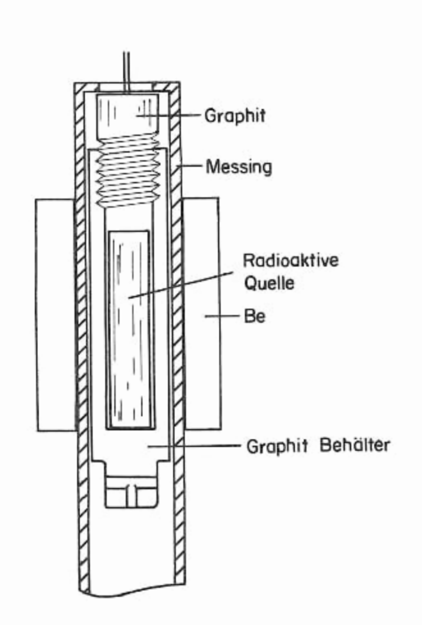


Fig. 19.6

Die effektive Energieunschärfe ist grösser als der obige theoretische Wert, wegen der Vielfachstreuung der γ's und Neutronen im Target.

Für eine Quelle, wie sie Fig. 19.6 zeigt, ist die mittlere Neutronenenergie für ein Be^9-Target ungefähr 1 MeV, und die Ausbeute liegt in der Gegend von $2,4 \cdot 10^6$ n. $Curie^{-1}$. sec^{-1}. Mit Bestrahlen in Kernreaktoren kann man γ -Quellen bis zu 75 Curie Stärke erhalten.

19. 3. 3 Neutronenerzeugung mit Hilfe beschleunigter, geladener Teilchen, (p, n) und (d, n)

Die Erzeugung von Neutronen ziemlich gut definierter Energie durch Reaktionen mit beschleunigten, geladenen Teilchen scharfer Energie ist zu einer Standard-Methode geworden. Sie hat den Vorteil, dass sich der Kreis der als Target verwendbaren Kerne erweitert hat, da höhere Beschleunigungsenergien für geladene Teilchen erreicht worden sind. Bei kleinen Geschossenergien sind die Neutronen praktisch monoenergetisch, bei höheren Energien aber befindet sich der Restkern möglicherweise in einem angeregten Zustand, und dabei können die austretenden Neutronen ein ziemlich breites Energiespektrum aufweisen.

In diesem Zusammenhang sind (α, n)- und (α, 2n)-Reaktionen nur von sekundärer Bedeutung, denn ihr Wirkungsquerschnitt ist relativ klein ($\sim$ mb),und es ist schwierig, intensive α -Strahlen zu erzeugen. Primäre Bedeutung haben die (p, n)- und (d, n)-Reaktionen. Davon sind die folgenden am meisten verwendet worden:

$$H^2 + d \longrightarrow He^3 + n + 3,27 \text{ MeV}$$
$$H^3 + d \longrightarrow He^4 + n + 17,58 \text{ MeV}$$
$$H^3 + p \longrightarrow He^3 + n - 0,76 \text{ MeV}$$
$$Li^7 + p \longrightarrow Be^7 + n - 1,645 \text{ MeV}$$
$$Be^9 + d \longrightarrow Be^{10} + n + 4,35 \text{ MeV} .$$

Offensichtlich ist es wichtig, dünne Targets mit entsprechend kleinem Energiestraggling zu verwenden, damit die Neutronenenergien auf scharfe Werte beschränkt bleiben. Einen umfassenden Überblick über monoenergetische Neutronenquellen geben Hanson, Taschek und Williams (RMP 1949, 21, 635). Die Neutronenenergien, die den gegebenen Laboremissionswinkeln entsprechen, können aus der Q-Gleichung (16. 6) berechnet werden; für die d-d-Reaktion $H^2(d,n)He^3$ z. B. ist die Neutronenenergie E_n, ausgedrückt mit der Geschossenergie E_d, gegeben durch

$$3Q = 4E_n - E_d - 2\sqrt{2E_d E_n}\cos\vartheta , \qquad (19.11)$$

worin Q = 3,27 MeV ist.

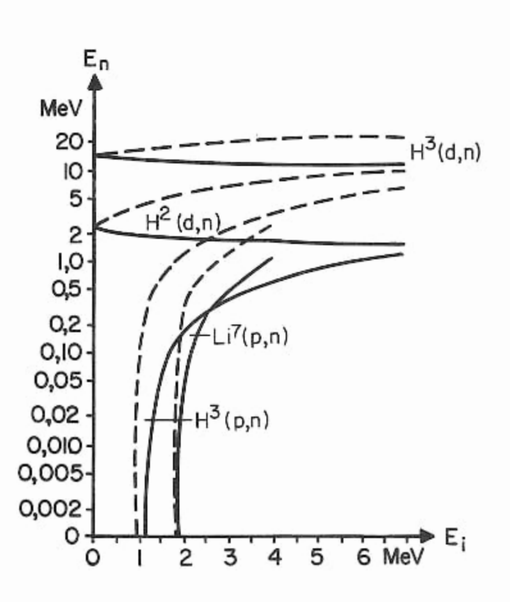


Fig. 19.7

Einige Werte von Neutronenenergien für $\vartheta = 0°$ (vorwärts: gestrichelte Kurven) und $\vartheta = 180°$ (rückwärts: ausgezogene Kurven) sind in Fig. 19. 7 in Funktion der Geschossenergien E_i aufgetragen, und zwar für die ersten vier der oben erwähnten Reaktionen.

In den McKIBBEN NOMOGRAPHS (PR 1946, 70, 101A) wird die Energie-Winkel-Beziehung für eine gegebene Reaktion graphisch angegeben: Das Nomogramm besteht aus zwei Halbkreisscharen und zwei Scharen radialer Linien. Die ausgezogenen Halbkreise (Fig. 19.8 und 19.9) mit Zentrum im Nullpunkt der (unteren) Neutronenenergieachse entsprechen verschiedenen Werten der Neutronenenergie im Laborsystem. Die ausgezogenen, radialen Linien mit

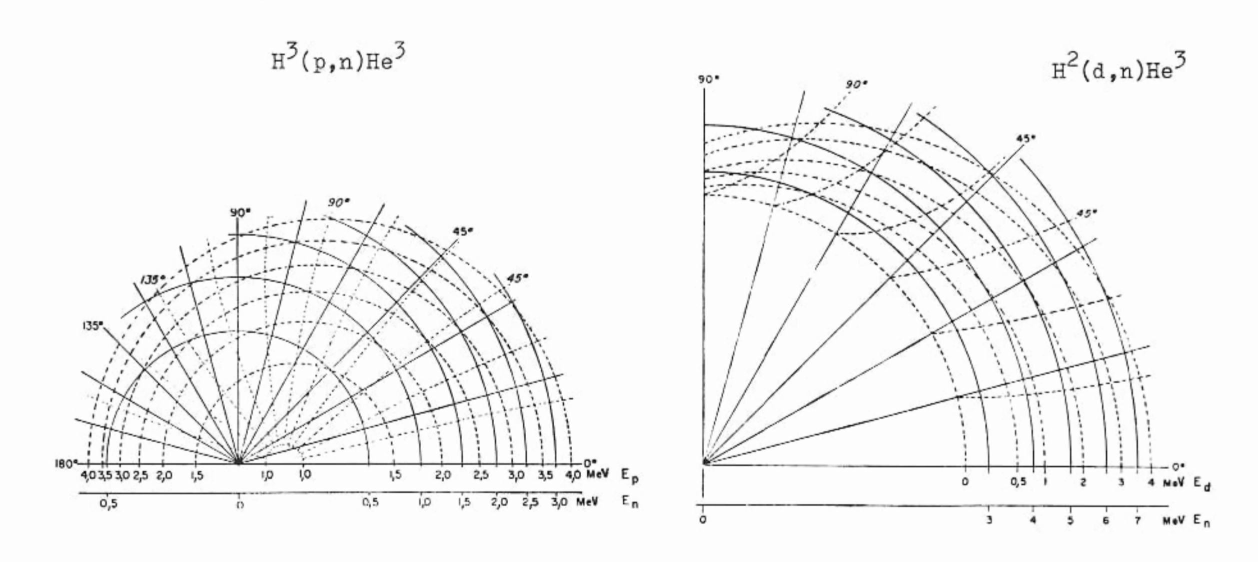


Fig. 19.8

Fig. 19.9

demselben Ursprung stellen die Labor-Emissionswinkel dar. Die (nicht konzentrischen) gestrichelten Halbkreise entsprechen verschiedenen Werten der Labor-Geschossenergie, gegeben durch den Achsenabschnitt auf der oberen, horizontalen Achse. Die gestrichelten, radialen Linien entsprechen den Schwerpunkts-Emissionswinkeln ϑ'.

Für eine gegebene Geschossenergie findet man die Energien der unter einem Laborwinkel ϑ emittierten Neutronen folgendermassen: Ausgehend vom Schnittpunkt des entsprechenden gestrichelten Halbkreises mit der betreffenden ausgezogenen, radialen Linie, zieht man eine Linie parallel zum nächstliegenden, ausgezogenen Halbkreis; ihr Achsenabschnitt auf der E_n-Achse ist dann die gesuchte Neutronenenergie.

Wenn jedoch der Emissionswinkel im Schwerpunktssystem gegeben ist, geht man vom Schnittpunkt zwischen gestricheltem Halbkreis und gestrichelter, radialer Linie längs einer Kurve zur E_n-Achse.

Zum Beispiel kann man die Energie eines d-d-Neutrons, das unter einem Laborwinkel von 45° zu einem einfallenden 1-MeV-Deuteronenstrahl emittiert wird, aus (19.11) berechnen und erhält $E_n = 3,6$ MeV. Derselbe Wert ergibt sich aus dem McKibben-Nomogramm (Fig. 19.9), indem man vom Schnittpunkt des gestrichelten $E_d = 1$-MeV-"Halbkreises" mit der $\vartheta = 45^\circ$-Linie parallel zum ausgezogenen $E_n = 4$-MeV-"Halbkreis" zur E_n-Achse wandert.

Von den verschiedenen (p, n)-Prozessen verwendet man zur Neutronenerzeugung gewöhnlich die $Li^7(p,n)Be^7$-Reaktion, denn sie besitzt eine relativ niedrige Schwelle ($E_{Schw} = 1,9$ MeV)

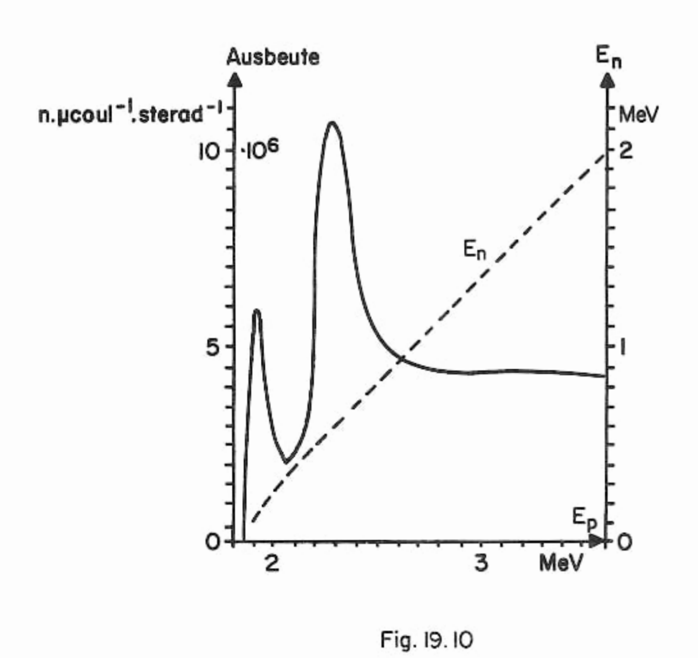


Fig. 19.10

und eine hohe Neutronenausbeute. Fig. 19.10 zeigt die Ausbeute und Energie von Neutronen in Vorwärtsrichtung, in Funktion der einfallenden Protonenenergie. Der Reaktionsquerschnitt liegt für diese Energien bei $\sigma_T \sim 0,3$ b. (p, n)-Reaktionen können auch zur Erzeugung von hochenergetischen Neutronen verwendet werden, indem man hochenergetische Protonen (z. B. $E_p \sim 400$ MeV) auf Be-, Li- oder C-Targets schiesst.

Auch (d, n)-Reaktionen benutzt man oft zur Neutronenerzeugung: Fig. 19.11 zeigt den totalen Wirkungsquerschnitt für d-d-Neutronen und Fig. 19.12 die Ausbeute bei einem dicken Target aus schwerem Eis (D_2O).

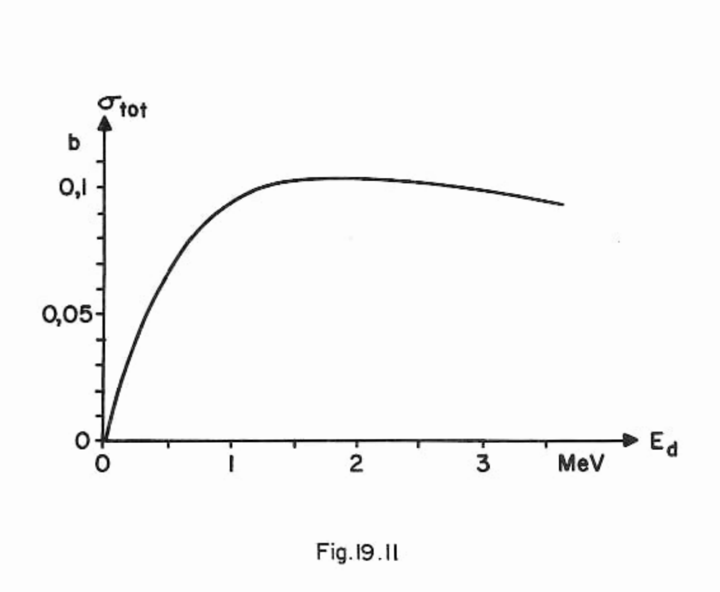


Fig. 19.11

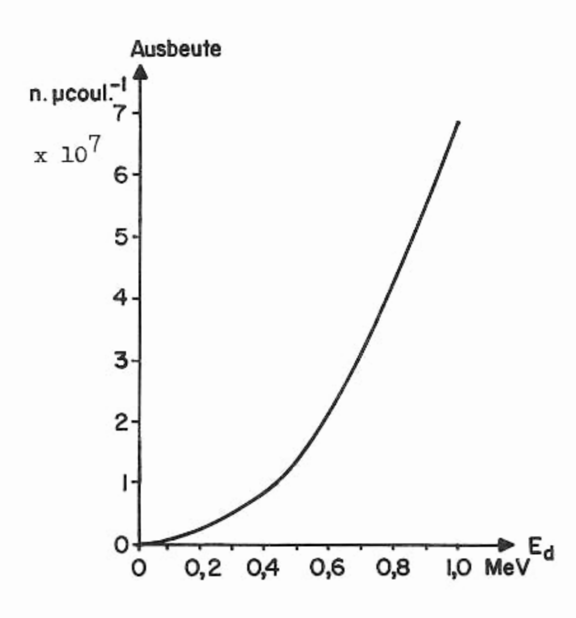


Fig. 19.12

Es muss noch bemerkt werden, dass bei solchen Energien der Konkurrenzprozess $H^2(d,p)H^3$ mit ganz ähnlichem Wirkungsquerschnitt sich immer bemerkbar macht. Die fast in gleicher Zahl emittierten Neutronen und Protonen müssen also diskriminiert werden: Letztere können über die Neutronenausbeute Aufschluss geben, da sie wesentlich leichter zu registrieren und zu zählen sind.

Die $H^3(d,n)He^4$-Reaktion ist durch einen einzigartig hohen, positiven Q-Wert ausgezeichnet (Q = 17,6 MeV) und kann verwendet werden, um mit Geschossenergien von E_d = 100 keV bis 3 MeV eine intensive Strahlung hochenergetischer Neutronen (von 12 bis 20 MeV) zu erzeugen. Fig. 19.13 zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Geschossenergie. In Praxis schickt man entweder einen Strahl beschleunigter Tritonen auf ein Deuteriumtarget (Gas oder schweres Eis), oder dann einen Deuteronenstrahl auf ein Tritiumgastarget. Diese Reaktion kann auch zur Umwandlung von Strahlen thermischer Neutronen verwendet werden: Wenn thermische Neutronen auf eine Li^6-H^2-Mischung treffen, so reagieren in der $Li^6(n,t)He^4$-Reaktion erzeugte, schnelle Tritonen (E_t = 2,65 MeV) mit den Deuteronen und erzeugen dabei schnelle t-d-Neutronen (E_n = 14 MeV). Wenn andererseits natürliches Lithium (Li^6 + Li^7) als Target dient, so ergibt sich aus dem Li(t,n)Be-Prozess ein komplexes Neutronenspektrum.

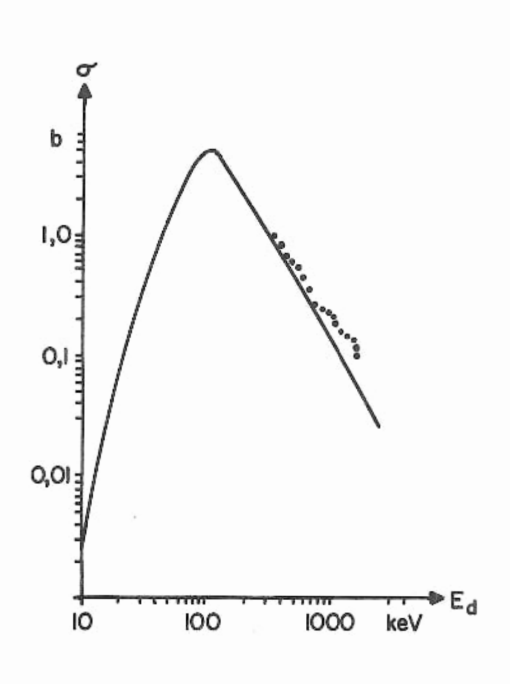


Fig. 19.13

19.3.4 Reaktorneutronen

Kernreaktoren sind die besten Quellen für thermische Neutronen: Schnelle, bei der U^{235}-Spaltung freigewordene Neutronen (E_n ~ 5 MeV) werden durch einen Moderator (z. B. Graphit) bis auf thermische Energien (0,025 eV) abgebremst. Dabei sind die Verluste durch Einfang oder Entweichen von Neutronen minimal, und die Energiereduktion erfolgt durch mehrfache, elastische Streuung. Die Neutronenentnahme aus einem Reaktor geschieht über einen Moderator in der Form eines Graphitblockes, der durch die Abschirmungen bis ins Zentrum des Reaktors reicht. Einen solchen Block nennt man "THERMISCHE SÄULE" ("THERMAL COLUMN"), da eine 2 m-lange Säule die Neutronenenergien auf thermische Werte reduziert. Wegen seines kleinen Absorptionsquerschnittes von ca. 5 . 10^{-3} b für thermische Neutronen (nimmt ab wie $1/v$) kann der Neutroneneinfang vernachlässigt werden. Für Graphit mit einer Dichte von 1,6 g. cm^{-3} entspricht das einer mittleren freien Weglänge von ca. 25 m bis zur Absorption. Im Mittel sinkt die Energie bei 6,3 elastischen Stössen an C-Kernen auf $1/e$, also reduzieren ca. 14,5 Stösse die Energie auf $1/10$ ihres Anfangswertes. Die Reduktion von Spaltenergien auf thermische Energien erfordert also etwa 120 Stösse.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen innerhalb des Reaktors kann als Summe aus einem Maxwell-Term und einer Korrektur $\delta(v)$ ausgedrückt werden; letztere trägt der kontinuierlichen Erzeugung hochenergetischer Neutronen innerhalb des Reaktors Rechnung und wird somit als Hochenergie-"Schwanz" ("tail") der Maxwell-Verteilung angefügt :

$$\frac{dn}{dv} = A\, v^2 .\, e^{-\frac{M_n v^2}{2kT}} + \delta(v) . \qquad (19.12)$$

Darin ist A eine Konstante, v die Neutronengeschwindigkeit und T die Temperatur des Materials, mit dem die Neutronen im Gleichgewicht stehen: Anstelle der eigentlichen Temperatur im Reaktorinnern setzt man für T gewöhnlich eher einen willkürlichen Parameterwert ein (etwa 400° K für den Argonne-Reaktor). Fig. 19. 14 zeigt die Energieverteilung der Neutronen aus der U^{235}-Spaltung; die Kurve, die den nicht-Maxwell'schen "Schwanz" deutlich zum Ausdruck bringt, kann empirisch mit der Funktion

$$N(E_n) = 1765 \sqrt{E_n} .\, e^{-0{,}775 E_n} \qquad (19.13)$$

zur Deckung gebracht werden.

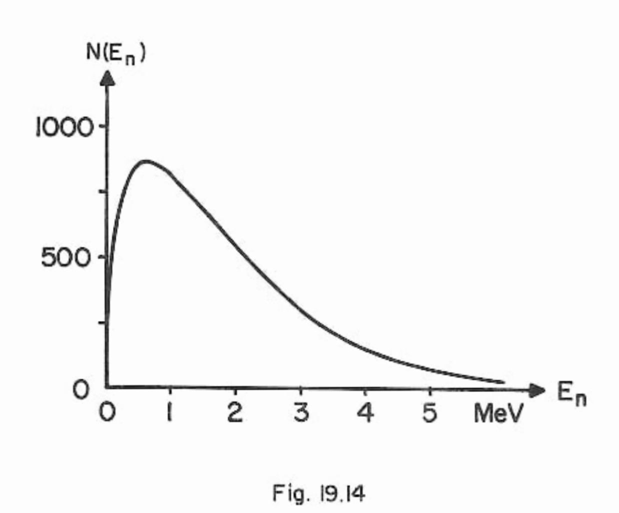


Fig. 19.14

Der Neutronenfluss pro Geschwindigkeitseinheit in der thermischen Säule hat die Form

$$\frac{d\varphi}{dv} = A\, v^3 .\, e^{-\frac{M_n v^2}{2kT}} , \qquad (19.14)$$

worin der Hochenergie-"Schwanz" fehlt. Als Koeffizient des exponentiellen Faktors steht v^3 statt v^2, was die Tatsache berücksichtigt, dass die schnelleren Neutronen eine grössere Chance (die direkt proportional der Geschwindigkeit v ist) haben, aus der Front der thermischen Säule auszutreten.

Wenn aber Neutronen einfach durch ein Loch in der Reaktorabschirmung entweichen, besitzen sie im wesentlichen die in Fig. 19. 14 gezeigte Energieverteilung.

In Tab. 19. 2 sind die Formeln für einige wesentliche Grössen angegeben, die mit der Maxwell-Verteilung thermischer Neutronen im Zusammenhang stehen.

Tab. 19.2

	Definition	Numerischer Wert für T = 300° K
Wahrscheinlichste Geschwindigkeit, v_o	$\sqrt{\frac{2kT}{M_n}}$	$2,2 \cdot 10^5 cm.sec^{-1}$
Mittlere Geschwindigkeit, $\bar{v}$	$\frac{2v_o}{\sqrt{\pi}}$	$2,5 \cdot 10^5 cm.sec^{-1}$
Wurzel des mittleren Geschwindigkeitsquadrates, $\langle v \rangle$	$\frac{3}{2} v_o$	$3,3 \cdot 10^5 cm.sec^{-1}$
Normierte Geschwindigkeitsverteilung	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{v_o^3} e^{-\frac{v^2}{v_o^2}}$	
Normierte Energieverteilung	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{E_n}}{(kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{E_n}{kT}}$	
Wahrscheinlichste Energie	$\frac{1}{2} kT$	0,013 eV
Energie mit maximalem Fluss	kT	0,026 eV
Mittlere Energie	$\frac{3}{2} kT$	0,039 eV

Während ein Neutronenfluss im Reaktorinnern von der Grössenordnung $10^{14} n.cm^{-2}.sec^{-1}$ ist, wird er beim Durchgang durch die thermische Säule auf rund einen Tausendstel reduziert; der 10 MW-Chalk River-NRX-Reaktor, z. B., hat einen inneren Fluss von $6 \cdot 10^{13} n.cm^{-2}.sec^{-1}$, der sich beim Passieren einer 1 m-langen thermischen Säule auf $\sim 10^9 n.cm^{-2}.sec^{-1}$ vermindert. Der erreichbare Fluss durch Löcher in der Abschirmung ist $4 \cdot 10^7 n.cm^{-2}.sec^{-1}$.

19.4 Neutronenregistrierung

Da Neutronen ungeladen sind, können sie nicht direkt registriert werden: man muss deshalb von der Ionisation Gebrauch machen, die von sekundären, durch Kernwechselwirkungen bedingten Effekten herrührt. Diese Wechselwirkungen müssen so geartet sein, dass sie Sekundärteilchen erzeugen, deren Intensitäten und Energien zur Erzeugung einer messbaren Ionisation ausreichen. Sie werden somit durch die Energie der zu zählenden Neutronen bestimmt. So sind z. B. die Einfangsquerschnitte für schnelle Neutronen oft zu klein, um in den beschossenen Kernen eine messbare Radioaktivität hervorzurufen. Die Registriermethoden kann man deshalb nach dem Gesichtspunkt der Neutronenenergie einteilen. Einen sehr vollständigen Überblick über Registriermethoden findet man in "Fast Neutron Physics", I. Teil (1960), Herg. Marion und Fowler.

19.4.1 BF_3-Zähler

Ein Proportionalzähler oder eine Ionisationskammer, die mit einem borhaltigen Gas, wie BF_3, gefüllt, oder mit einer Borverbindung ausgekleidet ist, kann Neutronen registrieren, und zwar über die Reaktion $B^{10}(n,\alpha)Li^7$, die für thermische Neutronen den grossen Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 4010$ b aufweist. Der angeregte Restkern Li^7 erhält eine Energie von 0,84 MeV und das emittierte α-Teilchen eine solche von 1,47 MeV. Wird der Zähler im proportionalen Bereich betrieben, so kann man die hohen Impulse der α-Teilchen von einem noch ziemlich intensiven Untergrund kleinerer Impulse, z. B. von γ-Strahlen, unterscheiden.

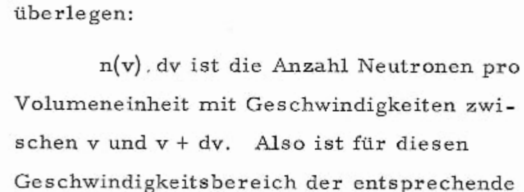
Aus dem Abfall der Wirkungsquerschnittskurve, wie sie in Fig. 19.15 logarithmisch aufgetragen ist, sieht man, dass σ einem $1/v$-Gesetz folgt, wie man das theoretisch erwarten würde. Somit gilt

$$\sigma v = \text{const.} = 1{,}61 \cdot 10^8 \ \text{b} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}, \qquad (19.15)$$

eine Beziehung, die für $E_n \lesssim 10$ keV gültig ist.

Fig. 19.15

Als wichtige Konsequenz folgt aus dieser Beziehung, dass der Proportionalzähler in diesem Falle eher die totale Neutronendichte ρ, unabhängig von der Geschwindigkeit, misst, als den Neutronenfluss φ. Das kann man sich wie folgt überlegen:



$n(v)\,dv$ ist die Anzahl Neutronen pro Volumeneinheit mit Geschwindigkeiten zwischen v und v + dv. Also ist für diesen Geschwindigkeitsbereich der entsprechende Fluss durch den Detektor gleich $\varphi(v) \equiv [n(v)\,dv] \cdot v$, wenn man den Detektor so "dünn" annimmt, dass die Neutronenabsorption vernachlässigbar ist. In einem Detektor mit effektivem Volumen V und $n^{\square}$ Borkernen pro cm^3 leisten die Teilchen des Geschwindigkeitsintervalles folgenden Beitrag an die Zählrate

$$dR = \sigma\, n^{\square}\, V\, \varphi(v) . \qquad (19.16)$$

Die totale Zählrate für alle Neutronengeschwindigkeiten ist

$$R = \int \sigma\, n^{\square}\, V\, \varphi(v) = n^{\square}\, V \int \sigma\, v\, n(v)\, dv \qquad (19.17)$$

und da σv konstant ist, unabhängig von v, folgt

$$R = n^{\square}\, V\, \sigma v \int n(v)\, dv, \qquad (19.18)$$

d. h.

$$\boxed{R = n^{\square}\, V\, \sigma v \cdot \rho ,} \qquad (19.19)$$

wo ρ die totale Neutronendichte, $\rho \equiv \int n(v)\, dv$, bedeutet.

Wenn der Detektor gegen externe Neutronen, die nicht aus der zu untersuchenden Quelle stammen, abgeschirmt werden soll, so kapselt man den Zähler, mit Ausnahme des vorderen Endes, z. B. in Cadmium oder in eine Borverbindung, in ein Material also, das langsame Neutronen stark absorbiert. Das Ganze überzieht man mit einem Paraffinmoderator, der die einfallenden, schnellen Neutronen auf ungefähr thermische Geschwindigkeiten abbremst. Ein solcher Zähler heisst LANGER NEUTRONEN-ZÄHLER (LONG NEUTRON COUNTER). Fig. 19.16 zeigt ihn in einer typischen Konstruktion, die für die Registrierung langsamer, intermediärer und schneller Neutronen geeignet ist. Für das gasförmige BF_3 wird Bor verwendet, das von seiner natürlichen Isotopenhäufigkeit von 19 % B^{10} bis auf 90 % B^{10} angereichert worden ist. Die Ansprechwahrscheinlichkeit bei einer (n, α)-Reaktion nähert sich in solchen Zählern 100 %; die Empfindlichkeitsschwankungen liegen für Neutronenenergien von 10 keV bis 3 MeV unter 10 % (Fig. 19.17); die relative Empfindlichkeit beträgt ungefähr 70 % für thermische Neutronen.

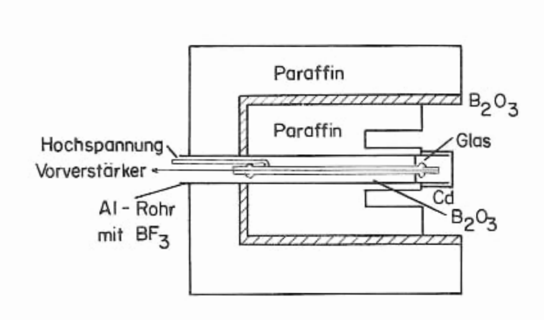


Fig. 19.16

Die absolute Empfindlichkeit der Zähler (bestimmt durch den (n,α)-Wirkungsquerschnitt) ist etwa 1 Zählimpuls pro 10^5 Neutronen, die von einer Quelle in 1 m Entfernung vom Zählerfenster isotrop ausgestrahlt werden.

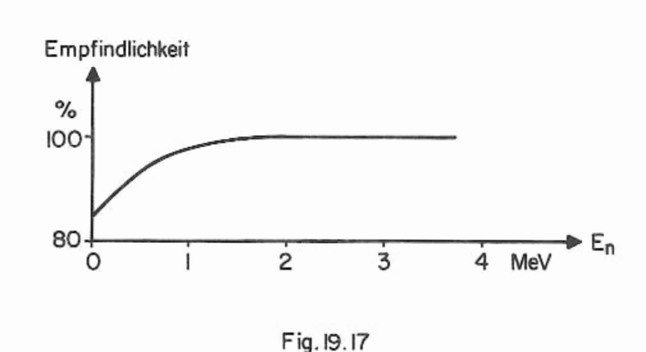


Fig. 19.17

19.4.2 Aktivierung von Folien

Dünne Folien mit einer Fläche von etwa 4 cm^2, aus Elementen wie In^{115} oder $Au^{197, 198}$, die für die (n, γ)-Reaktion einen grossen Aktivierungsquerschnitt und eine genügend lange Lebensdauer des Reaktionsproduktes aufweisen, können zur Neutronenflussmessung auf engstem Raum benützt werden. Tab. 19.3 liefert einige wichtige Daten für solche Elemente.

Tab. 19.3

Target	Häufigkeit	Aktivierungs-produkt	$\sigma_{(n,\gamma)}$	$T_{1/2}$ des Produktes
Ag^{107}	51,35 %	Ag^{108}	44 $\pm$ 9 b	2,3 m
Ag^{109}	48,65 %	Ag^{110}	2,8 $\pm$ 0,5	270 d
			110 $\pm$ 20	24,2 s
In^{113}	4,23 %	In^{114}	56 $\pm$ 12	49 d
			2,0 $\pm$ 0,6	72 s
In^{115}	95,77 %	In^{116}	145 $\pm$ 15	54,2 m
			52 $\pm$ 6	13 s
Au^{197}	100 %	Au^{198}	96 + 10	2,7 d
Au^{198}	-	Au^{199}	35000 $\pm$ 10000	3,2 d

Zur Flussmessung taucht man die Folie für ein Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t_1$ in den Neutronenfluss. Dann wird sie herausgenommen und in einer Standardposition vor einem γ-Zähler aufgestellt. Man misst nun die Anzahl Zählimpulse im Zeitintervall t_2 bis t_3. Trifft der Neutronenfluss φ auf eine Folie mit $n^{\square}$ Kernen pro cm^3, einer Fläche A und Dicke x, so ist die Neutronen-Einfangsrate gleich

$$R = \sigma \, n^{\square} A \, x \, \varphi . \tag{19.20}$$

Die γ-Emissionrate ist dann für eine solche Folie ebenfalls R, so dass bei einem Zähler der Ansprechwahrscheinlichkeit ε die Zählrate C_o für eine bis zum säkulären Gleichgewicht bestrahlte Folie gleich

$$C_o = \varepsilon R \tag{19.21}$$

wird. Wenn die Bestrahlungszeit t_1 kleiner ist als die für radioaktive Sättigung benötigte, so ist die Zählrate C gegeben durch

$$C = C_o \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right), \tag{19.22}$$

wo τ die mittlere Lebensdauer des aktivierten Produktes bedeutet. Wenn dann N Impulse im Zeitintervall $(t_3 - t_2)$ gezählt werden, so folgt für C_o, dass

$$C_o = \frac{N}{\tau \left(e^{-t_2/\tau} - e^{-t_3/\tau} \right)\left(1 - e^{-t_1/\tau} \right)} , \tag{19.23}$$

woraus R, und damit φ, bestimmt werden kann.

Auch können Aktivitäten, die durch schnelle Neutronen erzeugt werden, für die Messung schneller Neutronenströme benützt werden; des weiteren dienen SCHWELLENDETEKTOREN (THRESHOLD DETECTORS) als Zähler mit gleichzeitiger Energie-Dikriminierung. Zum Beispiel liegt die Energieschwelle der Reaktion

$$C^{12} + n \longrightarrow C^{11} + 2n$$

bei 22 MeV, so dass ein Kohlenstoff-Schwellenzähler, mit einer C^{11}-Halbwertszeit von 1225 sec, nur Neutronen über 22 MeV zählt.

Trotz grossem Aktivierungsquerschnitt oder starkem einfallenden Neutronenfluss kann die Aktivität zu klein sein, um verlässliche Messungen zu gewährleisten. Da der Restkern aus einer (n, γ)-Reaktion ein Isotop des Targets ist, kann man die spezifische Aktivität einer Quelle normalerweise nicht mit chemischen Anreicherungsverfahren erhöhen. Eine Ausnahme bildet die Szilard-Chalmers-Reaktion, die es ermöglicht, ein radioaktives Produkt von seinem inaktiven Isotop chemisch zu trennen.

19.4.3 Szilard-Chalmers-Reaktion

Die Methode von Szilard und Chalmers (Nature 1934, 134, 462 & 494) benützt den Umstand, dass bei γ-Emission, nach Einfang eines langsamen Neutrons, der Restkern einen Rückstoss erfährt. Die Rückstossenergie (vgl. Abschn. 11.9) ist gleich

$$E_R = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = \frac{537\ E_\gamma^{2}(\mathrm{MeV})}{A}\ \mathrm{eV}, \qquad (19.24)$$

wo M die Masse und A die Massenzahl des Rückstosskernes bedeutet. Für typische Werte, wie $E_\gamma = 4$ MeV und $A = 80$, beträgt die Rückstossenergie $E_R \approx 100$ eV, und ist also sehr viel grösser als die Energie, die zum Auftrennen chemischer, molekularer Bindungen ausreichen würde. Infolgedessen ändert sich der chemische Zustand des Restkernes gegenüber dem eines normalen Kernes. Unter günstigen Umständen können sodann bis zu 100 % der radioaktiven Kerne chemisch von den normalen Kernen getrennt werden.

Drei Bedingungen müssen dabei erfüllt sein:

(i) Das Target muss eine chemische Verbindung sein.

(ii) Die radioaktiven Atome dürfen nicht mit den Muttermolekülen rekombinieren, und der thermische Austausch mit andern, inaktiven Molekülen muss gering bleiben.

(iii) Es müssen chemische Methoden zur Trennung des radioaktiven Atomes existieren.

Bei ihrer ursprünglichen Untersuchung bestrahlten Szilard und Chalmers Äthyljodid mit Neutronen und trennten das radioaktive I^{128} von stabilen I^{127} durch Schütteln mit einer wässerigen, reduzierenden Lösung, die eine Spur ionisierten Jodes als "Träger" enthielt, und Abtrennen der Wasserschicht; letztere enthält den Hauptteil des I^{128}.

Andere spezifische Szilard-Chalmers-Prozesse sind von McKay (Progr. Nucl. Phys. 1950, 1, 168) und Broda ("Advances in Radiochemistry" 1950) beschrieben worden.

19.4.4 Szintillationszähler

Das schnelle Ansprechen von phosphoreszierenden Kristallen und Plastik-Szintillatoren legt ihre Verwendung zur Neutronenregistrierung nahe. Da Neutronen nicht direkt Szintillationen erzeugen können, befestigt man am Fenster eines Photomultipliers eine glasige Boranhydrid-Platte mit eingeschmolzener ZnS-Scheibe. α-Teilchen, die beim Borzerfall emittiert werden, erzeugen in ZnS Szintillationen, mit deren Hilfe die Neutronen gezählt werden können. Selbst über einem ziemlich intensiven γ-Untergrund ist die Ansprechwahrscheinlichkeit noch etwa 15 %.

Wenn andererseits der szintillierende Phosphor selbst ein neutronenempfindliches Element enthält, kann die Ansprechwahrscheinlichkeit 100 % erreichen. Im Prinzip kann man das mit einem Phosphor aus Lithiumjodid, aktiviert mit Eu, realisieren, wobei die Neutronen auf dem Umweg über die $Li^6(n,\alpha)H^3$-Reaktion registriert werden. Die entsprechende, theoretische Neutronen-Ansprechwahrscheinlichkeit zeigt Fig. 19. 18 in Funktion der Kristalldicke. Immerhin bereitet eine eventuell vorhandene γ-Strahlung Schwierigkeiten, da der LiI(Eu)-Kristall sehr leicht auf γ-Strahlen anspricht, so dass Neutronenimpulse von einem γ-Untergrund vollständig verdeckt werden könnten.

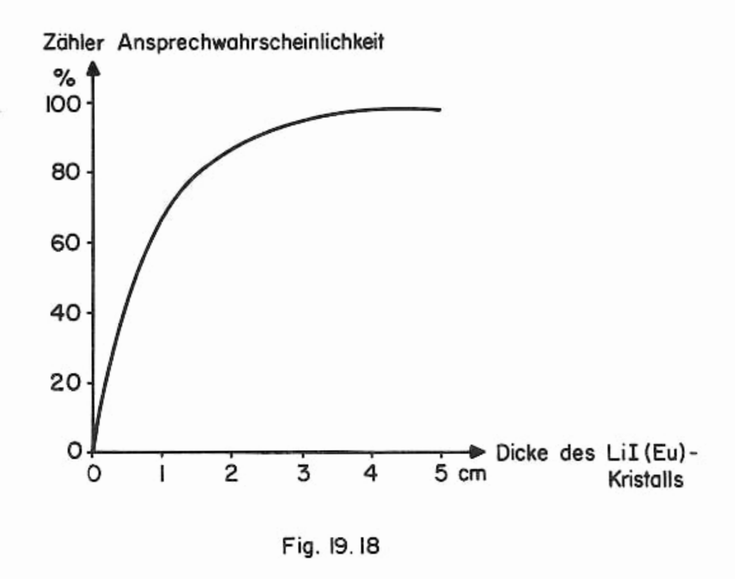


Fig. 19. 18

Eine überraschende Verbesserung haben neulich die Plastik-Kohlenwasserstoff-Szintillatoren gebracht, die auf der Registrierung des Protonenrückstosses basieren. Sie bestehen zur Hauptsache aus durchsichtigem Polystyrol der Zusammensetzung $C_{10}H_{11}$ und aus einem szintillierenden Medium, wie z. B. Para-Terphenyl. Ihre Dichte ist 1,04 g. cm^{-3} und sie reagieren äusserst rasch (Abklingzeit ungefähr 3 . 10^{-9} sec), doch sind auch sie gegen γ-Impulse und geladene Teilchen, wie z. B. Elektronen, sehr empfindlich. Dieser Nachteil kann durch Impulshöhenanalyse und geeignete Wahl der Kristalldimensionen weitgehend überwunden werden: In gewissen Fällen kann man die Impulse mit zwei oder mehr Kristallen in Koinzidenz oder Antikoinzidenz trennen.

Die Energieverteilung der Rückstossprotonen, die von monoenergetischen Neutronen herrühren, ist im Prinzip rechteckig, da der n-p-Streuquerschnitt im Schwerpunktssystem isotrop ist. Fig. 19. 19 zeigt das Protonenspektrum für einen Stilben-Szintillatoren, der trotz seiner etwas längeren Abklingzeit von 6,4 . 10^{-9} s ebenfalls oft verwendet wird; die Figur zeigt auch die Verzerrung des Impulshöhenspektrums, bedingt durch die nichtlineare Empfindlichkeit von Stilben.

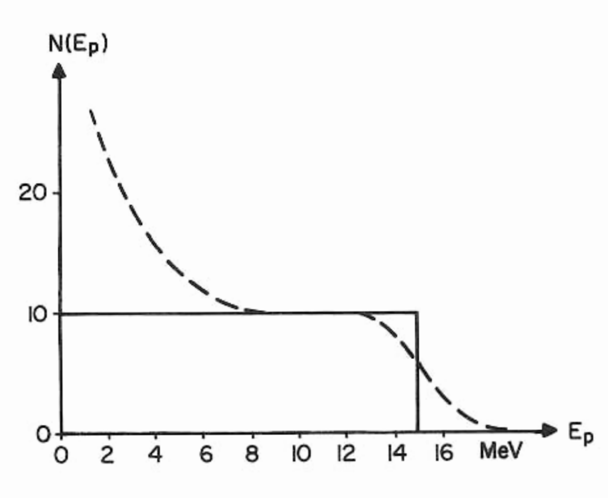


Fig. 19. 19

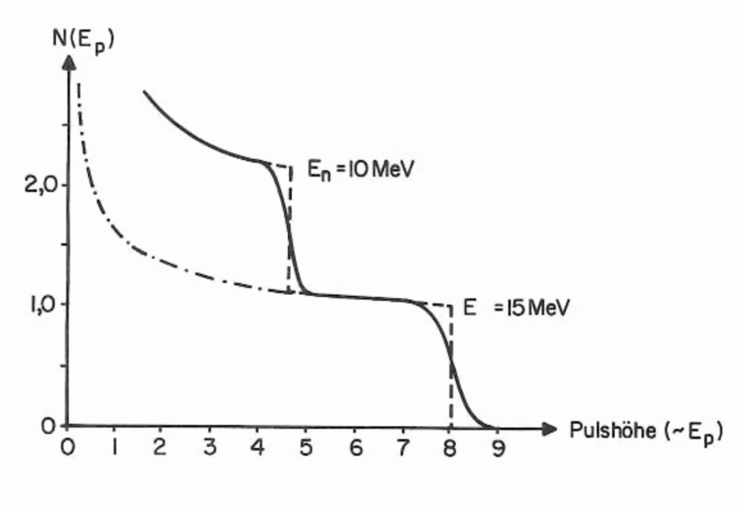


Fig. 19.20

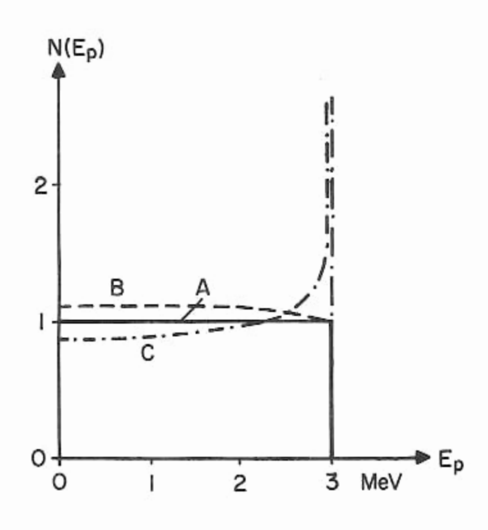


Fig. 19.21

Wenn zwei monoenergetische Neutronengruppen vorhanden sind, verläuft das Impulshöhenspektrum in Stilben wie in Fig. 19.20. Bis jetzt ist immer angenommen worden, dass der Rückstoss nur von Einfachstreuung herrühre; die Änderungen des Protonen-Rückstosspektrums bei Streuung an Kohlenstoff und Wasserstoff zeigt Kurve B in Fig. 19.21. Kurve A gilt für Einfachstreuung und Kurve C für Zweifachstreuung an Wasserstoff. Experimentelle Impulshöhenspektren für d-d-Neutronen mit zwei verschiedenen Energien, gemessen mit einem Stilbenkristall von 1 cm Durchmesser und 0,1 cm Dicke, sind in Fig. 19.22 aufgetragen.

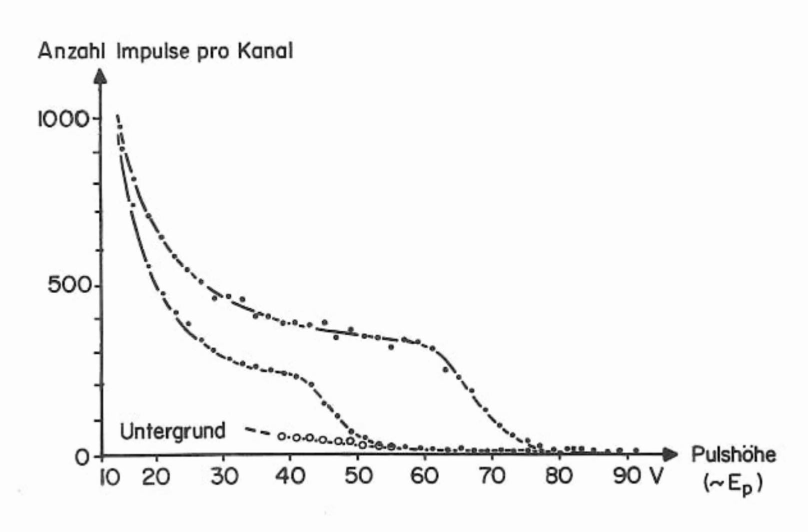


Fig. 19.22

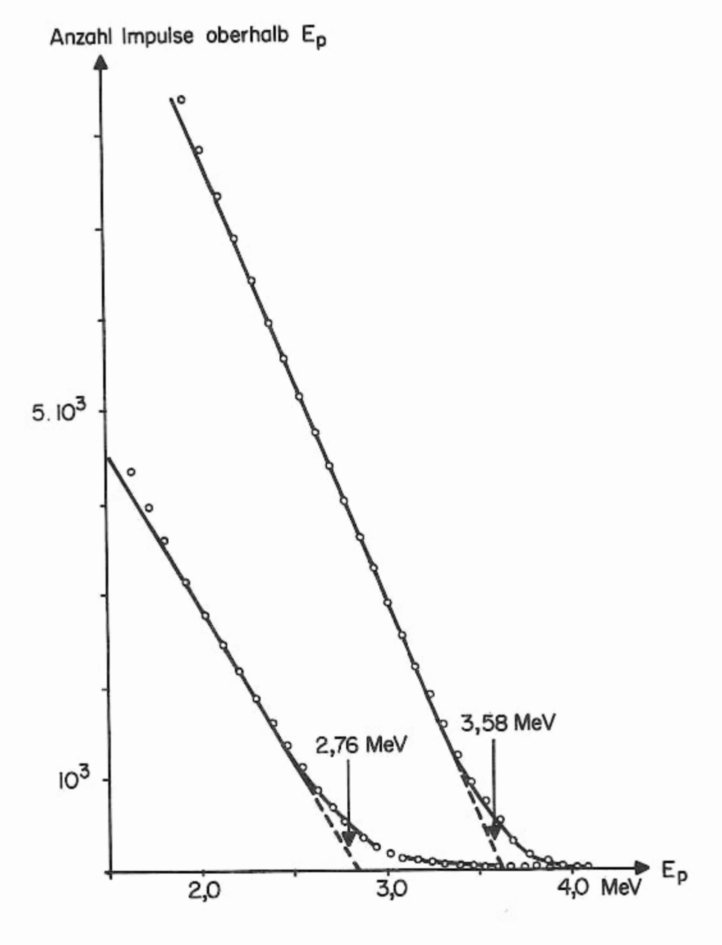


Fig. 19.23

Durch lineares Extrapolieren des integrierten Protonenenergiespektrums (siehe Fig. 19.23) erhält man die Neutronenenergien auf 3 % genau. In Fig. 19.23 bedeutet E_p einen willkürlichen Energie-Grenzwert, der durch die Diskrimierung bestimmt ist. Die Abweichung von der Geraden ist bedingt durch statistische Effekte.

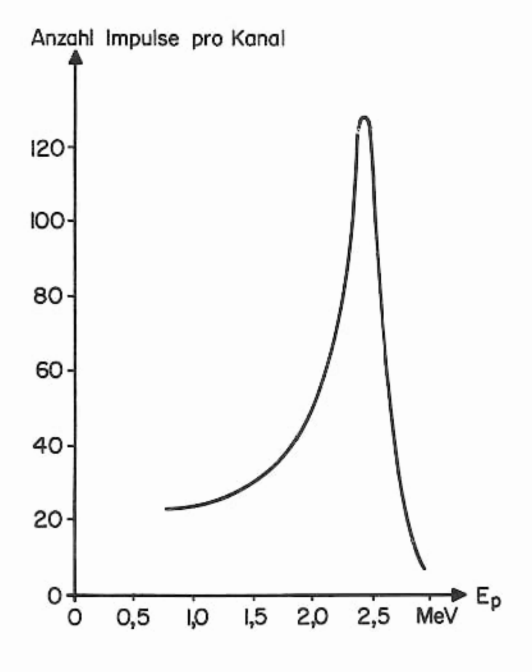


Fig. 19.24

Es ist möglich, das Protonenspektrum von einem Kontinuum auf ein diskretes Linienspektrum zu reduzieren, indem man dafür sorgt, dass nur solche Protonen registriert werden, die in einen kleinen Raumwinkel mit einem gegebenen Neigungswinkel zur Neutronen-Einfallsrichtung gestreut werden. Diese Protonen müssen dann die bestimmte Energie

$$E_p(\vartheta_p) = E_p \cos^2 \vartheta_p \qquad (19.25)$$

besitzen und ein Linienspektrum erzeugen. Bei diesem Verfahren wird natürlich die Ansprechwahrscheinlichkeit herabgesetzt. Flugzeit-Methoden können verwendet werden, um genau jene Protonenimpulse auszulesen, die mit einer Streuung langsamer ($\lesssim$ 30 keV) Neutronen verbunden sind, so dass also $E_p(\vartheta_p) \approx E_p$ und $\vartheta_p \approx 0$ ist: Das Spektrum von Rückstossprotonen, erzeugt von 2,8 MeV- d-d-Neutronen, ist in Fig. 19.24 aufgetragen.

19.4.5 Rückstoss-Teleskopzähler

Auch mit gasförmigen, wasserstoffhaltigen Detektoren erhält man Linienspektren von Protonen, deren Rückstossbahn innerhalb eines kleinen Raumwinkels liegt, der seinerseits einen gegebenen Winkel mit einem kollimierten, monoenergetischen, einfallenden Neutronenstrom einschliesst. Diese Detektoren besitzen einen zylindrischen Wasserstoffbehälter und zwei oder mehr Zähler. Diese stehen in Paaren hintereinander und sind in Koinzidenz oder Antikoinzidenz geschaltet, damit sie die Protonenrückstösse registrieren und gut vom Untergrund abheben. Die Detektoren haben dabei den Vorteil, dass sie es wegen ihrer Zusammensetzung und Geometrie erlauben, ihre absolute Ansprechwahrscheinlichkeit zu berechnen, wenn der n-p-Streuquerschnitt bekannt ist. Daraus können dann Neutronenintensitäten und -Energien leicht bestimmt werden. Die Nachteile liegen darin, dass man den einfallenden Neutronenstrom kollimieren muss, dass nur ein kleiner Raumwinkel wirksam ist und ein "dünnes" Wasserstofftarget verwendet werden muss, um sicher zu sein, dass alle Rückstossprotonen in die Zähler gelangen. Dennoch sind solche Detektoren für die Bestimmung der Winkelverteilung der n-p-Streuung ideal; sie werden auch oft als Teleskope für die Neutronenspektroskopie verwendet.

19.5 Neutronenspektroskopie

19.5.1 Monochromatoren

(a) Flugzeit eines pulsierenden Neutronenstrahles

Pulsierende Neutronenstrahlen mit einer typischen Impulslänge von 10 μsec und einer Repetitionsfrequenz von 1000 Hz können erzeugt werden, indem man in einem Zyklotron periodische Pakete schneller Deuteronen auf ein inneres Be-Target auftreffen lässt. Schnelle Neutronen treten durch die Wand der Zyklotron-Vakuumkammer aus; sie können gebremst werden, indem man sie auf einen Paraffinblock einfallen lässt. Die langsamen Neutronen werden dann längs eines mit Bor abgeschirmten Rohres zu einem äusserlich abgeschirmten Target oder Detektor geleitet. Unterwegs bildet sich ein Geschwindigkeitsstraggling: je länger der Weg, desto ausgeprägter sind die Differenzen in der Ankunftszeit von schnellen und langsamen Neutronen, die aus demselben Impulspaket stammen. Für einen Detektor im Abstand L vom Moderator ist die Energie der ihn passierenden Neutronen in jedem Augenblick bestimmt durch die Zeit t, die von der Aussendung des Impulspaketes an verstrichen ist:

$$E = \frac{1}{2} M_n v^2 \cong \frac{1}{2} M_n \left(\frac{L}{t}\right)^2 . \qquad (19.26)$$

Wenn man es nun so einrichtet, dass der Detektor nur auf Impulse anspricht, die mit einer gegebenen Verzögerung (Delay) bezüglich der Zyklotronimpulse eintreffen, so kann man erreichen, dass er nur Neutronen einer bestimmten Energie registriert.

(b) Mechanische Geschwindigkeitsselektoren

Wenn es nicht möglich ist, die Neutronenquelle, wie z. B. im Falle der Reaktorneutronen, pulsieren zu lassen, so kann man den austretenden, kontinuierlichen Strahl mit einem Geschwindigkeitsselektor, der nur Neutronen einer gegebenen Geschwindigkeit passieren lässt, "zerhacken" ("chopping"). Die sogenannten Choppers beruhen auf demselben Prinzip wie die Fizeau-Methode zur Bestimmung der

Lichtgeschwindigkeit. Sie bestehen im wesentlichen aus zwei oder mehreren Scheiben aus Cadmium oder Cadmiumstahl, die mit radialen, gegeneinander versetzten Schlitzen versehen sind und auf einer gemeinsamen Achse rotieren (Fig. 19.25). Alle Neutronen, die nicht durch die Schlitze laufen,

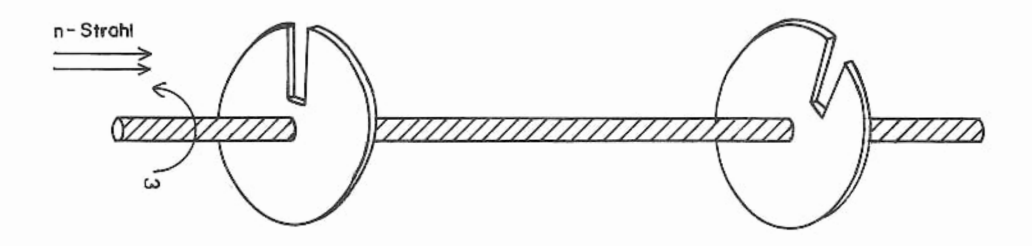


Fig. 19.25

werden absorbiert; durch Variieren der Scheiben-Drehzahl kann man erreichen, dass der Monochromator nur langsame Neutronen mit der gewünschten Geschwindigkeit durchlässt. Montiert man eine Reihe von Scheiben ohne Zwischenraum hintereinander, so erhält man einen Rotor mit einer schraubenförmigen Nut (Fig. 19.26). Die Ganghöhe der Nut ist $2\pi \frac{d\ell}{d\varphi}$, und die Winkelgeschwindigkeit sei $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Wenn φ_o den Drehwinkelunterschied zwischen hinterem und vorderem Ende der Nut (ℓ = Länge des Rotors) bedeutet, so beträgt die Geschwindigkeit der durchgehenden Neutronen

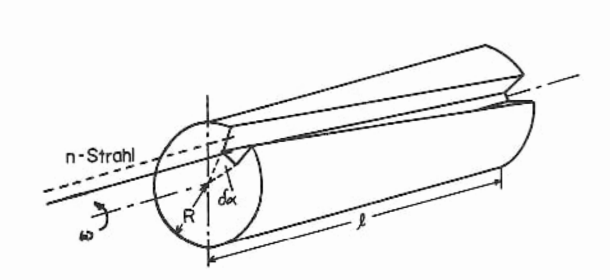


Fig. 19.26

$$v = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{\varphi_o} \cdot \omega \, . \qquad (19.27)$$

Ihre Wellenlänge ist damit gleich

$$\lambda = \frac{h \, \varphi_o}{M_n \, \omega \, \ell} \qquad (19.28)$$

und ihre Energie

$$E_n = \frac{M_n \, \ell^2 \, \omega^2}{2 \, \varphi_o^2} \, . \qquad (19.29)$$

Holt (Rev. Sci. Instr. 1957, 28, 1) konstruierte einen Geschwindigkeitsselektor mit hoher Durchlässigkeit für niederenergetische Neutronen, der jedoch für hohe Energien fast undurchlässig ist. Aus Fig. 19.26 ist ersichtlich, dass die axiale Geschwindigkeit v der Neutronen, die durch den Rotorschlitz fliegen, gleich

$$v = \frac{\omega \ell}{\alpha} \qquad (19.30)$$

ist, worin α der Winkel ist, um den sich der Rotor während des Neutronendurchganges dreht. Berücksichtigt man die endliche Divergenz ϑ eines kollimierten Neutronenstrahles und die endliche Winkelöffnung $\delta\alpha$ des Schlitzes, so ergibt sich die maximale Geschwindigkeit, bei der die

Neutronen den Rotor noch passieren können, zu

$$v_{max} = \frac{\omega \ell}{\alpha - (\delta\alpha + \beta)} = \frac{v}{1 - \frac{\delta\alpha + \beta}{\alpha}} , \qquad (19.31)$$

worin

$$\beta \equiv \frac{\vartheta \ell}{R} . \qquad (19.32)$$

Auf dieser Grundlage wurde ein Rotor gebaut, dessen Vorderansicht Fig. 19.27 zeigt. Er besitzt 80 schraubenförmige Nuten, deren Form durch Cd-belegte Flügel aus rostfreiem Stahl bestimmt ist. Die Ganghöhe der Nuten beträgt etwa 800 cm und die Rotorlänge 40 cm. Die Rotordrehzahl wird zwischen 2000 und 4000 U/min variiert, und man findet, dass bei der experimentellen Neutronenstrahl-Divergenz von ϑ = 0,00344 rad. die maximale Durchlassgeschwindigkeit v_{max} = 1,44 v beträgt.

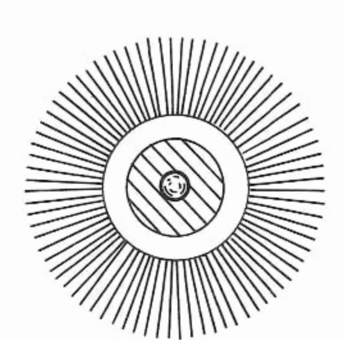


Fig. 19.27

Ein Chopper für langsame Neutronen im Energiebereich von 10^{-3} bis 10^{-1} eV besteht im wesentlichen aus einem rotierenden, zylindrischen "Unterbrecher" ("shutter") aus abwechslungsweise übereinandergeschichteten Cadmium- und Aluminium-Lamellen (Fig. 19.28), wobei Cadmium die thermischen Neutronen stark absorbiert, Aluminium hingegen kaum. Die zwei Pakete thermischer Neutronen, die pro "Shutter"-Umdrehung durchgelassen werden, durchfliegen eine gemessene Strecke und fallen auf einen BF_3-Detektor. Die Neutronen werden nach Massgabe ihrer Ankunftszeit im Proportionalzähler registriert: Ein Lichtstrahl wird in einem zweiseitigen, auf dem Rotor montierten Spiegel M reflektiert und fällt auf eine Photozelle P. Diese kann man um die Rotorachse schwenken und so eine Winkelstellung des

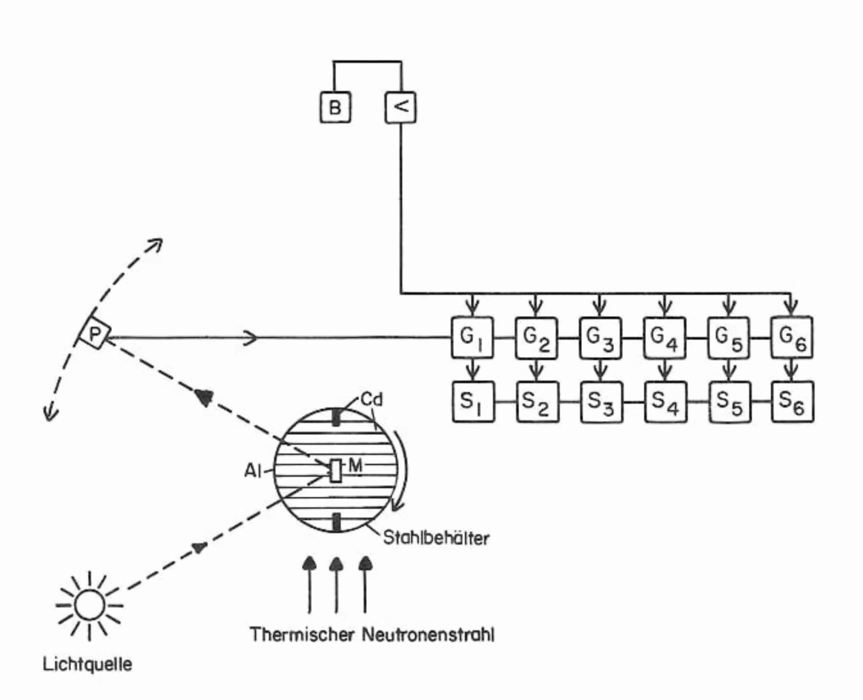


Fig. 19.28

Rotors "festlegen". Den Ausgang der Photozelle legt man an ein Tor (Gate) G_1, das alle jene Impulse in den Scaler S_1 einspeist, die innerhalb eines kurzen, vorbestimmten Zeitintervalles, unmittelbar nach dem Triggerimpuls der Photozelle, eintreffen. Sobald sich G_1 schliesst, öffnet sich G_2 und speist die im folgenden Zeitintervall eintreffenden Neutronen in den Scaler S_2, usw. Schliesslich registrieren die Scalers beispielsweise sechs Neutronengruppen aus sechs aufeinanderfolgenden Geschwindigkeitsintervallen. Im Prinzip stellt die Schaltung also einen 6-Kanal-Analysator dar, dessen Geschwindigkeitsbereich durch Schwenken der Photozelle entlang des Teilkreises erweitert werden kann.

Fig. 19.29 zeigt die Resultate für den totalen Absorptionsquerschnitt σ_a von Gold, die mit diesem Chopper und einer in den kollimierten Neutronenstrahl gebrachten Goldfolie erzielt worden sind. Sie liefern den Wert von

$$\sigma_a = 98,4 \pm 0,9 \ b \qquad (19.33)$$

für eine thermische Neutronengeschwindigkeit von 2200 m. sec^{-1}; dieser stimmt mit den Werten aus anderen Methoden ausgezeichnet überein. Bei einem Geschwindigkeitsselektor für schnelle Neutronen kann man kein Cadmium verwenden, da es viel zu schwach absorbiert. In der Tat haben alle Materialien für schnelle Neutronen so kleine Schwächungskoeffizienten, dass man genötigt ist, sehr grosse Rotoren zu verwenden (75 cm Durchmesser). Die absorbierenden Sektoren des Choppers (Fig. 19.30) sind aus Phenol, dessen hoher Wasserstoffgehalt ein relativ hohes Bremsvermögen gewährleistet, und dessen niedriges spezifisches Gewicht selbst für grosse Rotoren hohe Drehzahlen zulässt (6000 bis 12000 U/min). Bei der maximalen Drehzahl hat die zeitliche Auflösung eine halbe Halbwertsbreite von 0,35 μsec.

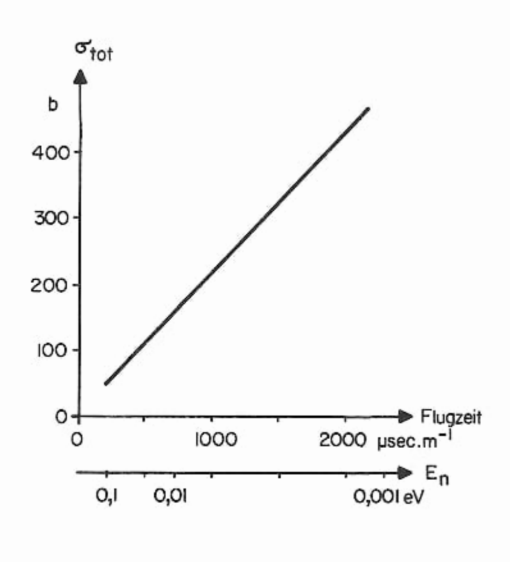


Fig. 19.29

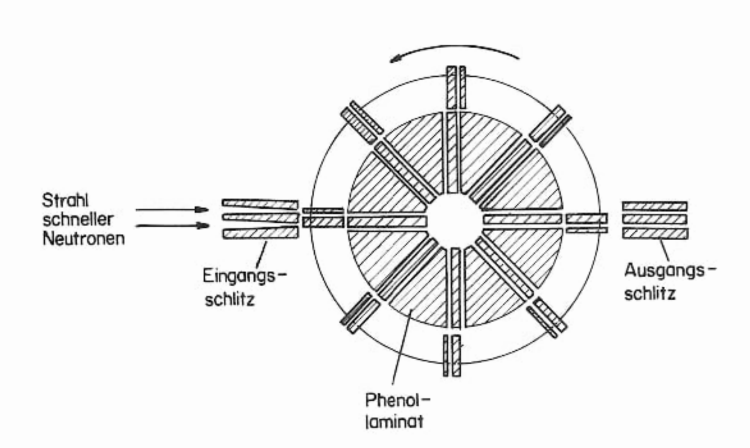


Fig. 19.30

19. 5. 2 Kristallspektrometer

Beim Übergang zu intensiven Strahlen langsamer Neutronen gelangt man in den Anwendungsbereich der Kristallspektrometrie, die auf der Bragg'schen Reflexion an den Netzebenen beruht. Die de-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 M_n E}} \tag{19.34}$$

ist für thermische Neutronen von derselben Grössenordnung ($\sim$ 1 Å) wie die Gitterkonstante d. Somit erhält man Bragg-Reflexion für jene Glanzwinkel ϑ und Wellenlängen λ , welche die Bragg'sche Bedingung

$$\boxed{n \lambda = 2 d \sin \vartheta} \tag{19.35}$$

erfüllen (Fig. 19. 31). Darin bestimmt die ganze Zahl n die sogenannte ORDNUNG der Reflexion.

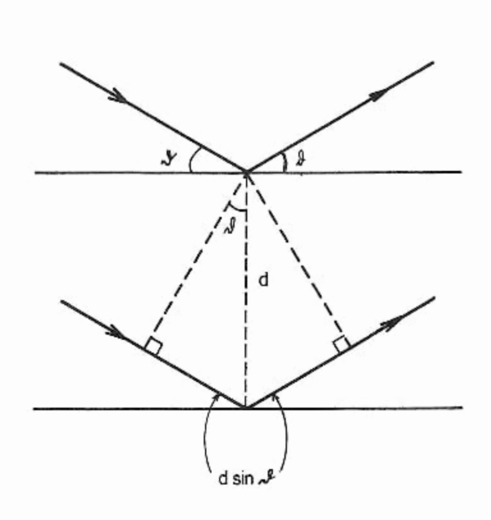


Fig. 19.31

Somit folgt, dass

$$E = \frac{n^2 h^2}{8 M_n d^2 \sin^2 \vartheta} . \tag{19.36}$$

Wenn man also einen kollimierten Strahl von Neutronen verschiedener Energie auf einen LiF-Kristall fallen lässt, kann man unter dem betreffenden, kritischen Winkel ϑ einen monoenergetischen Strahl schneller Neutronen ausblenden. Ein solches Einkristallspektrometer zeigt eine Energieauflösung von

$$\boxed{- \frac{\delta E}{E} = 2 \, \mathrm{ctg} \, \vartheta . \, \delta \vartheta ,} \tag{19.37}$$

wobei die Winkelunschärfe $\delta\vartheta$ bedingt ist durch die Geometrie des Neutronenstrahles und durch Kristallfehler; ihr Wert liegt in der Gegend von 0,003 rad.. Kristallspektrometer können für Neutronenenergien von 0,025 eV bis etwa 100 eV verwendet werden; ihr Auflösungsvermögen variiert von $1,5 \, . \, 10^{-3}$ eV für thermische Neutronen bis $\sim$ 5 eV für 10 eV-Neutronen. Die Auflösung wird besser, wenn man Kristalle mit sehr kleinem Gitterabstand wählt, oder, wenn man, bei einem Kristall mit sehr geringer Reflexionsintensität erster Ordnung, mit der Reflexion zweiter Ordnung arbeitet. Durch die Verwendung von Reflexionen höherer Ordnung für einen Strahl mit Wellenlängen über 1 Å wird jedoch die Energieschärfe zerstört. Das veranlasste Holt, den diskriminierenden Geschwindigkeitsselektor zu entwerfen, der in Abschn. 19. 5. 1 (b) beschrieben ist. Die Bedingung für die Elimination von Reflexionen zweiter Ordnung durch den Rotor ist

$$v_{max} < 2 v , \tag{19.38}$$

was wegen der charakteristischen Beziehung für Holts experimentelle Anordnung (v_{max} = 1,44 v) gut erfüllt ist.

Fig. 19.32 zeigt als Beispiel ein Spektrum von Neutronen, die durch ein Loch in der Abschirmung am Argonne-Schwerwasserreaktor ausgetreten sind; es ist mit einem Kristallspektrometer aufgenommen worden. Man sieht, dass die Verteilung fast exakt mit der ausgezogenen Maxwell-Kurve für T = 400° K zusammenfällt, mit Ausnahme des charakteristischen Hochenergie-$1/E$-"Schwanzes" (vgl. Abschn. 19.3.4).

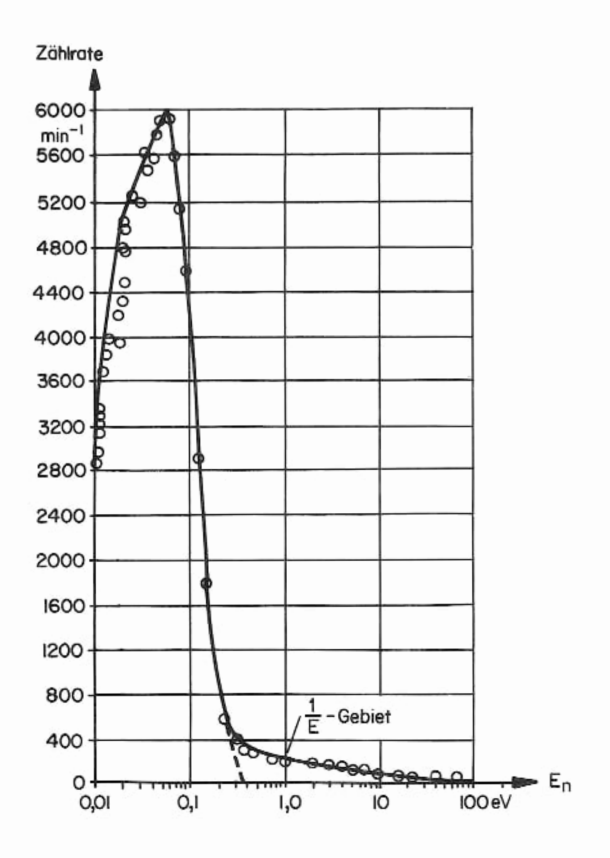


Fig. 19.32

Eine interessante Anwendung von Kristallmonochromatoren ist das "Filtrieren" kalter Neutronen. Aus der Bragg'schen Bedingung (19.35) folgt, dass für Wellenlängen über einem kritischen Werte λ_k = 2d unter keinem anderen Winkel, ausser ϑ = 0, kohärente Reflexion auftritt. Somit durchqueren kalte Neutronen, deren Energie unter dem Wert

$$E_k = \frac{h^2}{2 M_n \lambda_k^2} = \frac{h^2}{8 M_n d^2} \qquad (19.39)$$

liegt, einen fehlerlosen Kristall, ohne abgelenkt zu werden, und, wenn der Kristall aus nichtabsorbierenden Kernen besteht, auch ohne geschwächt ("attenuiert" = "attenuated") zu werden. Daher müssen die Kristalle für kalte Neutronen einen kleinen Einfangsquerschnitt aufweisen: Das ist in Anbetracht des $1/v$-Gesetzes eine besonders einschneidende Forderung. Als Durchlassfilter für kalte Neutronen wurde polykristallines Berylliumoxid verwendet: Die betreffende, kritische Wellenlänge ist λ_k = 4,4 Å und die Energie der kalten Neutronen $E_n < E_k = 4 \cdot 10^{-3}$ eV. Da Beryllium jene Neutronen totalreflektieren kann, die unter einem kleinen, äusseren Glanzwinkel einfallen, kann es als NEUTRONEN-SPIEGEL (NEUTRON MIRROR) verwendet werden. Dabei benützt man die ÄUSSERE TOTALREFLEXION (TOTAL EXTERNAL REFLECTION) an einem Material, dessen Brechungsindex kleiner ist als 1. Für Berylliumspiegel darf der Glanzwinkel 0,2° nicht überschreiten.

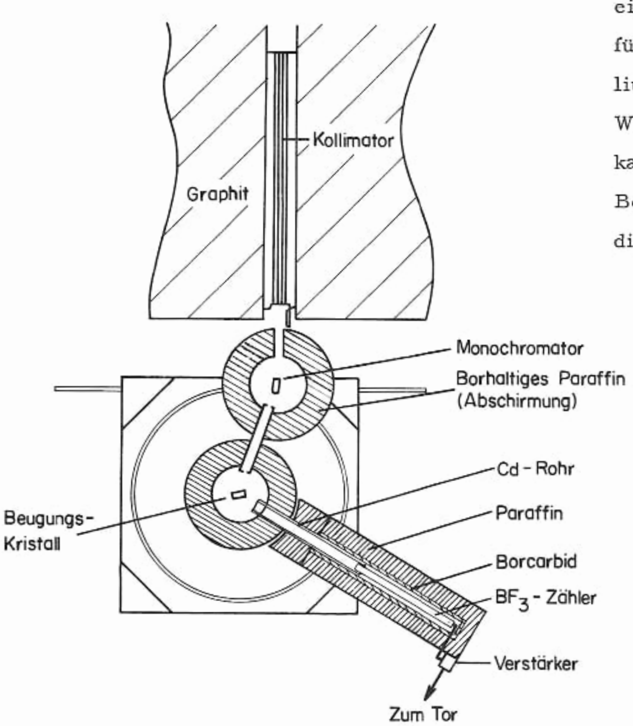


Fig. 19.33

Neutronenspektrometer mit zwei Kristallen werden ebenfalls oft verwendet: Fig. 19.33 zeigt die 1950 in Harwell entwickelte, bewegliche Anordnung. Der Monochromator-

kristall reflektiert nur etwa 1 % der totalen Reaktorstrahlung in der Richtung des Beugungskristalles. Man muss sehr darauf achten, möglichst viel von den unerwünschten 99 % der Strahlung zu absorbieren, sonst gelangt ein Teil davon nach mehrfacher Streuung in den Detektor und löst störende Zählimpulse aus. Die borhaltige Paraffinabschirmung reduziert den Untergrund von einigen tausend Zählimpulsen pro Minute auf etwa deren 10 min^{-1}. Das ist nur um weniges niedriger als die Intensität einiger schwacher Beugungslinien.

19. 6 Neutronenbeugung

19. 6. 1 Beugungsverhalten

Die Wellennatur der Neutronen (siehe Fig. 19. 34) erlaubt Materialuntersuchungen auf Grund der Beugung, wobei ganz ähnliche Methoden wie in der Röntgentechnik verwendet werden. Doch besteht der wichtige Unterschied darin, dass für die Röntgenstreuung die Hüllenelektronen verantwortlich sind, während die kohärente Streuung langsamer Neutronen an den Kernen der untersuchten Atome stattfindet. Das hat folgende, wichtige Konsequenzen:

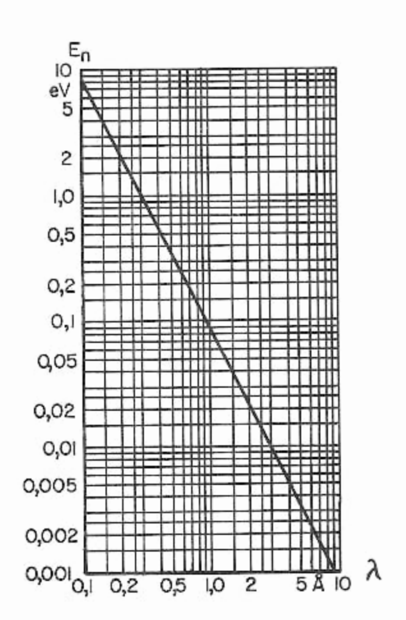


Fig. 19.34

(i) In einem Material aus schweren und leichten Elementen werden die Röntgeninterferenzeffekte der leichten Komponente meistens von jenen der schweren Elemente verdeckt. Das ist jedoch nicht der Fall bei der Neutronenbeugung. Die Streuquerschnitte langsamer Neutronen sind für alle Elemente ungefähr gleich gross; sie machen also keinen Unterschied zwischen schweren und leichten Elementen, im Gegensatz zum Z-abhängigen Röntgenstreuquerschnitt (vgl. Abschn. 3. 5. 4 und 3. 8).

(ii) Neutronenstreuung ist für jedes einzelne Isotop eines beliebigen Elementes verschieden, während für Röntgenstrahlen alle Isotope eines Elementes dieselben Streuintensitäten liefern.

(iii) Wegen der starken Spinabhängigkeit der Kernkräfte (Abschn. 13. 3) können die Streueigenschaften eines gegebenen Kerns von der Stellung seines Spins relativ zum Neutronenspin abhängen. Abgesehen von geringen Elektronenspin-Effekten ist jedoch die Röntgenstreuung unabhängig von der Orientierung des Atomes.

(iv) Bei der Beugung an Kristallen mit stark absorbierenden Kernen dringen Neutronen viel weniger tief ein als Röntgenstrahlen, da ihre Absorptionsquerschnitte viel grösser sein können als ihre Streuquerschnitte. Daher sind die Neutronen-Streueffekte viel empfindlicher auf die Oberflächeneigenschaften.

Tab. 19. 4 liefert einige relative Durchlassfaktoren für Neutronen und Röntgenstrahlen in verschiedenen Materialien:

Tab. 19.4

Material	Neutronen, λ = 1,08 Å	Röntgenstrahlen, λ = 1,54 Å	
	Dicke 6,3 mm	6,3 mm	0,1 mm
Aluminium	94 %	0 %	27 %
Messing	67 %	0 %	1 %
Cadmium	0 %	0 %	0 %
Blei	84 %	0 %	0 %
Graphit	80 %	0 - 25 %	90 %
CaF_2 (Einkristall)	97 %	0 %	5 %

Ein gegebener, regulärer Kristall kann auf zwei Arten verwendet werden, nämlich zur Neutronen-BEUGUNG DURCH REFLEXION oder zur Neutronen-BEUGUNG DURCH TRANSMISSION, wie das Fig. 19.35 illustriert.

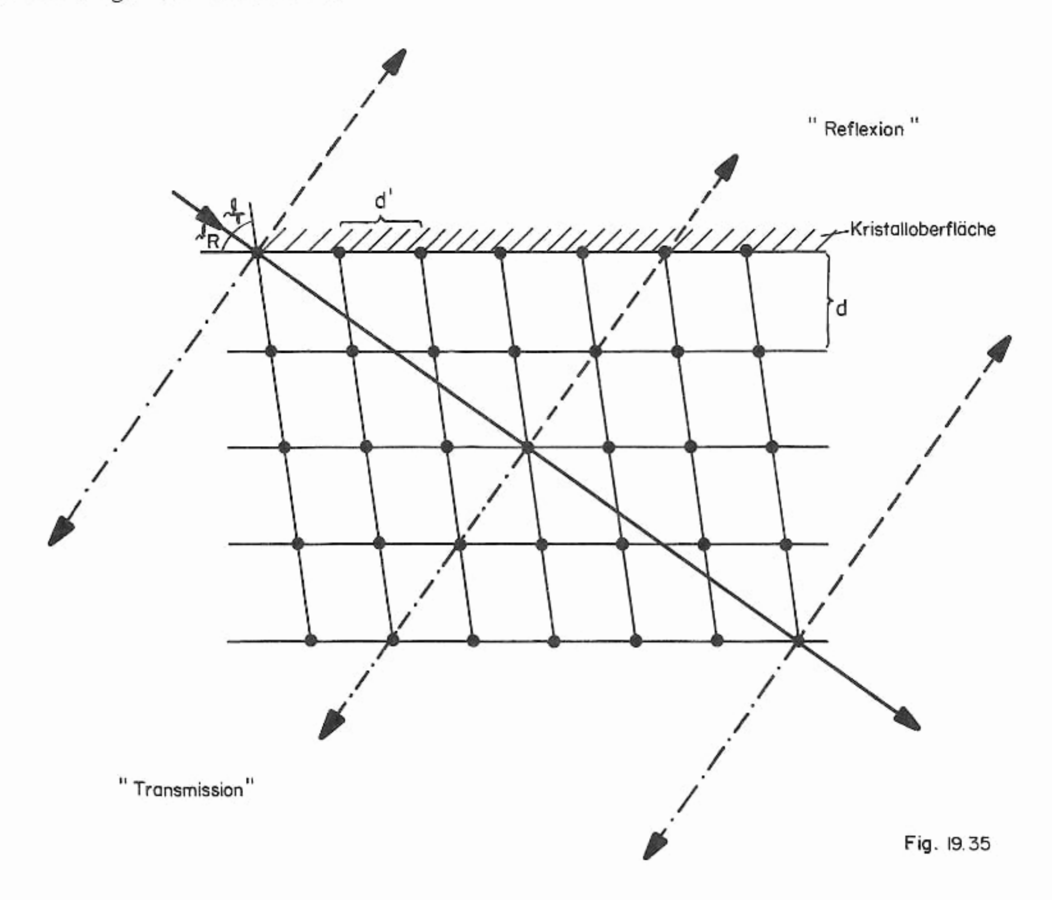


Fig. 19.35

Für einen kleinen Bruchteil der einfallenden Intensität erfolgt hier Bragg-Reflexion an zwei Systemen von Netzebenen, unter den Glanzwinkeln ϑ_R resp. ϑ_T . Je nach Orientierung des Kristalles kann man jedes System von Netzebenen für den Transmissionsprozess auswählen. Bei der Transmissionsmethode genügt ein viel kleinerer Kristall, um unter den üblichen, kleinen Winkeln ϑ_R den kollimierten Strahl in seiner ganzen Breite aufzufangen.

19.6.2 Kohärente und diffuse Streuung

Wenn thermische Neutronen auf einen Kristall fallen, so sind die Streuwellen der einzelnen Kerne kugelsymmetrisch (S-Wellen): Ihre Intensitäten addieren sich unter den Bragg'schen Streuwinkeln und liefern dort eine KOHÄRENTE STREUUNG; in allen andern Richtungen hingegen heben sie sich auf, so dass in diesen Richtungen eigentlich keine Streuung mehr auftritt.

Wie in Abschn. 16.7.5 gezeigt, ist der totale Shape-elastische Streuquerschnitt gleich

$$\sigma_{(n,n)\,shape} = 4\pi R'^2. \tag{19.40}$$

Er umfasst auch den sogenannten KOHÄRENTEN STREUQUERSCHNITT, σ_{koh}, der die Bragg'sche Neutronenstreuung in den "erlaubten", durch die Braggwinkel ϑ gegebenen Richtungen bestimmt. Unter idealen Verhältnissen, d.h. wenn monoenergetische, thermische Neutronen auf einen fehlerlosen Kristall aus einem einzigen Isotop treffen, wenn keine Temperaturbewegung vorhanden ist und die Streuung nicht vom Spin abhängt, dann tritt nur kohärente Streuung auf, so dass $\sigma_{(n,n)} = \sigma_{koh}$. In Praxis sind jedoch diese Bedingungen nicht erfüllt. Deshalb wird ein Teil der einfallenden Neutronen in allen Richtungen gestreut und nur der Rest in den "erlaubten" Bragg'schen Richtungen. Das bezeichnet man als DIFFUSE STREUUNG. Ihre Wahrscheinlichkeit ist bestimmt durch den DIFFUSEN STREUQUERSCHNITT (DIFFUSE SCATTERING CROSS-SECTION). Dieser kann wieder in partielle Querschnitte aufgespalten werden, die speziell durch Spin-, Isotopen-, Temperatur-, Gitterfehler-Effekte usw. bestimmt sind:

$$\sigma_{diff} = \sigma_{Spin} + \sigma_{Isotop} + \sigma_{Temp.} + \sigma_{Fehler}. \tag{19.41}$$

Der totale Streuquerschnitt ist dann gleich

$$\boxed{\sigma_{(n,n)} = \sigma_{koh} + \sigma_{diff}.} \tag{19.42}$$

Die relativen Werte der Wirkungsquerschnitte können durch Untersuchung der betreffenden Streuamplituden bestimmt werden. Beschränkt man sich zuerst auf die Betrachtung der Spinabhängigkeit, so zeigt sich folgendes: Für S-Neutronen, die auf ein isotopenreines Target vom Spin I_A fallen, kann der Spinfaktor (16.99) im Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt (Abschn. 16.7.4),

$$g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A+1}\right), \tag{19.43}$$

aufgespalten werden in

$$g_+ \equiv \frac{I_A+1}{2I_A+1} \qquad \text{und} \qquad g_- \equiv \frac{I_A}{2I_A+1}, \tag{19.44}$$

wobei $g_+ + g_- = 1$ ist. Mit diesen statistischen Gewichtsfaktoren kann die mittlere, kohärente Streuamplitude, a_{koh}, in der Form

$$a_{koh} = g_+ a_+ + g_- a_- \tag{19.45}$$

ausgedrückt werden, so dass der KOHÄRENTE WIRKUNGSQUERSCHNITT gleich

$$\boxed{\sigma_{koh} = 4\pi\, a_{koh}^2 = 4\pi\left(g_+ a_+ + g_- a_-\right)^2} \tag{19.46}$$

wird.

Die kohärente Streuamplitude, a_{koh}, kommt in den optischen Eigenschaften des Neutrons, z. B. Interferenz und Bragg'scher Streuung, zum Ausdruck. Die Intensität erhält man durch Addieren der Amplituden vor dem Quadrieren, gleich wie in der Optik bei kohärenten Interferenzen.

Andererseits ergibt sich der totale, elastische Streuquerschnitt durch Addieren der gewogenen Streuamplituden-Quadrate:

$$\sigma_{(n,n)} = 4\pi \left(g_+ a_+^2 + g_- a_-^2 \right). \qquad (19.47)$$

Das entspricht der Addition der Intensitäten von inkohärent überlagerten Lichtwellen in der Optik.

Der DIFFUSE STREUQUERSCHNITT wird somit gleich

$$\sigma_{diff} = \sigma_{(n,n)} - \sigma_{koh} \qquad (19.48)$$

$$= 4\pi \left[g_+ a_+^2 + g_- a_-^2 - \left(g_+ a_+ + g_- a_- \right)^2 \right] \qquad (19.49)$$

$$= 4\pi \left[g_+ g_- a_+^2 + g_+ g_- a_-^2 - 2\, g_+ g_- a_+ a_- \right] \qquad (19.50)$$

$$\boxed{\sigma_{diff} = 4\pi \cdot \frac{I_A (I_A + 1)}{(2 I_A + 1)^2} \left(a_+ - a_- \right)^2 .} \qquad (19.51)$$

Die diffuse Streuamplitude ist dann gleich

$$a_{diff} = \sqrt{\frac{\sigma_{diff}}{4\pi}} = \frac{\sqrt{I_A (I_A + 1)}}{2 I_A + 1} \left(a_+ - a_- \right). \qquad (19.52)$$

Man sieht, dass σ_{diff} verschwindet

(i) für $a_+ = a_-$, wenn $\sigma_{(n,n)} = \sigma_{koh}$, (19.53)

oder (ii) für $g_+ = 0$ oder 1. (19.54)

Aus (19.45) folgt, dass wenn $g_+ a_+ = g_- a_-$, dann $a_{koh} = \sigma_{koh} = 0$. (19.55)

Zur Berücksichtigung der Isotopeneffekte bedient man sich derselben Methode, nur ersetzt man g_+ und g_- durch die Isotopenhäufigkeiten f_1 und f_2. Eine numerische Bestätigung der Theorie liefern z. B. die Ni-Isotope mit geradem A, die alle den Spin Null besitzen; somit ist $\sigma_{spin} = 0$. Jede diffuse Streuung entsteht demnach aus dem Isotopeneffekt, charakterisiert durch σ_{Isotop}. Gemessene, kohärente Streuamplituden sind in Tab. 19.5 angegeben.

Tab. 19.5

Isotop	rel. Häufigkeit	a_{koh}	$f.\,a_{koh}$
Ni^{58}	0,678	14,7 f	10,0 f
Ni^{60}	0,26	2,8 f	0,73 f
Ni^{62}	0,037	- 8,5 f	- 0,34 f

Die totale, kohärente Streuamplitude, reduziert auf die relative Häufigkeit, beträgt dann 10,4 f, was ausgezeichnet mit dem Wert 10,3 f übereinstimmt, welcher aus dem gemessenen, kohärenten Querschnitt von $\sigma_{koh} = 13{,}4$ b abgeleitet worden ist.

Ein weiterer, physikalischer Aspekt der Spininkohärenz ist experimentell beobachtbar beim sogenannten "SPIN-FLIP"-Prozess, wo anfänglich polarisierte Neutronen bei der Streuung ihre Polarisation verlieren. Die Wahrscheinlichkeit eines Spin-Flip-Prozesses, bei dem der Spin I_A des Targetkernes um eine Einheit (also um $\hbar$) geändert wird, ist pro Streuvorgang gleich

$$W_{S.-F.} = \frac{2 I_A (I_A + 1)(a_+ - a_-)}{3 (2 I_A + 1)\left[(I_A + 1) a_+^2 + I_A a_-^2\right]} , \qquad (19.56)$$

oder, ausgedrückt durch die Wirkungsquerschnitte, gleich

$$\boxed{W_{S.-F.} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_{diff}}{\sigma_{(n,n)}} .} \qquad (19.57)$$

19. 6. 3 Pulvermethode

Die Pulvermethode nach Debye-Scherrer kann speziell dann für Kristallstrukturuntersuchungen mit Neutronenbeugung verwendet werden, wenn die Kristalle leichte Elemente enthalten (speziell Wasserstoff), über welche die Röntgenbeugungsmethoden wegen ihrer Z-Abhängigkeit keinen Aufschluss geben. Dennoch ist der Anwendungsbereich dieses Verfahrens dadurch beschränkt, dass trotz dem sehr grossen, totalen elastischen Streuquerschnitt von Wasserstoff ($\sigma_{(n,n)} = 81{,}4$ b) dessen kohärenter Wirkungsquerschnitt nur sehr klein ist ($\sigma_{koh} = 1{,}79$ b), wenn auch von derselben Grössenordnung wie derjenige schwerer Kerne. Der einfallende, monoenergetische Neutronenstrahl teilt sich bei der Beugung in verschiedene Kegelflächen mit Öffnungswinkel 4 ϑ , wo ϑ den Bragg'schen Winkel für das gegebene System von Netzebenen bedeutet. Auf einem Schirm erscheint der Strahl dann als konzentrische Kreisringe. Anstelle eines Schirmes lässt man einen BF_3-Zähler so um das Target rotieren, dass er immer auf das Target gerichtet ist. Nach Abzug des Untergrundes repräsentiert die Zählrate die Beugungsfigur. Ihre Maxima liegen unter jenen Winkeln, die der Bragg'schen Bedingung für verschiedene Netzebenen genügen. Um eine ausreichende Zählrate zu erhalten, muss die Intensität des einfallenden Neutronenstrahles hoch sein.

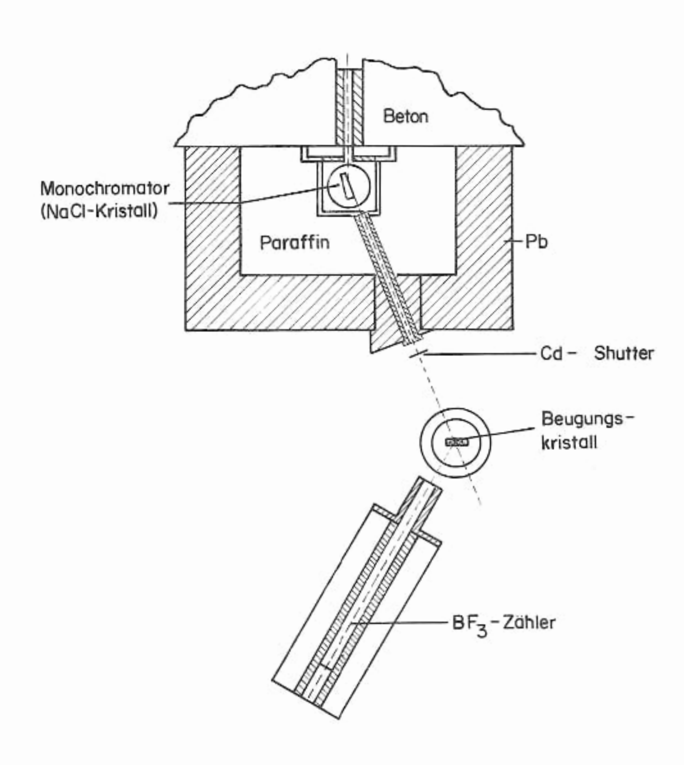


Fig. 19.36

Mit der Apparatur in Fig. 19.36 untersuchten Wollan und Shull (PR 1948, 73, 830) eine Reihe von

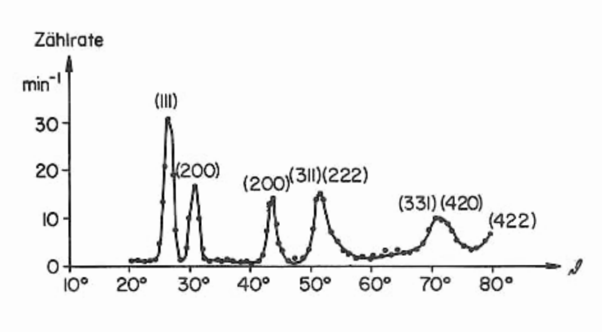


Fig. 19.37

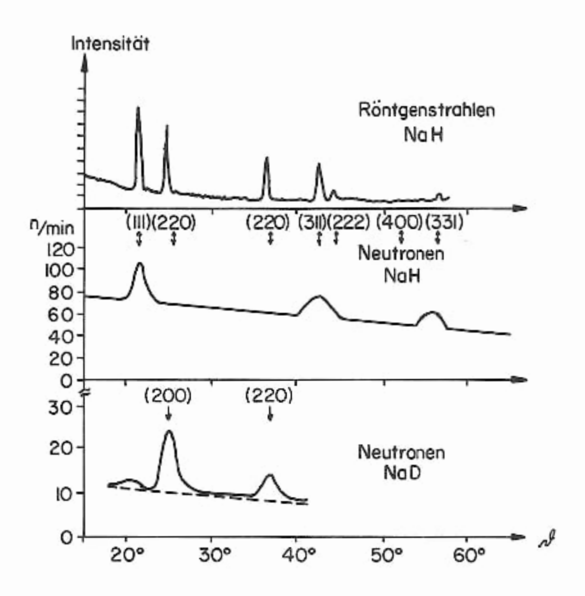


Fig. 19.38

Materialien und erhielten für eine Probe aus Aluminiumpulver die in Fig. 19.37 aufgetragenen Resultate. Für jedes Maximum ist der entsprechende Miller-Index der reflektierenden Netzebene angegeben. Da die Höhe der Spitzen nur von σ_{koh} und die Streuintensitäten dazwischen nur von σ_{diff} abhängen, können diese Grössen aus der Beugungsfigur bestimmt werden. Ein anderes Beispiel, für NaH, bzw. NaD, zeigt Fig. 19.38. In der oberen und mittleren Abbildung vergleicht man die Beugungsfiguren von Röntgenstrahlen und Neutronen für NaH-Kristalle. Im Röntgendiagramm erscheinen nur Reflexionen an den Netzebenen der Na-Atome, während das Neutronendiagramm nur Reflexionen an den H-Netzebenen zeigt. Daraus wurde das NaH-Gitter als flächenzentriert-kubisch bestimmt. Bemerkenswert ist das kleinere Auflösungsvermögen der Neutronenbeugung gegenüber dem der Röntgenbeugung. Die mittlere und untere Abbildung zeigen den auffallenden Unterschied zwischen wasserstoffhaltigen und deuteriumhaltigen Kristallen. Sie zeigen, dass die diffuse Streuung beim ersteren viel stärker ist und dass die kohärenten Streuamplituden von H und D umgekehrtes Vorzeichen haben, während sie für D und Na gleichnamig sind.

Der grosse, diffuse Wirkungsquerschnitt für H ,

$$\sigma_{diff} = \sigma_{(n,n)} - \sigma_{koh} = 81,4 - 1,8 = 79,6 \text{ b} , \qquad (19.58)$$

ist bedingt durch den Spineffekt, charakterisiert durch σ_{spin}. Da $I_A = 1/2$ ist, folgt aus (19.44) und (19.47), dass

$$\sigma_{(n,n)} = \pi \left(3a_+^2 + a_-^2 \right) . \qquad (19.59)$$

Die betreffenden Streuamplituden a_+ und a_- lassen sich bestimmen aus Messungen der σ_{koh} für die beiden Modifikationen des Wasserstoffmoleküls, nämlich den ORTHOWASSERSTOFF (Spins parallel, Kernspin I = 1) und den PARAWASSERSTOFF (Spins antiparallel, Kernspin I = 0). Beugungsversuche mit kalten Neutronen ($E_n = 1,25 \cdot 10^{-3}$ eV, T = 15° K) ergeben

$$\boxed{a_+ = 5,2 \text{ f} \qquad \text{und} \qquad a_- = -23,4 \text{ f}} \; . \qquad (19.60)$$

Damit ist a_- zahlenmässig immer noch gross genug, um das statistische Gewichtsverhältnis von 3 : 1 zu kompensieren und eine kleine, negative, kohärente Streuamplitude, also einen kleinen kohärenten Wirkungsquerschnitt, zu liefern.

19.6.4 Magnetische Effekte

Beim Durchgang durch magnetisiertes Eisen werden Neutronen polarisiert (BLOCH-EFFEKT). Das beruht auf der Interferenz zwischen der Neutronenwelle, die im Magnetfeld der Eisenatome gestreut wird, und jener Welle, die an den Kernen gestreut wird. Der kohärente Wirkungsquerschnitt pro Kern im magnetisch gesättigten Eisen hat die Form

$$\boxed{\sigma_{koh} = \sigma_o \pm \sigma_{pol} .} \qquad (19.61)$$

Darin ist σ_o der Wirkungsquerschnitt für vollständig entmagnetisiertes Eisen und σ_{pol} der Polarisationsquerschnitt. Die zwei Vorzeichen beziehen sich auf die beiden Fälle, wo der Neutronenspin parallel, bzw. antiparallel,("up", bzw. "down") zur Richtung der Magnetisierung steht.

Ein Nachteil dieser Methode liegt darin, dass bei magnetisch nicht gleichmässig gesättigtem Eisen jede Feldinhomogenität depolarisierend wirkt. Ein weiterer Nachteil, selbstverständlich, ist die Tatsache, dass nur ein Bruchteil des einfallenden Neutronenflusses wieder aus dem Polarisator austritt: Im Gegensatz dazu wird der Fluss beim Polarisieren durch Reflexion an einem magnetisierten Eisenspiegel viel weniger geschwächt.

Im Zusammenhang mit dem Bloch-Effekt sollte man das physikalische Faktum nicht übersehen, dass zwar die Flussintensität beim Durchqueren der Eisenprobe verringert wird, dass aber dieser Verlust in einer magnetisierten Probe kleiner ist als in einer nicht magnetisierten. Das kann durch die folgende Betrachtung klar gemacht werden:

Angenommen, ein unpolarisierter Neutronenstrom der Intensität I_o falle auf eine Platte aus polykristallinem Eisen von der Dicke d und der Atomdichte $n^{\square}$. Wenn nun die Platte nicht magnetisiert ist, so ist die Transmission gleich

$$\frac{I}{I_o} = e^{-\sigma_o n^{\square} d} . \qquad (19.62)$$

Wenn die Platte bis zur Sättigung magnetisiert ist, ergeben sich zwei verschiedene Transmissionen, da ja zwei verschiedene Wirkungsquerschnitte, $(\sigma_o + \sigma_{pol})$ und $(\sigma_o - \sigma_{pol})$, auftreten, je nach Orientierung des Neutronenspins. Man kann nun je eine Hälfte der einfallenden Intensität I_o den Neutronen mit Spin "up", bzw. "down", zuteilen. Die durchgelassene Intensität der Neutronen mit Spin "up" sei I_+, und jene der Neutronen mit Spin "down" sei I_-. Dann gilt

$$\frac{I_+}{I_o} = \frac{1}{2} e^{-(\sigma_o + \sigma_{pol}) n^{\square} d} , \qquad (19.63)$$

$$\frac{I_-}{I_o} = \frac{1}{2} e^{-(\sigma_o - \sigma_{pol}) n^{\square} d} \qquad (19.64)$$

und

$$(I_+ + I_-) > I . \qquad (19.65)$$

Definiert man für eine magnetisch gesättigte Probe den EINFACHTRANSMISSIONSKOEFFIZIENTEN (SINGLE TRANSMISSION EFFECT), η_1 , als den relativen Zuwachs der Durchlässigkeit, verur-

sacht durch die Magnetisierung der Probe,

$$\eta_1 \equiv \frac{\Delta I}{I} \equiv \frac{(I_+ + I_-) - I}{I} , \qquad (19.66)$$

so folgt durch Einsetzen von (19. 62), (19. 63) und (19. 64) in (19. 66)

$$\boxed{\eta_1 = \cosh\left(\sigma_{pol}\, n^{\square} d \right) - 1 .} \qquad (19.67)$$

η_1 ist also immer positiv (ein magnetisiertes Stück Eisen lässt mehr Neutronen durch als ein gleichartiges, nicht magnetisiertes), und für $\sigma_{pol}\, n^{\square} d \ll 1$ wird

$$\eta_1 \cong \frac{1}{2} \left(\sigma_{pol}\, n^{\square} d \right)^2 . \qquad (19.68)$$

Nun liefern die Ausdrücke (19. 63) und (19. 64) den Wert für die POLARISATION, definiert wie in Abschn. 16. 10 als

$$\boxed{P \equiv \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = - \operatorname{tgh}\left(\sigma_{pol}\, n^{\square} d \right) = - \sqrt{1 - \frac{1}{(\eta_1 + 1)^2}} .} \qquad (19.69)$$

Fig. 19. 39 zeigt ein Diagramm von P in Funktion des Einfachtransmissionskoeffizienten η_1 für vollständige, magnetische Sättigung. Messungen des Polarisationsquerschnittes σ_{pol} von Eisen für variable Neutronenenergien ergaben den in Fig. 19. 40 gezeigten Verlauf.

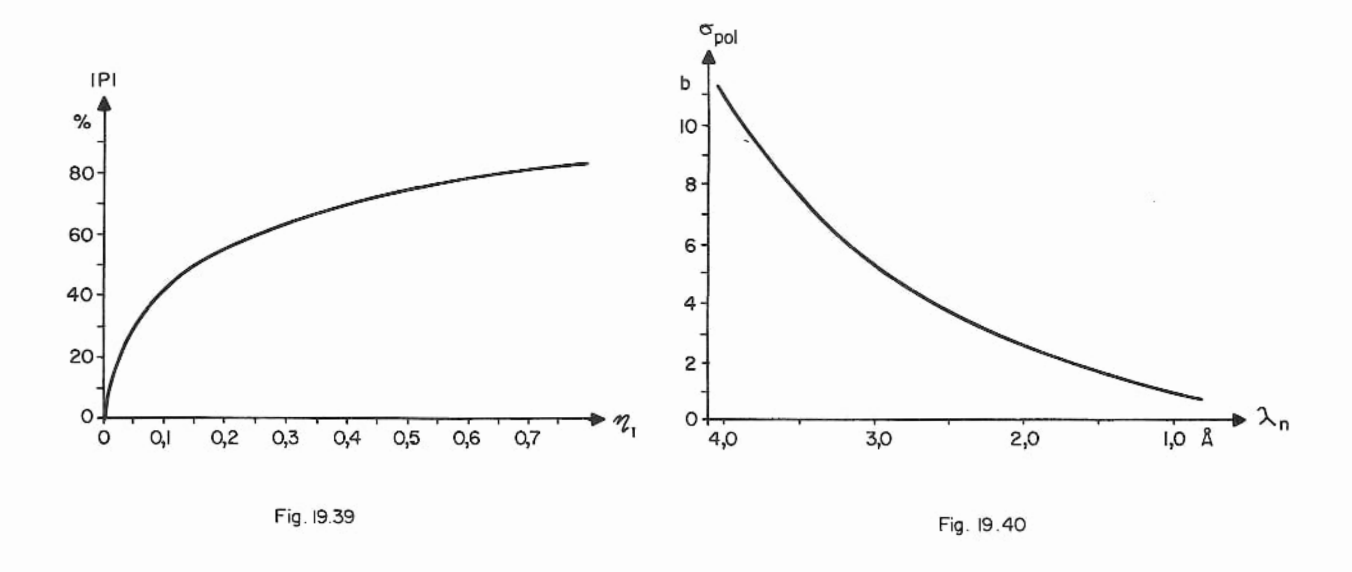


Fig. 19.39

Fig. 19.40

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung des magnetischen Einflusses auf Streuintensitäten ist der Nachweis des Antiferromagnetismus in MnO. In einem antiferromagnetischen Material alternieren die Spins regelmässig über das ganze Gitter, von einem Atom zum nächsten: Das äussere, magnetische Moment ist somit fast Null. Deswegen kann man hier nicht mit den gleichen Methoden arbeiten wie bei der Untersuchung ferromagnetischer Materialien. Immerhin lässt sich davon Gebrauch machen, dass antiferromagnetische Substanzen, gleich wie ferromagnetische, Curie-Temperaturen aufweisen (für MnO liegt sie bei 122° K), oberhalb derer wegen der

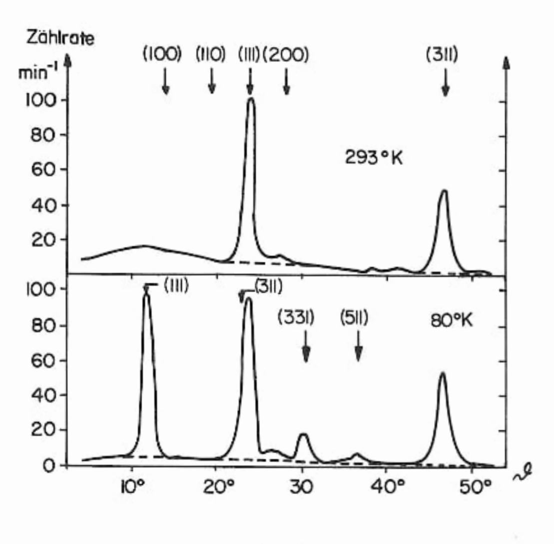


Fig.19.41

thermischen Bewegung der Atome ein rein paramagnetisches Verhalten vorherrscht. Fig. 19.41 zeigt die Neutronen-Beugungsfiguren für MnO über, bzw. unter dessen Curie-Temperatur, d.h. im paramagnetischen, bzw. antiferromagnetischen Zustande. Im letzteren Fall erscheinen besondere Linien, die mit dem Begriff der "magnetischen Einheitszelle" erklärt werden können. Die Kante dieser Zelle ist etwa doppelt so lange wie die der chemischen Zelle, da die magnetische Zelle sich auf Gitter mit Atomen gleicher Spinorientierung bezieht, während die chemische Zelle von den Spinorientierungen nicht abhängt. (Der Abstand zwischen benachbarten "Spin up"-Atomen ist etwa doppelt so gross wie derjenige zwischen zwei angrenzenden Atomen).

20. SPALTUNG UND FUSION

20.1 Der Spaltungsprozess

Bei der Kernspaltung zerbricht der Atomkern in grössere Bruchstücke, wobei häufig beträchtliche Energie frei wird. Der Ausgangskern und die Spaltprodukte besitzen sehr verschiedene Nukleonenzahlen, weshalb die Kernmaterie viel gründlicher verändert wird als etwa bei der Emission leichterer Teilchen. Deshalb verdienen Spaltungsreaktionen, abgesehen von ihrer technischen Bedeutung, auch ein starkes, rein kernphysikalisches Interesse.

Das bekannte Beispiel eines (n, f)-Prozesses (f = FISSION) ist die Spaltung von U^{235} durch langsame Neutronen:

$$U^{235} + n_{th} \longrightarrow (U^{236})^{*} \longrightarrow X + Y. \qquad (20.1)$$

X und Y sind primäre Spaltprodukte ("Spaltfragmente" = "Fission Fragments"), die auch von leichteren Teilchen begleitet sein können, wie beispielsweise bei der Reaktion

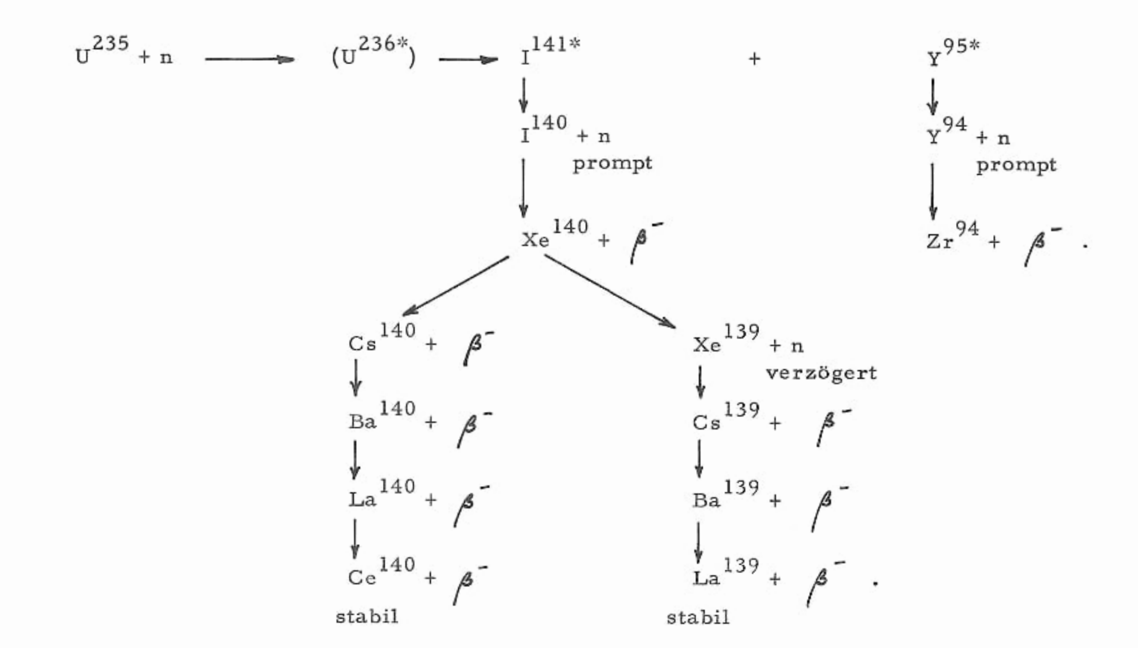
$$U^{235} + n_{th} \longrightarrow (U^{236})^{*} \longrightarrow I^{139*} + Y^{96*} + n. \qquad (20.2)$$

Das emittierte Neutron wird "PROMPTES REAKTIONSNEUTRON" ("PROMPT REACTION NEUTRON") genannt. Die primären Spaltprodukte sind instabil und zerfallen unter Neutronenemission weiter. Die dabei in erster Stufe emittierten Neutronen sind die "PROMPTEN ZERFALLSNEUTRONEN" ("PROMPT DECAY NEUTRONS"):

$$I^{139} \xrightarrow{2{,}7\,s} I^{138} + n \xrightarrow{5{,}9\,s} Xe^{138} + \beta^- \xrightarrow{17\,m} Cs^{138} + \beta^- \xrightarrow{32\,m} Ba^{138} + \beta^- \quad \text{stabil}$$

$$Y^{96} \longrightarrow Y^{95} + n \xrightarrow{10{,}5\,m} Zr^{95} + \beta^- \xrightarrow{63{,}3\,d} Nb^{95} + \beta^- \xrightarrow{35\,d} Mo^{95} + \beta^- \quad \text{stabil}$$

Diese Reaktionsfolge mit "prompten" Neutronen ist nur eine der möglichen beim U^{235}(n, f)-Prozess, jedoch eine der wahrscheinlichsten. Eine Konkurrenzreaktion ist z. B. eine Spaltung unter Beteiligung verzögerter Neutronen:



Die Neutronen, die von den primären Spaltprodukten stammen (~ 2,5 Neutronen pro Spaltung bei U^{235}), werden in diesem Fall zu über 99 % innerhalb 10^{-13} sec nach der Spaltung emittiert. Daher heissen sie "PROMPTE NEUTRONEN". Die restlichen 0,76 % werden erst einige Sekunden später frei und heissen darum "VERZÖGERTE NEUTRONEN". Ein solcher Zerfall mit verzögerten Neutronen besitzt eine grosse praktische Bedeutung für den Betrieb eines Reaktors nahe am kritischen Punkt. Die verzögerten Neutronen verändern nämlich die Neutronendichte im Reaktor verglichen mit den prompten nur langsam, was eine grössere "Zeitkonstante" des Reaktors bedeutet.

Die primären Spaltprodukte sind stets zu neutronenreich und deshalb instabil. Der Neutronenüberschuss erklärt sich so: Die gesamte Coulomb-Energie der Spaltstücke beträgt nur etwa ein Drittel der Coulomb-Energie des Ausgangskerns. Da die Coulomb-Energie proportional $A^{-1/3}$ ist, bedeutet das einen Neutronenüberschuss. (Beim schweren Mutterkern ist der Neutronenüberschuss dagegen für die Stabilität notwendig.) Das ist aus Fig. 1.5 zu sehen, wenn man bedenkt, dass die stabilen Kerne nicht auf der Geraden N = Z liegen sondern oberhalb.

Der statistische Aspekt des Spaltungsprozesses wird für die $U^{235}(n,f)$-Reaktion in Fig. 20.1 veranschaulicht. Die Kurve gibt die Häufigkeit der primären Spaltprodukte als Funktion von deren Massenzahl A. Sie besitzt in der Mitte ein Minimum und verläuft rechts und links davon symmetrisch, denn für jedes Bruchstück kommt das zugehörige, leichte mit der gleichen Häufigkeit vor. Die <u>symmetrische Spaltung</u>, wo beide Spaltstücke etwa A = 118 besitzen, ist ausserordentlich selten: Nur 0,01 % der Spaltungen sind symmetrisch, während die Spaltung (20.2), die als erstes Beispiel besprochen wurde, in 6,6 % der Fälle auftritt.

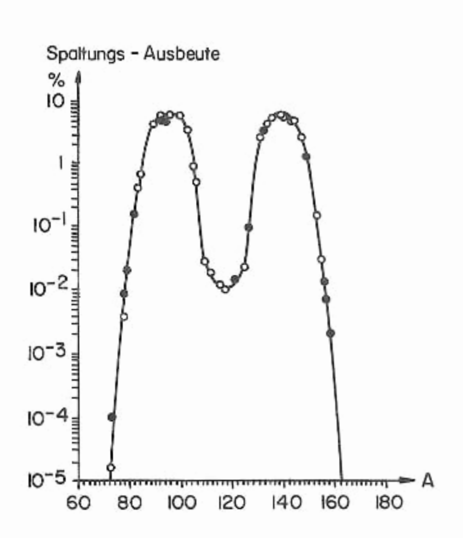


Fig. 20.1

Die Bevorzugung asymmetrischer Spaltung in Bruchstücke mit A ≈ 140 und 96 erhält eine gewisse Begründung durch die magischen Zahlen, da diese Kerne Neutronenzahlen von 82 bzw. 50 in abgeschlossenen Zahlen besitzen. Ausserdem ist ein Einfluss in der Massenabhängigkeit des Gamow-Faktors (vgl. Abschn. 7.8.4) zu suchen. Das wird in Abschn. 20.3 behandelt.

Ein Beispiel für die seltene symmetrische Spaltung findet man bei der $Pu^{239}(n,f)$-Reaktion:

$$Pu^{239} + n_{th} \longrightarrow (Pu^{240*}) \longrightarrow 2\ (Ag^{119} + n)$$

$$\downarrow$$

$$Cd^{119} + \beta^-$$

$$\downarrow$$

$$In^{119} + \beta^-$$

$$\downarrow$$

$$Sn^{119}\ \text{stabil} + \beta^-$$

In Fig. 20.2 sind die Massenverteilungen der Spaltprodukte für die $Pu^{239}(n,f)$- und die $U^{238}(n,f)$-Reaktion dargestellt. Hier sind die Maxima etwa dieselben wie bei der U^{235}-Spaltung, jedoch sind die Minima höher.

Eine Spaltung in drei Bruchstücke von vergleichbarer Grösse, die sogenannte TERNÄRE SPALTUNG (TERNARY FISSION) ist noch seltener als die symmetrische Spaltung. Sie tritt unter 10^6 Spaltungen nur 5 mal auf.

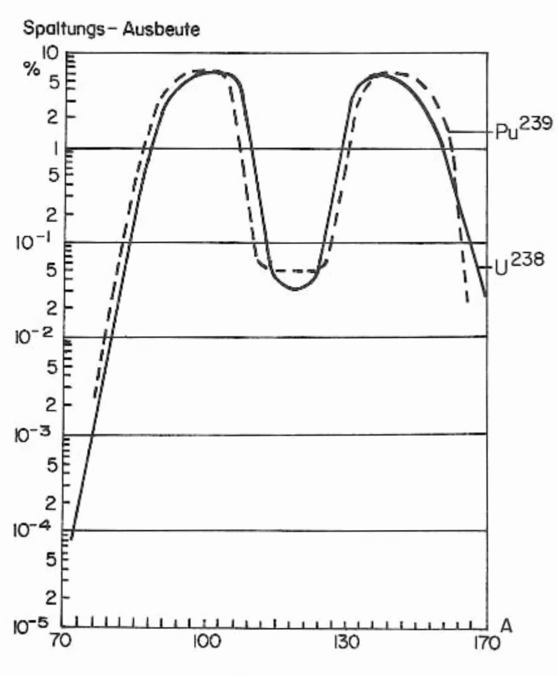


Fig. 20.2

Die Zahlen der im Mittel pro Spaltung emittierten Neutronen sind für die erwähnten Reaktionen:

	2,5 ± 0,1	für thermische Spaltung von	U^{235}
	2,55	für schnelle " "	U^{238}
	2,4 ± 0,2	für spontane " "	"
und	3,0 ± 0,1	für thermische " "	Pu^{239}.

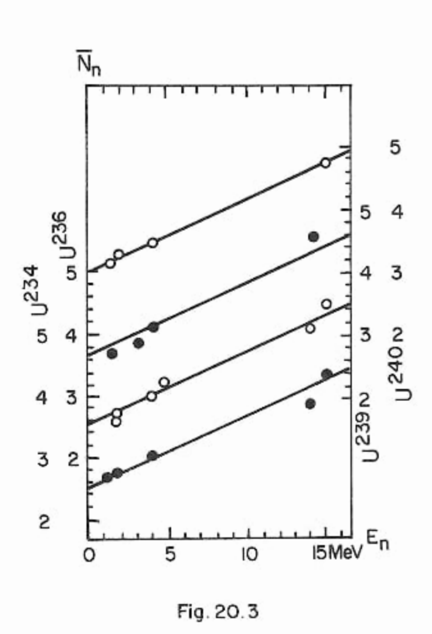


Fig. 20.3

Fig. 20. 3 gibt die mittleren Zahlen der emittierten Neutronen $\overline{N}_n$ pro Spaltung in Abhängigkeit von der Energie E_n der einfallenden. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf die verschiedenen Zwischenkerne. Die Ordinatenteilungen sind entsprechend verschoben worden, um die Darstellung übersichtlicher zu machen. Die Zahl der pro Spaltung emittierten ANTINEUTRINOS ist 6, 1 $\overline{\nu}$/Spaltung.

20. 2 Spontane und schnelle Spaltung

Die ausgesprochenen Maxima und Minima in der Massenverteilung der Spaltprodukte bei Spaltung mit niederenergetischen Geschossen verschwinden allmählich, wenn die Anregungsenergie des zu spaltenden Kerns wächst. Z. B. verläuft die Verteilungskurve für die Spaltung von Th^{232} durch α -Teilchen von 37 MeV wie in Fig. 20. 4. Die Schwelle für diese Reaktion, d. h. die notwendige Mindestenergie der α -Geschosse, liegt bei 23 MeV. Der im ersten Schritt nach $Th^{232} + \alpha \rightarrow (U^{236*})$ gebildete, angeregte Urankern besitzt also, wenn mit 37 MeV- α -Teilchen gespalten wird, eine Anregungsenergie von 14 MeV, während die Anregungsenergie des gleichen Kerns, wenn er durch die U^{235}(n, f)-Reaktion gebildet wird, demgegenüber vernachlässigbar klein ist. Die Maxima in der obigen Kurve sind nur noch doppelt so hoch wie die Minima, während das Verhältnis bei der U^{235}(n, f)-Reaktion 600 : 1 ist.

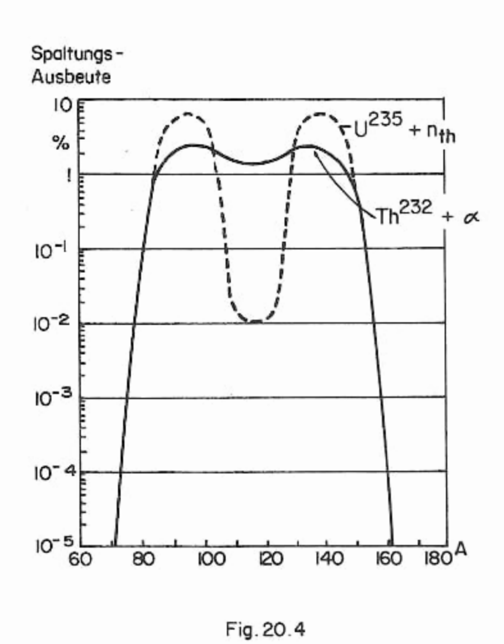


Fig. 20.4

Bei Spaltung mit sehr hoher Energie, z. B. beim Beschuss von Bi^{209} mit 400 MeV- α -Teilchen, verschwindet das Minimum praktisch vollständig,und die symmetrische Spaltung herrscht vor.

Solche Spaltungen durch schnelle geladene Teilchen oder schnelle Neutronen wie in diesen Beispielen heissen SCHNELLE SPALTUNGEN. Schnelle Spaltungen sind auch mit anderen geladenen Teilchen als α -Teilchen, z. B. 7-MeV-Protonen, möglich, doch sind diese Reaktionen

bisher weniger genau untersucht worden als die Spaltungen mit Neutronen. Auch über die Zeitdauer von Spaltreaktionen ist wenig bekannt. Beim Beschuss von U^{238} mit schnellen Neutronen treten Spaltungen innerhalb $5 \cdot 10^{-13}$ sec ein (Nature 1939, 143, 597; neuere Daten scheinen nicht veröffentlicht worden zu sein - siehe aber PR 1947, 72, 98). Manchmal spalten sich schwere Kerne spontan ohne Beschuss durch andere Teilchen (SPONTANE SPALTUNG). Ein solcher Vorgang ist im allgemeinen sehr selten, wie die Werte der Spaltungshalbwertszeiten $T_{1/2}$ zeigen. Tab. 20. 1 gibt $T_{1/2}$ für Kerne mit ungeradem A, Fig. 20. 5 eine graphische Darstellung für gg-Kerne.

Tab. 20. 1

Kern	$T_{1/2}$
Pa^{231}	$\geq 1 \cdot 10^{16}$ y
U^{233}	$\geq 3 \cdot 10^{17}$ y
U^{235}	$2 \cdot 10^{17}$ y
Np^{237}	$\geq 4 \cdot 10^{16}$ y
Pu^{239}	$5{,}5 \cdot 10^{15}$ y
Am^{241}	$\geq 1{,}4 \cdot 10^{13}$ y
Bk^{249}	$6 \cdot 10^{8}$ y
Cf^{249}	$1{,}5 \cdot 10^{9}$ y
E^{253}	$\geq 7 \cdot 10^{5}$ y
Fm^{255}	20 y

Obwohl die Spaltungshalbwertszeiten mit wachsender Ordnungszahl Z abnehmen, ist die spontane Spaltung für die Instabilität schwerer Kerne nicht allein verantwortlich; sie zerfallen auch spontan durch andere Kanäle, besonders durch α-Zerfall. Das Element mit dem bis heute grössten Z, Nobelium, ist ein Beispiel dafür: No^{253} ($T_{1/2} \sim 10$ m) und No^{254} (3 sec) zerfallen hauptsächlich durch α-Zerfall. Der Aufbau von Elementen mit noch höherem Z stösst auf wachsende, experimentelle Schwierigkeiten.

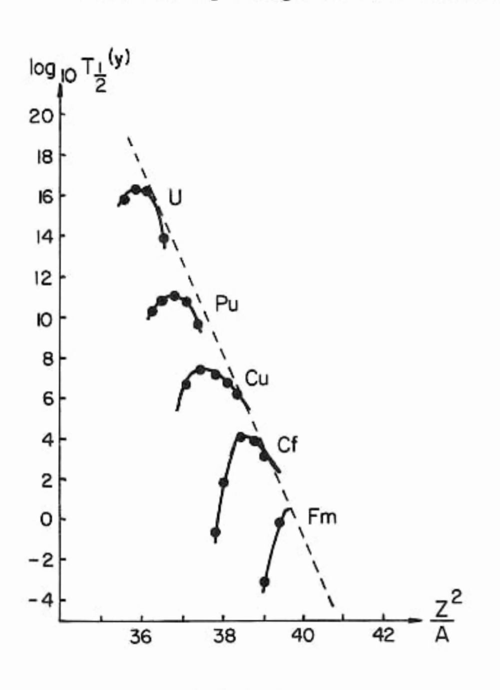


Fig. 20.5

20.3 Durchdringung der Spaltungsbarriere

Die wesentlichen Züge der Fig. 20.5 können zumindest halbquantitativ durch die Betrachtung von Potentialbarrieren verstanden werden, ähnlich wie beim α-Zerfall. Das Potential beschreibt hier die Änderung der Kernkraft zwischen den Spaltstücken, die man sich als im voraus im Kern vorhanden darstellt. Die genaue Gestalt der Barriere ist bis heute unbekannt. Rechnet man mit einer parabolischen Barriere der Breite b, so ergibt sich eine Durchdringbarkeit proportional

$$\exp\left(-\frac{b}{2}\frac{\pi}{\hbar}\sqrt{2ME}\right), \qquad (20.3)$$

wo M die reduzierte Masse der beiden Bruchstücke und E der Energieunterschied zwischen der Barrierenspitze und der Energie des Ausgangssystems aus beiden Bruchstücken ist. Diese Differenz heisst SPALTUNGS-SCHWELLE (FISSION THRESHOLD) und ist 5,7 MeV für die $U^{235}(n,f)$-Reaktion, 5,8 MeV für die $U^{238}(\gamma,f)$- und 5,4 MeV für die $Pu(\gamma,f)$-Reaktion.

Die beobachtete Abnahme der Halbwertszeit mit wachsender Ordnungszahl Z erklärt sich in diesem Modell für Kerne mit grossem Z aus der Zunahme der Coulomb-Abstossung im Vergleich zur anziehenden, kurzreichweitigen Kernkraft. Dieser Effekt steckt im Faktor $\sqrt{b^2 ME}$ im Exponenten des Ausdrucks (20.3). Beispielsweise ist die Spaltungs-Halbwertszeit von Cm^{240} um den Faktor 10^{10} kleiner als die von U^{238}. Das bedeutet, dass b^2E für Cm^{240} das 0,6-fache des Wertes für U^{238} ist. Über die Werte der einzelnen Faktoren kann jedoch nichts gesagt werden, da b unbekannt ist und die Schwellenenergie E für Cm^{240} wegen dessen hoher, spontaner Zerfallsrate nicht bestimmt werden kann.

Die Gerade in Fig. 20.5 gibt die mittlere Abnahme von log $T_{1/2}$ mit $\frac{Z^2}{A}$ an. Sie ergibt sich aus der halbempirischen Formel

$$b\sqrt{AE} = 60\left(46 - \frac{Z^2}{A}\right), \qquad (20.4)$$

wo E die Spaltungsschwelle in MeV und b die Barrierenbreite in 10^{-13} cm ist. Als Abszisse wurde $\frac{Z^2}{A}$ gewählt an Stelle von Z, weil diese Grösse für das Flüssigkeitströpfchenmodell von Bedeutung ist (siehe Abschn. 20.6). In Fig. 20.6 sind theoretische Werte für die Schwellenenergie bei Spaltungen von Kernen in der Gegend des Urans dargestellt, wie sie sich aus dem Flüssigkeitströpfchenmodell unter Vernachlässigung von Quanteneffekten herleiten.

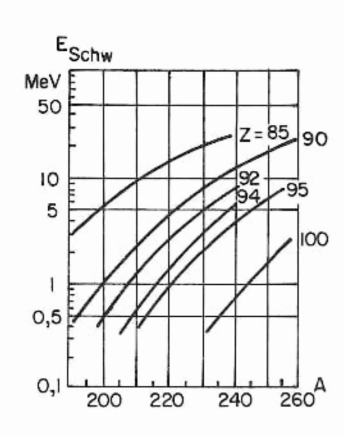


Fig. 20.6

Massgebend für das Eintreten der Spaltung ist die Form der Potentialbarriere, die jetzt quantitativ diskutiert werden soll. Der Einfachheit halber möge eine symmetrische Spaltung betrachtet werden. Die totale Spaltungsenergie, die auf die Bruchstücke verteilt wird, ist in diesem Fall

$$E_f = \left[M(A,Z) - 2M\left(\frac{A}{2},\frac{Z}{2}\right)\right]c^2. \qquad (20.5)$$

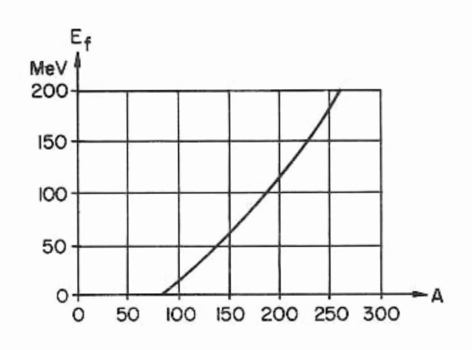


Fig. 20.7

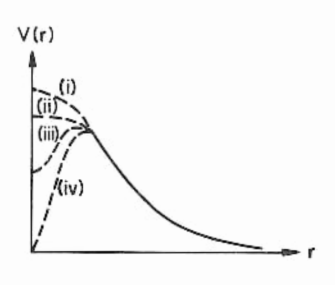


Fig. 20.8

Der Wert, den man mit der halbempirischen Massenformel aus Abschn. 1. 6. 7 (a) für U^{238} erhält, ist 170 MeV; für andere Elemente sind die Spaltungsenergien in Fig. 20. 7 enthalten. Aus dieser Figur würde man erwarten, dass die symmetrische Spaltung für alle Kerne mit A $\gtrsim$ 90 exotherm wäre und also spontan auftreten sollte. In Wirklichkeit scheint die Grenze für spontane Spaltung aber oberhalb A $\sim$ 250 zu liegen. Dieser Widerspruch wird durch die genauere Form der Potentialbarriere hervorgerufen. Für grösseren Abstand der Spaltstücke bis herab zur Grösse des Kollisionsdurchmessers liegt im wesentlichen ein Coulomb-Potential vor, für kleineren Abstand kann die Form verschieden sein (Fig. 20. 8). In diesem Gebiet "fliessen" die Teilchen wie bei der Bildung des Originalkernes ineinander.

Man kann Potentialkurven der folgenden Typen betrachten:

Typ (i) : Im Falle eines solchen Verlaufes wäre die Spaltung spontan, der Kern wäre instabil und käme in der Natur nicht vor (A $>$ 250).

Typ (ii) : Diese Barriere stellt die Schwelle für die spontane Spaltung dar (A $\approx$ 250).

Typ (iii) : Damit überhaupt Spaltung stattfinden kann, ist eine Aktivierungsenergie nötig, um den Potentialberg zu überwinden. Die Höhe des Buckels ist

$$\Delta E \equiv E - E_f \, . \qquad (20.6)$$

Hier ist E die Schwellenenergie (die Spitze der Barriere) und E_f die Spaltungsenergie. Letztere ist in Fig. 20. 7 dargestellt (Achsenabschnitt auf der V(r)-Achse in Fig. 20. 8). Wenn ΔE klein ist und die Barriere schmal, kann noch spontane Spaltung durch Tunneleffekt stattfinden; z. B. entspricht die Spaltungshalbwertszeit $T_{1/2}$ = 2 . 10^{17} Jahre von U^{235} dem Auftreten von einer spontanen Spaltung pro Stunde und Gramm reinen U^{235}. Was die induzierte (durch Beschuss ausgelöste) Spaltung von U^{235} betrifft, so ist der Potentialberg für den Zwischenkern schmal (Δ E = 6,8 MeV) und gerade gleich der Bindungsenergie eines Neutrons im Grundzustand von U^{236}, denn

$$\left(M_{U^{235}} + M_n \right) - M_{U^{236}} = 7{,}26 \cdot 10^{-3} \text{ A.M.E.} \mathrel{\hat{=}} 6{,}8 \text{ MeV} . \qquad (20.7)$$

Deshalb brauchen die einfallenden Neutronen praktisch keine kinetische Energie mitzubringen; schon thermische Neutronen bewirken die Spaltung von U^{235}.

Die Aktivierungsenergie von U^{239} andererseits beträgt $\Delta E = 7,1$ MeV, während die Bindungsenergie eines Neutrons im U^{239} (d. h. die Anregungsenergie von U^{239*}) nur 5,3 MeV beträgt. Deshalb lässt sich die $U^{238}(n,f)$-Reaktion nur mit schnellen Neutronen der mindesten Energie $E_n = 7,1 - 5,3 = 1,8$ MeV erreichen.

Bei mittelschweren Kernen ist $E_f \ll E$, weshalb nicht nur spontane Spaltung ausgeschlossen ist, sondern auch induzierte Spaltung nur mit sehr energiereichen Geschossen eintritt.

Typ (iv) : Diese Kurve gilt für A $\approx$ 90. Sie geht durch den Nullpunkt, weil die resultierende Spaltungsenergie E_f in diesem Fall null ist. Es liegt der Grenzfall einer möglichen, induzierten Spaltung vor.

20.4 Wirkungsquerschnitte der Spaltung

Beim Zerfall eines zur Spaltung befähigten Zwischenkerns treten neben der Spaltung andere Konkurrenzprozesse auf. Z. B. kann ein aus U^{235} durch Einfall eines thermischen Neutrons entstandener U^{236}-Kern das Neutron wieder emittieren (Compound-elastische Streuung), oder der angeregte Kern kann unter γ-Emission in den Grundzustand übergehen. Die Wirkungsquerschnitte für Uran und Plutonium sind für diese Prozesse in Tab. 20.2 enthalten.

Tab. 20.2

Wirkungsquerschnitte	U^{235}	U^{238}	Natürliches U	Pu^{239}
Langsame Spaltung: $\sigma(n_{th},f)$	549 b	0 b	3,9 b	664 b
Neutroneneinfang: $\sigma(n,\gamma)$	101	2,8	3,5	361
Streuung: $\sigma(n,n)$	8,2	8,2	8,2	-

Für thermische Neutronen ist der totale Wirkungsquerschnitt in U^{235} $\sigma_{tot} = 696$ b und der totale Absorptionsquerschnitt $\sigma_a = 687$ b. Da $\frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a} = 0,8$ ist, besteht eine Wahrscheinlichkeit von 80 % für die Spaltung, verglichen mit 15 % für den γ-Übergang, wegen $\frac{\sigma(n,\gamma)}{\sigma_a} = 0,147$.

Der Wirkungsquerschnitt für die Spaltung von U^{235} mit thermischen Neutronen ist sehr viel grösser als der für schnelle Neutronen :

$$\frac{\sigma(n_{th},f)}{\sigma(n_{schnell},f)} = \frac{549}{\sim 1,4} \cong 390 . \qquad (20.8)$$

Aus diesem Grunde muss man in Kernreaktoren Moderatoren benützen.

Für natürliches Uran ist der Wirkungsquerschnitt klein (vgl. Tab. 20.2), da darin das spaltbare U^{235} nur mit einer relativen Häufigkeit von 0,72 % vorkommt.

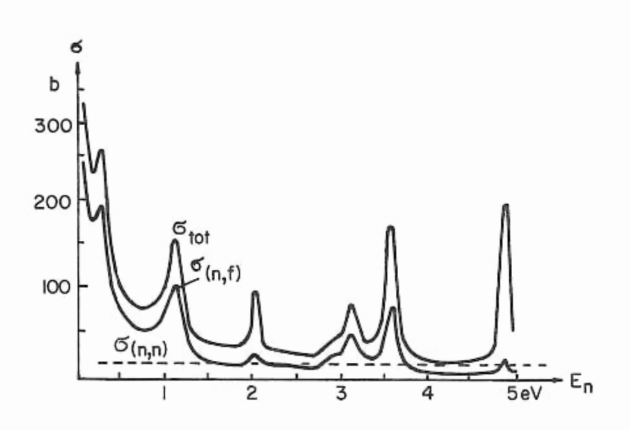


Fig. 20.9

Fig. 20.9 zeigt den Verlauf des Wirkungsquerschnittes bei U^{235} für eine Reihe von Neutronenenergien der Grössenordnung eV, verglichen mit dem zugehörigen, totalen Absorptionsquerschnitt und dem Streuquerschnitt.

Zum Vergleich sind die Wirkungsquerschnitte für die Spaltung einiger anderer Kerne durch thermische Neutronen in Tab. 20.3 zusammengestellt.

Tab. 20.3

Kern	$\sigma(n_{th}, f)$	$\frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a}$
U^{233}	530 b	0,90
Np^{237}	0,019 b	10^{-4}
Pu^{238}	18,4 b	0,03
Am^{241}	3,13 b	$4 \cdot 10^{-3}$
Am^{242}	6400 b	0,75
Am^{243}	< 0,072 b	$< 5 \cdot 10^{-4}$
Am^{245}	1880 b	0,9

20.5 Energieverhältnisse bei Kernspaltung

20.5.1 Abschätzung aus den Bindungsenergien

Durch Betrachtung der Bindungsenergien ergibt sich eine rohe Abschätzung der Energieausbeute bei der Spaltung. Aus Fig. 1.2 ersieht man, dass die Kerne in der Gegend von A = 240 eine mittlere Bindungsenergie pro Nukleon von 7,6 MeV, während Kerne bei A = 120 eine solche von 8,5 MeV besitzen. Nimmt man der Einfachheit halber symmetrische Spaltung an und vernachlässigt man die Neutronenemission, so ist der gesamte Energieüberschuss pro Spaltung ungefähr:

$$E_f \approx 2 \cdot (120 \cdot 8{,}5) - (240 \cdot 7{,}6) \approx 220 \text{ MeV}, \qquad (20.9)$$

wovon etwa 85 % als kinetische Energie der Spaltstücke erscheinen. Diese Energie von etwa 200 MeV stellt 0,09 % der Ruheenergie des Kerns dar, der gespalten wird, d.h. ungefähr 0,1 % der Masse wird in Spaltungsenergie verwandelt.

20.5.2 Abschätzung aus dem Q-Wert

Die Energietönung bei der Spaltung kann aus den Massen der Anfangs- und Endprodukte für jede gegebene Reaktion leicht abgeschätzt werden. Als Beispiel sei die Spaltung (20.2) betrachtet:

$$U^{235} + n \longrightarrow (U^{236*}) \longrightarrow I^{139*} + Y^{96} + n$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(Ba^{138} + n + 3\beta^-) + (Mo^{95} + n + 3\beta^-) + n$$

Die Gesamtmasse im Anfangszustand ist	=	236,1265 AME
und die Gesamtmasse im Endzustand ist	=	235,9144 AME .
Also beträgt die Massendifferenz	=	0,2121 AME
	$\hat{=}$	197 MeV . (20.10)

20.5.3 Leistung bei Kernspaltungs-Prozessen

Die Grösse des Energieüberschusses bei Spaltung ergibt sich durch folgende Überlegungen:

Energieüberschuss aus der Spaltung von 1 U-Kern	≈	200 MeV = $3,2 \cdot 10^{-4}$ erg
" " " " " 1 g-mol U	=	$(3,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (6,02 \cdot 10^{23})$
	=	$1,92 \cdot 10^{20}$ erg
" " " " " 1 kg U	=	$8,14 \cdot 10^{20}$ erg
	=	$1,94 \cdot 10^{10}$ Kcal
		20 000 t TNT .

Da $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ erg} = 1,6 \cdot 10^{-13}$ W.sec

ist, ergibt sich die bei der Spaltung frei werdende Energie zu:

Energie aus der Spaltung von 1 U-Kern	=	$3,2 \cdot 10^{-11}$ Ws
" " " " " 1 g-mol U	=	$1,92 \cdot 10^{13}$ Ws
" " " " " 1 g U	=	$8,14 \cdot 10^{10}$ Ws
	=	$2,26 \cdot 10^{4}$ kWh
	=	fast 1 MW-Tag.

Die Spaltung aller Atome von 1 g U^{235} in einem Tag ergibt die Leistung von 1 MW; 1 kg ergibt 1000 MW!

Ähnliche Werte findet man für die Spaltung von U^{233} und Pu^{239}.

20.5.4 Verteilung der Energie auf die Spaltprodukte

Bei einer typischen Spaltung durch langsame Neutronen verteilt sich die Energie auf die Reaktionsprodukte etwa wie folgt:

Kinetische Energie der Spaltprodukte		= 167 MeV
" "	der prompten Zerfallsneutronen	= 5 "
" "	der prompten γ -Quanten	= 5 "
" "	der verzögerten γ -Quanten	= 5 "
" "	der β^- -Teilchen	= 5 "
" "	der Antineutrinos $\bar{\nu}$	= 11 "
Gesamte kinetische Energie		= 198 MeV (20.11)

Für eine einfache, binäre Spaltung hat man die Energieverteilung messen können. Dazu wurde ein intensiver Fluss von thermischen Neutronen benötigt und ausserdem eine besondere Ionisationskammer verwendet, die in Fig. 20.10 dargestellt ist. Das Target befindet sich auf der gemeinsamen Kathode. Die Koinzidenzimpulse, die die beiden Kammerhälften liefern, werden, sofern sie innerhalb eines bestimmten Energieintervalls, etwa der Grösse 5 MeV, liegen, gezählt, und durch einen Mehrkanalanalysator wird ihre Energieverteilung gemessen. Durch Verschieben des "Tores" (also des untersuchten Energieintervalls) in Schritten von 5 MeV kann schliesslich die gesamte Energieverteilung bestimmt werden. Die Resultate für die Spaltung von U^{233}, U^{235} und Pu^{239} mit langsamen Neutronen sind in Fig. 20.11, 20.12 und 20.13 wiedergegeben.

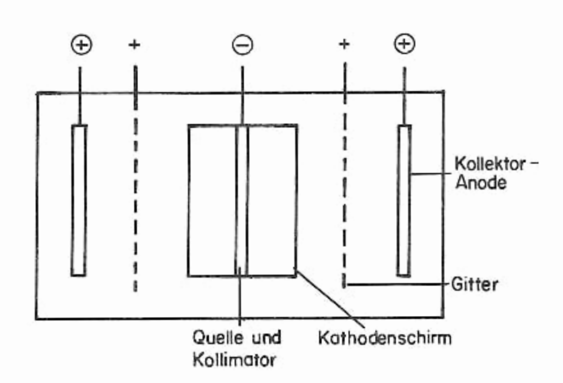


Fig. 20.10

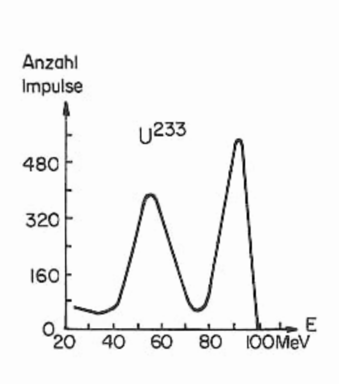


Fig. 20.11

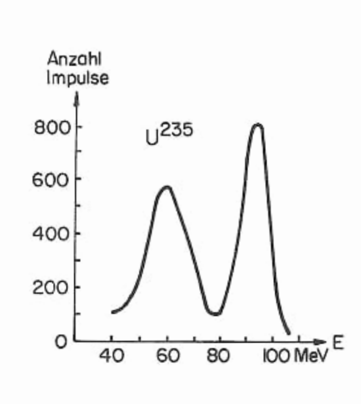


Fig. 20.12

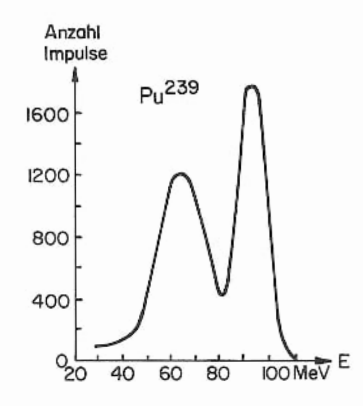


Fig. 20.13

Nimmt man an, dass der Ausgangskern vor der Spaltung ruht, so ergibt sich aus dem Impulssatz für die nichtrelativistischen Spaltstücke bei Vernachlässigung der emittierten Neutronen die Energieaufteilung zu

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{\frac{1}{2m_1} (m_1 v_1)^2}{\frac{1}{2m_2} (m_2 v_2)^2} = \frac{m_2}{m_1} . \qquad (20.12)$$

Die Energien verhalten sich also umgekehrt wie die Massen. Die charakteristischen Grössen der Energieverteilungen sind für die drei Kerne in Tab. 20.4 einander gegenübergestellt.

Tab. 20.4

	U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
Wahrscheinlichste Energie für das leichte Spaltprodukt	93,0 MeV	94,5 MeV	94,6 MeV
Wahrscheinlichste Energie für das schwere Spaltprodukt	56,6 "	60,2 "	65,2 "
Verhältnis der wahrscheinlichsten Energien	1,64	1,57	1,45
Γ des Maximums bei hoher Energie	7 MeV	6 MeV	7 MeV
Γ des Maximums bei niedriger Energie	11 "	10 "	12 "
Massenverhältnis für die wahrscheinlichste Totalenergie	1,26	1,23	1,20

Bei den geschilderten Ionisationsmessungen variiert für U^{235} der Wert der totalen kinetischen Energie der Spaltstücke von 162 MeV für ein Massenverhältnis von 1,2 bis 137 MeV für ein Massenverhältnis von 2,2. Der Wert für die wahrscheinlichste Art der U^{235}-Spaltung (20.2) beträgt 156 MeV.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Spaltstücke ist durch Messungen der Flugzeit ebenfalls in Zweifachkoinzidenz untersucht worden. Dabei werden zwei Szintillationszähler so aufgestellt, dass der eine von zwei entstehenden Kernen nur etwa 1 cm bis zum ersten Zähler fliegt, der andere jedoch eine 350 cm lange evakuierte Röhre durchqueren muss, bevor er in den zweiten Zähler gelangt. Die beiden Zählerimpulse werden auf einen Oszillographen gegeben. Aus ihrer zeitlichen Lage kann die Geschwindigkeit berechnet werden.

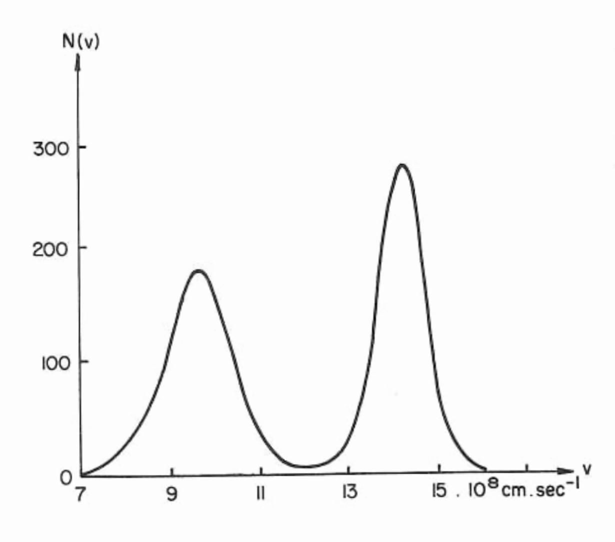


Fig. 20.14

Fig. 20.14 zeigt die sich ergebende Geschwindigkeitsverteilung. Die zugehörigen Energien liegen höher als die durch Ionisationsmessungen erhaltenen: der Energiemittelwert beträgt für die U^{235}-Spaltung 167 MeV (gegenüber 165 MeV bei Ionisationsmessungen).

Die Energien der prompten Neutronen liegen zwischen 0,05 MeV und etwa 17 MeV: Für U^{235} gilt für die Energieverteilung zwischen 0,075 MeV und 17 MeV die empirische Formel

$$N(E_n) \sim e^{-E_n} \sinh \sqrt{2E_n}\,, \qquad (20.13)$$

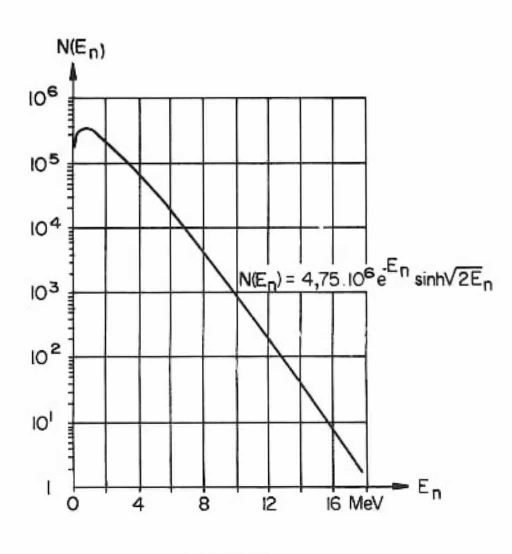


Fig. 20.15

wo $N(E_n)$ die Zahl der Neutronen pro Energie-intervall ist. Das Neutronen-Spektrum von 0,4 bis 17 MeV ist in Fig. 20.15 dargestellt. In diesem Bereich gilt

$$N(E_n) = 4{,}75 \cdot 10^6\, e^{-E_n} \sinh \sqrt{2E_n}\,. \qquad (20.14)$$

Der Mittelwert der Neutronenenergie bei der U^{235}-Spaltung ist 2,0 ± 0,1 MeV.

20.5.5 Mittlere Ausbeute der kinetischen Energie bei Spaltung

Einen Überblick über die Werte der mittleren, totalen, kinetischen Energie, die sich bei der Spaltung auf die Spaltprodukte verteilt, gibt für verschiedene Kerne Tab. 20.5, die von Halpern (Ann. Rev. Nucl. Sci. 1959, 9, 245) stammt:

Tab. 20.5

Zwischenkern	Spaltungsart	Methode	$\overline{E_f}$ (MeV)
Bi^{210}	90-MeV-n	Ion.-Kammer	142
Th^{230}	n_{th}	" "	162
Th^{233}	45-MeV-n	" "	168
U^{234}	n_{th}	" "	163
	"	Flugzeit	163
U^{236}	"	"	165
	"	Flugzeit und Ion.-Kammer	167
	"	Ion.-Kammer	165
	"	Kalorimetrie	167
U^{239}	45-MeV-n	Ion.-Kammer	158
	90-MeV-n	" "	160
Pu^{240}	n_{th}	Flugzeit	172
	spontan	Ion.-Kammer	172
Pu^{242}	"	" "	174
Cm^{244}	"	" "	185
Cf^{252}	"	" "	185
Fm^{254}	"	" "	176

20. 6 Anwendung des Flüssigkeitströpfchen-Modells auf die Spaltung

Die halbempirische Massenformel (1. 35),

$$M(Z,A) = Z.M_H + (A-Z)M_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta \qquad (20.15)$$

wurde in Abschn. 1. 6. 7 (a) auf den Fall der symmetrischen Spaltung angewendet. Für die Zerfallsenergie ergab sich (1. 38), unter Vernachlässigung der Asymmetrie- und der Paarungsenergie δ,

$$Q = a_s A^{2/3}(1 - 2^{1/3}) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) = -0,260\, a_s A^{2/3} + 0,370\, a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} . \qquad (20.16)$$

Die Coulomb-Energie der beiden binären Bruchstücke beträgt im Augenblick der Berührung,

$$\left[r = 2R = 2R_o \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} \right],$$

$$E_c = \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 e^2}{2R_o \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} = 0,262\, a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} . \qquad (20.17)$$

Dabei ist

$$a_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_o} \qquad (20.18)$$

eingesetzt und angenommen worden, dass die beiden Spaltstücke kugelförmig sind und keine Kernkräfte aufeinander ausüben. Nähern sich die Spaltstücke noch mehr als in dieser Grenzlage, so verschmelzen sie und bilden den Zwischenkern. Umgekehrt wird der Zwischenkern sicher unstabil, wenn seine Energie grösser ist als die Coulomb-Energie. Es tritt also Spaltung ein, falls gilt

$$Q \geq E_c , \qquad (20.19)$$

also, wenn

$$-0,260\, a_s A^{2/3} + 0,370\, a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \geq 0,262\, a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} , \qquad (20.20)$$

und somit

$$\boxed{\frac{Z^2}{A} \geq 2,4 \frac{a_s}{a_c} = 53} \qquad (20.21)$$

ist. Da der Tunneleffekt vernachlässigt wurde, ist dieser Wert eine obere Grenze für den SPALTUNGSPARAMETER $\frac{Z^2}{A}$ bei symmetrischer Spaltung.

Die Stabilität eines Kerns bezüglich spontaner Spaltung kann mit Hilfe des folgenden Modells abgeschätzt werden: Man denkt sich den Kern wie einen inkompressiblen Flüssigkeitstropfen unter der Wirkung kurzreichweitiger, anziehender Kräfte (analog der Oberflächenspannung) und langreichweitiger, abstossender Coulomb-Kräfte. Man betrachtet dann die Stabilität bei Schwingungen (Fig. 20. 16). Solche Schwingungen sind instabil und der Tropfen teilt sich, wenn eine Abweichung der Form von der Kugelgestalt die totale Bindungsenergie der Teilchen im Tropfen erhöht. Bei einem inkompressiblen Tropfen ist das Kugel-

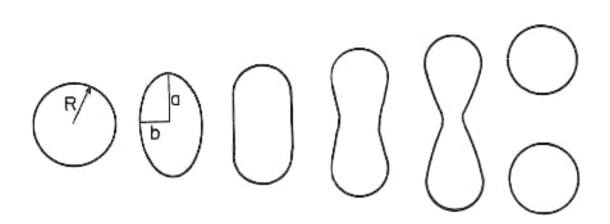


Fig. 20.16

volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ gleich dem Volumen $\frac{4}{3}\pi ab^2$ eines Rotationsellipsoids

mit einer grossen Halbachse $a = R(1+\varepsilon)$ (20.22)

und einer kleinen Halbachse $b = \frac{R}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, (20.23)

wenn ε die Exzentrizität ist.

Ist die Oberflächenspannung η , so ergibt sich für die Oberflächenenergie des Ellipsoids :

$$E_\eta = \eta \cdot 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) = a_s A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) \qquad (20.24)$$

und für seine elektrostatische Energie :

$$E_c' = \frac{3}{5}\cdot\frac{(Ze)^2}{R}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right). \qquad (20.25)$$

Sobald die Bindungsenergie der Teilchen im Ellipsoid ,

$$E_B = E_\eta + E_c' , \qquad (20.26)$$

grösser als die der Teilchen in der Kugel wird, verlaufen die Schwingungen etwa wie in Fig. 20.16 angedeutet, und spontane Spaltung tritt auf. Berücksichtigt man in (20.24) und (20.25) nur die Glieder bis ε^2 , so ist die Bedingung für das Auftreten von spontaner Spaltung als primäre Zerfallsart:

$$\Delta E_B \equiv (E_B)_{Kugel} - (E_B)_{Ellipsoid} \geq 0 , \ (\text{exotherm}) \qquad (20.27)$$

d. h.

$$-\frac{2}{5} a_s A^{2/3}\varepsilon^2 + \frac{1}{5} a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}\varepsilon^2 \geq 0 , \qquad (20.28)$$

also

$$\boxed{\frac{Z^2}{A} \geq 2\frac{a_s}{a_c} = 44 .} \qquad (20.29)$$

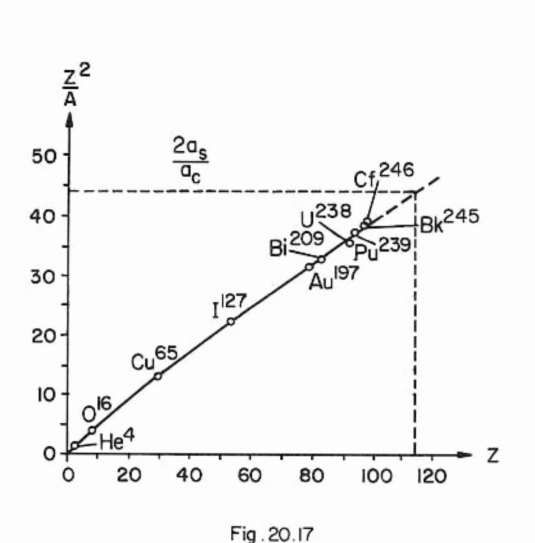


Fig. 20.17

In Fig. 20.17 ist $\frac{Z^2}{A}$ gegen Z aufgetragen. Man sieht, dass nur Elemente mit Z > 115 nach dieser einfachen Theorie zur spontanen Spaltung befähigt wären. In Wirklichkeit führen schon Kerne mit Z > 90 spontane Spaltung aus, allerdings nur mit den langen Halbwertszeiten, die in Abschn. 20.2 aufgeführt sind. Ausserdem überwiegen Konkurrenzprozesse.

Eine andere bemerkenswerte Konsequenz bei Anwendung der halbempirischen Massenformel ist die Tatsache, dass thermische Neutronen zwar Target-Kerne mit ungeradem N (gu bzw. uu), nur schnelle

Neutronen jedoch Kerne mit geradem N (gg bzw. ug) spalten können. Wenn ein Neutron von einem Kern mit ungeradem N absorbiert wird, entsteht ein Zwischenkern mit geradem N. Dieser hat eine höhere Bindungsenergie als sein Isotop mit ungeradem N (der δ -Term ist positiv für gg-Kerne; vgl. Abschn. 1.6.5). Das bedeutet eine höhere Anregungsenergie und damit eine höhere Zerfallswahrscheinlichkeit. In Tab. 20.6 sind die Bindungsenergien verschiedener Uran-Isotope aufgeführt, welche diesen Paarungseffekt klar zeigen.

Tab. 20.6

Targetkern	Zwischenkern	Bindungsenergie
U^{233}	U^{234}(gg)	7,02 MeV
U^{234}	U^{235}(gu)	5,81 "
U^{235}	U^{236}(gg)	6,78 "
U^{236}	U^{237}(gu)	5,59 "
U^{237}	U^{238}(gg)	6,60 "
U^{238}	U^{239}(gu)	5,39 "

Die Differenz der Bindungsenergien zwischen U^{235} und U^{238} ist also

$$\Delta E_B = 6,78 - 5,39 = 1,39 \text{ MeV}.$$

Die zugehörige Differenz der Anregungsenergien ist 1,5 MeV, wie Tab. 20.7 zeigt. Deshalb spaltet sich U^{235} leichter als U^{238}; das induzierende Neutron kann mit weniger kinetischer Energie eine Spaltung erzeugen.

Tab. 20.7

Targetkern	Zwischenkern	Anregungsenergie (MeV)	Aktivierungsenergie (MeV)
Pa^{231}	Pa^{232}(uu)	5,4	5,0
Th^{232}	Th^{233}(gu)	5,1	6,5
U^{233}	U^{234}(gg)	6,6	4,6
U^{235}	U^{236}(gg)	6,4	5,3
Np^{237}	Np^{238}(uu)	5,0	4,2
U^{238}	U^{239}(gu)	4,9	5,5
Pu^{239}	Pu^{240}(gg)	6,4	4,0

Diese allgemeine Regel wird gelegentlich durchbrochen, z. B. haben die Targetkerne U^{230}, U^{232}, Cm^{240} mit gerader Neutronenzahl grosse Spaltungsquerschnitte, nämlich: 25 b, 80 b bzw. etwa 20 000 b. Das Flüssigkeitströpfchen-Modell versagt hier bei der Voraussage der Aktivierungsenergien.

Trotz der Erfolge des Flüssigkeitströpfchen-Modells bei der Beschreibung der Spaltung war es bis heute nicht möglich, mit seiner Hilfe die asymmetrische Spaltung zu erklären. Versuche dazu sind unternommen worden, unter Benützung des Schalen- und des Kollektivmodells, doch sind diese noch keineswegs befriedigend.

20.7 Reaktor-Physik

20.7.1 Der Multiplikationsfaktor

Das Auftreten von durchschnittlich 2,5 Neutronen nach einer Spaltung infolge Absorption eines thermischen Neutrons lässt vermuten, dass die Möglichkeit einer sich selbst erhaltenden KETTENREAKTION (CHAIN REACTION) besteht. Indessen wird ein Teil der emittierten Neutronen in Prozessen eingefangen, die nicht zur Spaltung führen. Diese sind für die Kettenreaktion verloren; hinzu kommen die unvermeidlichen Verluste durch Entweichen von Neutronen aus dem System. Die Bedingung für eine stationäre Kettenreaktion ist, dass pro Spaltung im Mittel ein Neutron entsteht, das eine weitere Spaltung auslöst. Man definiert dazu den MULTIPLIKATIONSFAKTOR oder REPRODUKTIONSFAKTOR als

$$k = \frac{\text{Zahl der in irgendeiner bestimmten Generation emittierten Neutronen}}{\text{Zahl der entsprechenden, in der vorigen Generation emittierten Neutronen}} \; . \qquad (20.30)$$

Wenn $k < 1$ ist, kann eine Kettenreaktion nicht auftreten.

Wenn $k = 1$ ist, ist die Kettenreaktion kontrolliert und stationär.

Wenn $k > 1$ ist, wächst die Kettenreaktion ständig an.

Eine gewünschte Leistung kann in einem Reaktor dadurch erreicht werden, dass man zu Anfang k etwas grösser als 1 macht, die Reaktion bis zur gewünschten Höhe anwachsen lässt und dann k genau auf 1 einreguliert.

Wenn $k > 1$ ist, dann steigt die Neutronenzahl zeitlich exponentiell an. Z. B., wenn $k = 1{,}005$ ist und die Neutronen im Reaktor eine mittlere Lebensdauer vor der Spaltung von 10^{-3} sec besitzen, dann wird die totale Neutronenzahl nach einer Sekunde um den Faktor $\exp\left[\frac{1\,(1{,}005-1)}{10^{-3}}\right]$, d. h. etwa um 150 grösser; nach einer Minute gar um $\exp\left[\frac{60\,(1{,}005-1)}{10^{-3}}\right] = 2{,}7 \cdot 10^{130}$! Das liefert einen Hinweis auf die grosse praktische Nützlichkeit verzögerter Neutronen im Reaktorbetrieb. Sie vermeiden so ein allzu schnelles Anwachsen der Spaltungsrate.

Für die Verdopplung der Neutronenzahl (bei $k = 1{,}005$) sind $g = 145$ Generationen nötig, wie sich aus der Beziehung

$$2 = k^g = 1{,}005^g \qquad (20.31)$$

ergibt.

20.7.2 Das Neutronengleichgewicht bei der Kettenreaktion

Der Wert des Multiplikationsfaktors wird durch den Grad bestimmt, mit dem die Neutronen an den vier wesentlichen Prozessen im Reaktor teilnehmen:

(i) SPALTUNGSEINFANG (FISSION CAPTURE) von langsamen Neutronen in U^{235} oder schnellen in U^{235} und U^{238};

(ii) Einfang ohne Spaltung bei U^{235} und U^{238}, RESONANZEINFANG genannt, weil er hauptsächlich bei charakteristischen Resonanzenergien (vgl. Fig. 20.9) eintritt, die die Neutronen bei ihrer allmählichen Verlangsamung durch den Moderator erreichen;

(iii) Einfang ohne Spaltung durch den Moderator und andere Materialien im Reaktor, als VERGIFTUNG oder PARASITISCHER EINFANG (POISONING, bzw. PARASITIC CAPTURE) bezeichnet;

(iv) ENTWEICHEN VON NEUTRONEN (LEAKAGE) aus dem System.

Ein hypothetisches Neutronengleichgewicht (k = 1), das zu einer stationären Kettenreaktion führen würde, ist im folgenden Beispiel angegeben:

100 langsame Neutronen werden von U^{235} absorbiert und verursachen Spaltung
↓
200 Spaltungsneutronen werden emittiert
├── 40 entweichen während der Bremsung durch den Moderator
├── 20 erleiden bei der Bremsung Resonanzabsorption am U^{238}
↓
140 thermische Neutronen bleiben übrig
├── 10 entweichen als langsame Neutronen
↓
130 thermische Neutronen sind für Absorption vorhanden
├── 30 werden vom Moderator bzw. U^{238} usw. absorbiert
↓
100 langsame Neutronen werden von U^{235} eingefangen und verursachen erneute Spaltung.

20.7.3 Vierfaktor-Gleichung

Den Einfluss der vier Prozesse aus Abschn. 20.7.2 auf den resultierenden Multiplikationsfaktor kann man wie folgt berechnen:

(i) Durch einen einzelnen Spaltungsprozess, etwa eine $U^{235}(n_{th}, f)$-Reaktion, mögen N_n schnelle Neutronen entstehen. Durch schnelle Spaltung an U^{235} und U^{238} vergrössert sich die Zahl der schnellen Neutronen auf εN_n, mit $\varepsilon \geq 1$ (gewöhnlich $\sim 1{,}03$).

(ii) Der Bruchteil ℓ_f dieser Neutronen möge entweichen; es bleiben

$$\varepsilon N_n (1 - \ell_f) \tag{20.32}$$

schnelle Neutronen.

(iii) Ein Bruchteil p von diesen vermeide die Resonanzfallen (Resonance Traps), d. h. Einfangsprozesse wie etwa

$$U^{238}(n, \gamma)\, U^{239} \longrightarrow Np^{239} + \beta^- \longrightarrow Pu^{239} + \beta^- .$$

Dann verbleiben

$$\varepsilon N_n (1 - \ell_f)\, p \tag{20.33}$$

langsame Neutronen.

(iv) Der Bruchteil ℓ_{th} von diesen möge entweichen. Dann bleiben

$$\varepsilon N_n (1 - \ell_f)\, p\, (1 - \ell_{th}) \tag{20.34}$$

langsame Neutronen übrig.

(v) Der Bruchteil f dieser thermischen Neutronen, THERMISCHER VERBRAUCH (THERMAL UTILISATION) genannt, erleide Absorption am U^{235}, der Rest (1 - f) dagegen parasitischen Einfang. Dann ist die Zahl der von U^{235} absorbierten Neutronen gleich

$$\varepsilon N_n (1 - \ell_f)\, p\, (1 - \ell_{th})\, f. \tag{20.35}$$

(vi) Nicht alle absorbierten Neutronen verursachen Spaltung; ein Teil macht eine (n, γ)-Reaktion. Die Zahl der Neutronen, die Spaltung induzieren, ist proportional $\frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a}$.

(vii) Damit ist die Zahl der Neutronen, die einen (n, f)-Prozess in zweiter Generation verursachen, gleich

$$\varepsilon N_n (1 - \ell_f)\, p\, (1 - \ell_{th})\, f \cdot \frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a}\,, \qquad (20.36)$$

und da diese Betrachtung von einer einzelnen Spaltung ausgegangen ist, bedeutet dies den Multiplikationsfaktor

$$\boxed{k = \eta\, \varepsilon\, p\, f\, (1 - \ell_f)(1 - \ell_{th})\,,} \qquad (20.37)$$

worin

$$\eta \equiv N_n \cdot \frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a}\,. \qquad (20.38)$$

Die Parameter in dieser Gleichung können durch Veränderung der Reaktorgrössen reguliert werden. Für einen unendlich grossen Reaktor ist

$$\ell_f = \ell_{th} = 0 \qquad (20.39)$$

und der Multiplikationsfaktor

$$\boxed{k_\infty = \eta\, \varepsilon\, p\, f\,.} \qquad (20.40)$$

Der Ausdruck (20.40) wird als VIERFAKTOR-FORMEL von Fermi bezeichnet.

Die einzelnen Faktoren heissen:

η : reduzierter, schneller Emissionsfaktor (fast emission factor),
ε : schneller Spaltungsfaktor (fast fission factor),
p : Resonanzentweichungswahrscheinlichkeit (resonance escape probability),
f : thermischer Verbrauch (thermal utilisation).

Die Anwendung der Vierfaktor-Formel auf einen hypothetischen Reaktor mit natürlichem (nicht angereichertem) Uran ist ein interessantes Beispiel: Die entsprechenden Werte sind dann:

(i) $$\eta = 2{,}5\, \frac{\sigma(n,f)}{\sigma_a} = 2{,}5\, \frac{4{,}18}{7{,}68} = 1{,}361\,. \qquad (20.41)$$

(ii) $\varepsilon \approx 1$, denn es gibt praktisch keinen Effekt mit U^{238}.

(iii) p hängt von den Konstruktionsverhältnissen des Reaktors ab. Die Werte können experimentell bestimmt werden und sind in Tab. 20.8 für verschiedene Fälle wiedergegeben.

(iv) f hängt vom Verhältnis der Mengen von Uran und Moderator (Graphit) ab. Es gilt

$$f = \frac{N_U (\sigma_a)_U}{N_U (\sigma_a)_U + N_G (\sigma_a)_G}\,, \qquad (20.42)$$

wo N_U = Zahl der U-Atome,

$(\sigma_a)_U$ = thermischer Absorptionskoeffizient für U = 7,68 b ,

N_G = Zahl der Graphitatome ,

$(\sigma_a)_G$ = thermischer Absorptionskoeffizient des Graphits = 0,0045 b ist.

Das ergibt

$$f = \frac{1}{1 + 0{,}000573\, \frac{N_G}{N_U}}\,. \qquad (20.43)$$

Für verschiedene Mischungsverhältnisse Brennstoff/Moderator ist der thermische Verbrauch in Tab. 20. 8 angegeben, ebenso die Multiplikationsfaktoren k_∞ für einen unendlich grossen Reaktor mit natürlichem Uran.

Tab. 20. 8

$\frac{N_G}{N_U}$	p	f	pf	k_∞
100	0,51	0,95	0,48	0,65
200	0,62	0,90	0,56	0,76
300	0,69	0,85	0,587	0,799
400	0,72	0,81	0,583	0,793

Man findet ein Maximum für k_∞ bei $\frac{N_G}{N_U} \approx 300$, jedoch bleibt k_∞ unter dem kritischen Wert 1. Deshalb kann eine Kettenreaktion in einem Reaktor mit unangereichertem Uran als Brennstoff nicht auftreten.

20. 7. 4 Neutronendiffusion : Altersgleichung von Fermi

Die Konstruktion eines Reaktors wird entscheidend beeinflusst durch das Phänomen der Neutronendiffusion. Aus diesem Grund werden hier einige Grundtatsachen der Diffusionstheorie mitgeteilt, um die für das Verständnis des Weiteren notwendigen Begriffe klarzustellen. Eine ausführliche Behandlung findet man bei Glasstone u. Edlung: "Elements of Nuclear Reactor Theory" 1952.

Die Boltzmann-Gleichung für die Diffusion bei Gasen kann direkt auf das Problem der Neutronendiffusion angewendet werden. Die mittlere kinetische Energie eines Neutrons ist $\frac{1}{2}$kT pro Freiheitsgrad, die mittlere Translationsenergie $\frac{3}{2}$ kT. Finden viele Stösse zwischen den Neutronen und Moderatorkernen statt, und ist die mittlere freie Weglänge eine langsam veränderliche Funktion der Neutronenenergie, so lautet die DIFFUSIONSGLEICHUNG

$$\frac{\lambda_{tr} v}{3} \nabla^2 n - \frac{v}{\lambda_a} n + q = \frac{dn}{dt} = 0 \; ; \qquad (20.44)$$

darin ist λ_{tr} die mittlere freie TRANSPORTWEGLÄNGE (TRANSPORT MEAN FREE PATH),

v die Neutronengeschwindigkeit ,

n die Neutronendichte

und q die Erzeugungsrate der Neutronen pro Volumeneinheit.

Diese Gleichung ist die Kontinuitätsrelation: der erste Term beschreibt die Diffusion durch die Wände eines Volumenelements, in dem die Neutronendichte n herrscht, der zweite Term stellt den Verlust durch Absorption in diesem Volumelement dar, der dritte die Erzeugungsrate. Die mittlere freie Transportweglänge wird durch die folgenden Überlegungen eingeführt:

Es sei σ der atomare bzw. Kernwirkungsquerschnitt (für Streuung oder Absorption). Der zugehörige "MAKROSKOPISCHE WIRKUNGSQUERSCHNITT" ist dann

$$\Sigma = n^{\square} \sigma , \qquad (20.45)$$

wo $n^{\square}$ die Atomdichte im Target ist. Σ hat die Dimension cm^{-1} und stellt so eigentlich einen

Absorptionskoeffizienten dar; es gilt nämlich

$$\frac{dn}{n} = - n^{\square} \sigma \, dx = - \Sigma \, dx \, . \qquad (20.46)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$n = n_0 \, e^{-\Sigma x} , \qquad (20.47)$$

und daraus die mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty x \, e^{-\Sigma x} \, dx}{\int_0^\infty e^{-\Sigma x} \, dx} = \frac{1}{\Sigma} \, . \qquad (20.48)$$

Setzt man für Σ die Werte für Absorption bzw. Streuung ein, so ergeben sich die zugehörigen freien Weglängen

$$\lambda_a = \frac{1}{\Sigma_a} \quad \text{und} \quad \lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s} \, . \qquad (20.49)$$

Die Grösse λ_s für die Streuung ist nicht glücklich, da die Streuverteilung im Laborsystem nicht kugelsymmetrisch ist, sondern ein Maximum in der Vorwärtsrichtung besitzt. Aus diesem Grund ist eine grössere freie Weglänge von Wichtigkeit, die sogenannte MITTLERE FREIE TRANSPORT-WEGLÄNGE:

$$\boxed{\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_s \left(1 - \overline{\cos \vartheta_n}\right)}} \, . \qquad (20.50)$$

Darin ist

$$\overline{\cos \vartheta_n} = \frac{2}{3A} ,$$

wobei A die Massenzahl des streuenden Kerns und ϑ_n der Laborstreuwinkel ist.

Der Parameter q in (20.44), der gleich der Produktionsrate der Neutronen pro Volumeneinheit ist, heisst auch "BREMSDICHTE" (SLOWING-DOWN DENSITY), da die Zahl der Neutronen, die pro cm^3 und sec mit der Energie E_n entstehen, gleich der Zahl der Neutronen ist, die pro cm^3 und sec auf eine andere Energie E_n' gebremst werden.

Es ist gebräuchlich, die Diffusionsgleichung in der einfachen Form

$$\boxed{\nabla^2 n - \frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} n + \frac{3q}{\lambda_{tr} v} = 0} \qquad (20.51)$$

zu schreiben, die man durch Division mit dem DIFFUSIONSKOEFFIZIENTEN

$$\boxed{D \equiv \frac{\lambda_{tr} v}{3}} \qquad (20.52)$$

erhält.

Für den NEUTRONENSTROM $\vec{j}$ gilt:

$$\vec{j} = - D \, \mathrm{grad} \, q , \qquad (20.53)$$

so dass

$$\mathrm{div} \, \vec{j} = - D \, . \, \nabla^2 q \, . \qquad (20.54)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\mathrm{div} \, \vec{j} + \frac{dq}{dt} = 0 \, . \qquad (20.55)$$

Führt man die Veränderliche τ, das "ALTER" des Neutrons, ein, so dass

$$\frac{d\tau}{dt} = D \quad \text{und} \quad \tau = 0 \quad \text{bei } t = 0 \qquad (20.56)$$

gilt, dann folgt aus (20. 55) die ALTERSGLEICHUNG (AGE EQUATION) von Fermi:

$$\boxed{\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau}} \; . \qquad (20.57)$$

Diese besitzt dieselbe Form wie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{K}{\rho c} \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \; . \qquad (20.58)$$

τ heisst genau "SYMBOLISCHES ALTER" (das Adjektiv wurde durch den häufigen Gebrauch weggelassen); es ist von der Grössenart einer Fläche und nicht einer Zeit. Jedoch hängt τ direkt mit dem wirklichen Alter t eines Neutrons zusammen, d. h. der Zeit von der Entstehung bei der Spaltung an. Es gilt

$$\boxed{\tau = t \, \overline{D} \, ,} \qquad (20.59)$$

wo $\overline{D}$ der über die Zeit t gemittelte Diffusionskoeffizient ist.

Eine einfache Anwendung dieser Theorie ist die Diffusion thermischer Neutronen aus einer ebenen Quelle. Wenn Q Neutronen pro cm^2 und sec von einer unendlichen Ebene, willkürlich als die (y, z)-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems gewählt, emittiert werden, dann ist die Quellenstärke in der positiven x-Richtung gleich $\frac{Q}{2}$. Die Neutronendichte n ist für festes x bezüglich y- und z-Richtungen konstant. Die Diffusionsgleichung lautet dann

$$\nabla^2 n = \frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{3}{\lambda_{tr} \, \lambda_a} \, n = \frac{1}{L^2} \, n , \qquad (20.60)$$

wobei

$$\boxed{L \equiv \sqrt{\frac{\lambda_{tr} \, \lambda_a}{3}}} \qquad (20.61)$$

die sogenannte DIFFUSIONSLÄNGE (DIFFUSION LENGTH) ist. Sie ist gleich dem mittleren Abstand des Ortes, an dem die Neutronen im Mittel absorbiert werden, von der Ebene x = 0 (Fig. 20. 18). Die Länge des Zickzackweges wird durch λ_a gegeben.

L

Absorber A

Quelle S

Fig. 20.18

Die Lösung von (20. 60) ist

$$n(x) = C \, e^{-\frac{x}{L}} \, . \qquad (20.62)$$

L ist also die Distanz, auf der die Neutronendichte auf den e-ten Teil absinkt. Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Anfangsbedingung, dass der Neutronenstrom pro Flächeneinheit bei x = 0 gleich $\frac{Q}{2}$ ist:

$$j_x = - D \, \frac{dn}{dx} = \frac{DC}{L} \, e^{-\frac{x}{L}} , \qquad (20.63)$$

so dass an der x = 0-Ebene

$$(j_x)_0 = \frac{DC}{L} = \frac{Q}{2} , \qquad (20.64)$$

woraus

$$C = \frac{QL}{2D} \equiv n_0 \qquad (20.65)$$

mit

$$n(x) = n_0 \, e^{-\frac{x}{L}} . \qquad (20.66)$$

Diese einfache Theorie lässt sich nur bei $\lambda_a \gg \lambda_{tr}$ anwenden, d. h. bei Medien mit kleinem thermischem Einfangsquerschnitt. Die Werte der Parameter sind für verschiedene Moderatoren in Tab. 20. 9 wiedergegeben.

Tab. 20. 9

Moderator	L (cm)	λ_{tr} (cm)	λ_a (cm)
gewöhnliches Wasser, H_2O	2,73	0,45	49
schweres Wasser, D_2O	171	2,40	36700
Beryllium, Be	20,8	1,43	906
Graphit, C	50,8	2,75	2820

20. 7. 5 Kritische Grösse

Für jedes gegebene, spaltbare Material gibt es eine kritische Grösse und Masse, unterhalb der keine sich selbst erhaltende Kettenreaktion stattfinden kann. Das lässt sich qualitativ leicht verstehen: Für eine Brennstoffkugel aus einer Mischung von U^{235} und U^{238} sind die Verluste von Neutronen proportional zur Kugeloberfläche, d. h. zu R^2. Die Produktion dagegen ist dem Volumen proportional, d. h. proportional R^3. Daher wird die Situation für eine Kettenreaktion mit steigendem R günstiger. Es existiert also ein unterer kritischer Radius R und damit eine kritische Masse. Letztere liegt ungefähr bei 6 kg. Das soll jetzt quantitativ betrachtet werden.

Die Produktionsrate q kann bei einem Reaktor geschrieben werden als

$$q = n v N_u \sigma_f N_n , \qquad (20.67)$$

wo N_u die Anzahl U-Atome und N_n die Zahl der pro U^{235}-Spaltung entstehenden, schnellen Neutronen ist. Bei einem "offenen" Reaktor ohne Graphitreflektor ist die Neutronendichte am Rande des Reaktors nahezu null. Die kritische Grösse wird durch eine stationäre Lösung ($\frac{dn}{dt}$ = 0) der Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 n - \frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} n + \frac{3}{\lambda_{tr}} N_u \sigma_f N_n n = 0 \qquad (20.68)$$

bestimmt.

Ist der Reaktor würfelförmig mit der Kantenlänge a, so ist die Lösung unter der obigen Randbedingung

$$n = n_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{a} \cdot \cos \frac{\pi z}{a} . \qquad (20.69)$$

Die gesuchte kritische Grösse a ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung (20. 68). Somit folgt aus (20. 69) :

$$\frac{\nabla^2 n}{n} = -\frac{3\pi^2}{a^2} \quad . \tag{20.70}$$

Nun ergibt sich aus (20. 68) :

$$\frac{\nabla^2 n}{n} = \frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a}\left(1-\lambda_a N_u \sigma_f N_n\right) = \frac{1}{L^2}\left(1-\lambda_a N_u \sigma_f N_n\right). \tag{20.71}$$

Also ist

$$\frac{\nabla^2 n}{n} = -\frac{k_\infty - 1}{L^2} \quad . \tag{20.72}$$

Es gilt

$$k_\infty = \lambda_a N_u \sigma_f N_n , \tag{20.73}$$

denn die vom Neutron während seiner Lebensdauer durchlaufene Distanz ist λ_a , die Chance einer Spaltung $\lambda_a N_u \sigma_f$, und mithin die Zahl der neu entstehenden Neutronen $\lambda_a N_u \sigma_f N_n$.

Durch Gleichsetzen von (20. 70) und (20. 72) folgt

$$a = \sqrt{\frac{3\pi^2 L^2}{k_\infty - 1}} \quad . \tag{20.74}$$

Eine genauere Formel, die die Neutronenwanderung während der Moderation berücksichtigt, enthält an Stelle von L^2 die sogenannte WANDERUNGSFLÄCHE (MIGRATION AREA) :

$$M^2 \equiv L^2 + \tau \quad . \tag{20.75}$$

Dann lautet die GLEICHUNG DES KRITISCHEN REAKTORS :

$$\boxed{-\frac{\nabla^2 n}{n} = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad .} \tag{20.76}$$

Setzt man die vernünftigen Werte $L^2 = 300$, $\tau = 390$ ein, so ergibt sich $M^2 = 690$ und somit für $k_\infty = 1,05$

$$a = \sqrt{\frac{3\pi^2 M^2}{k_\infty - 1}} = \sqrt{\frac{3\pi^2 \cdot 690}{0,05}} = 6,4 \text{ m} . \tag{20.77}$$

Dies ist eine vereinfachte Abschätzung der Kantenlänge eines offenen, kritischen Reaktors. (Durch Verwendung eines Reflektors können die Dimensionen verkleinert werden, und zwar in grober Näherung um die Diffusionslänge.) In Wirklichkeit müssen die Dimensionen jedoch grösser sein, da parasitischer Einfang und Neutronenverluste stattfinden. Der Uran-Graphit-Reaktor von Brookhaven, der einen Graphitreflektor besitzt, ist würfelförmig mit einer Kantenlänge von 7,6 m.

20.7.6 Reaktor-Typen

Ohne auf die Details des Reaktorbaus einzugehen, genügt es, zwei Haupttypen von Reaktoren zu unterscheiden, nämlich

(i) heterogene Reaktoren

und (ii) homogene Reaktoren .

Beim ersten Typ ist der Brennstoff mit dem Moderator gemischt. Der zweite Typ enthält diskrete Brennstoff-Elemente gitterförmig verteilt, zwischen denen sich der Moderator befindet.

Fig. 20. 19 zeigt einen heterogenen Reaktor mit angereichertem Uran, der mit gewöhnlichem Wasser als Moderator und Strahlenabschirmung arbeitet. Der Graphit-Reflektor verhindert, dass

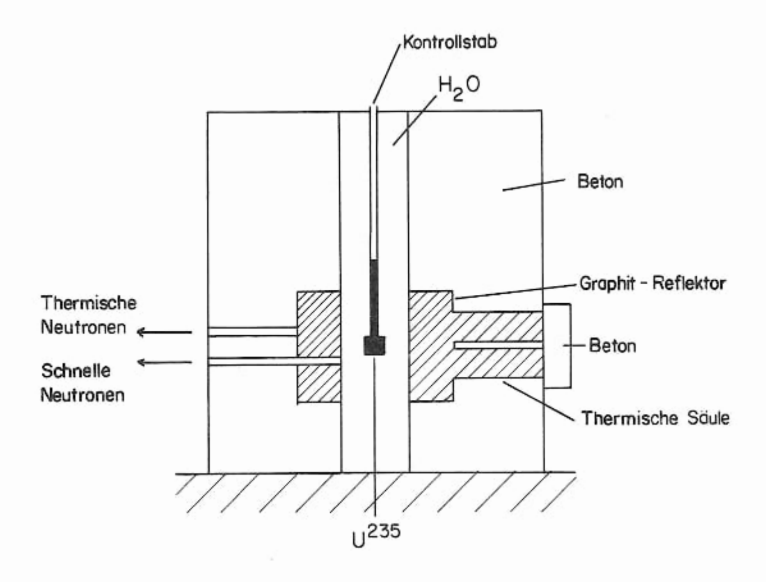


Fig. 20. 19

thermische Neutronen aus dem Reaktor entweichen. Man beachte auch die thermische Säule, die einen rechteckigen Querschnitt besitzt. Sie verläuft vom Moderator durch die Reaktorabschirmung. Die einfallenden schnellen Neutronen nehmen durch Diffusion längs der Säule allmählich eine thermische Energieverteilung an.

Ein homogener Reaktor des "water-boiler"-Typs ist in Fig. 20. 20 gezeigt. Angereichertes Uran

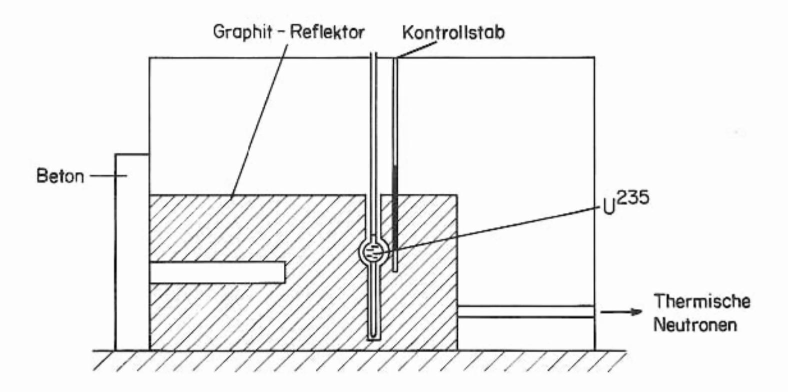


Fig. 20. 20

(etwa 800 g) in Form einer wässerigen Lösung von Uranylnitrat ist in einer Kugel aus rostfreiem Stahl von etwa 50 cm Durchmesser eingeschlossen. Zur Verminderung der Neutronenverluste wird ein Graphitreflektor verwendet.

20.7.7 Leistung und Fluss von Forschungsreaktoren

Die Daten einiger Forschungsreaktoren sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tab. 20.10

Name	Reaktortyp	Leistung (kW)	Fluss nv $(n_{th} . cm^{-2} . sec^{-1})$
	Oak Ridge, "Swimming Pool"	10	$1 . 10^{11}$
CP 3	Argonne, schweres Wasser	300	$1 . 10^{12}$
	Brookhaven, Graphit	25 000	$5 . 10^{12}$
EBR-II	Idaho, Unmoderierter "Breeder"	62 500	$4 . 10^{15}$ schnelle
MTR	Idaho, Wasser mit Be-Reflektor	30 000	$5 . 10^{14}$
BEPO	England, Graphit	6 500	$1 . 10^{12}$
DIDO	England, schweres Wasser	10 000	$2 . 10^{14}$
DRAGON	England, Graphit	20 000	$5 . 10^{13}$
NRX	Chalk River, schweres Wasser	10 000	$5 . 10^{13}$
SAPHIR	Schweiz, "Swimming Pool"	1 000	$1 . 10^{13}$
DIORIT	Schweiz, schweres Wasser	20 000	$3 . 10^{13}$
EL-3	Frankreich, schweres Wasser	15 000	$1 . 10^{14}$

20.8 Kernfusion

20.8.1 Einführung

Die Durchführung einer kontrollierten Fusionsreaktion ist eine der wichtigsten wissenschaftlichen Aufgaben dieses Jahrhunderts. Die Verwendung der Kernfusion für friedliche Zwecke würde voraussichtlich dauernd den ständig wachsenden Energiebedarf der Welt decken, ein Bedarf, der bei der gegenwärtigen Wachstumsrate die konventionellen Reserven wahrscheinlich in weniger als einem Jahrhundert erschöpfen würde. Selbst die Kernspaltung kann auf lange Sicht den Bedarf nicht befriedigen: Man schätzt den Vorrat an spaltbarem Material, das sich wirtschaftlich ausnützen lässt, auf das etwa 25-fache der konventionellen Energiereserven. Dagegen sind die Rohstoffe für die Kernfusion praktisch unbegrenzt: Von den verwendbaren Elementen ist allein Deuterium in den Weltmeeren in solchen Mengen vorhanden, dass es selbst bei einem 1000-mal grösseren Energiebedarf als dem heutigen über eine Milliarde Jahre reichen würde.

Darüber hinaus wäre das Problem der Beseitigung radioaktiver Spaltprodukte gelöst (die unter zukünftigen Bedingungen in einer jährlichen Gesamtaktivität von 10^{13} Curie anfallen könnten), wenn Fusionsreaktionen zur Energiegewinnung benützt werden könnten. Dazu sind jedoch noch ungeheure technische Schwierigkeiten zu überwinden.

Die Behandlung der kontrollierten Fusion in den folgenden Abschnitten folgt im wesentlichen dem umfangreichen Überblick von Post (Rev. Mod. Phys. 1956, 28, 338).

20. 8. 2 Fusionsreaktionen

Der Verlauf der Kurve für die Bindungsenergie in Fig. 1. 2 zeigt, dass durch Fusion von Elementen mit kleinem A Energie gewonnen werden kann, und zwar von grösseren Beträgen als bei der Spaltung von Elementen mit hohem A: die Kurve steigt steil vom Nullpunkt aus an. Beispielsweise ist die Bindungsenergie von H^2 gleich 2,2 MeV, die von He^4 dagegen 28 MeV, so dass bei der Fusion von zwei Deuteronen zu einem α -Teilchen

$$D + D \longrightarrow He^4$$

die Energie von etwa 28 - 2 . 2,2 = 23,6 MeV frei wird. Ausschlaggebend sind die relativen Energieüberschüsse:

Bei der Spaltung braucht man Kerne der totalen Masse ~ 240 AME, um 200 MeV freizumachen,

bei der Fusion braucht man Kerne der totalen Masse ~ 4 AME, um 20 MeV freizumachen.

Mögliche, nützliche Fusionsreaktionen sind die folgenden:

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & D + D & \longrightarrow He^3 & + n + 3,25\ MeV & \rbrace \\
(2) & D + He^3 & \longrightarrow He^4 & + p + 18,3\ MeV & \\
(3) & D + D & \longrightarrow T & + p + 4\ MeV & \rbrace \\
(4) & D + T & \longrightarrow He^4 & + n + 17,6\ MeV & \\
(5) & D + Li^6 & \longrightarrow 2\ He^4 & + 22,4\ MeV & \\
(6) & p + Li^7 & \longrightarrow 2\ He^4 & + 17,3\ MeV\ . &
\end{array}
$$

Davon sind die Reaktionen (5) und (6) weniger vielversprechend als die übrigen, weil die ausgeprägte Coulomb-Barriere bei kleinen Geschossenergien den Reaktionsquerschnitt verkleinert.

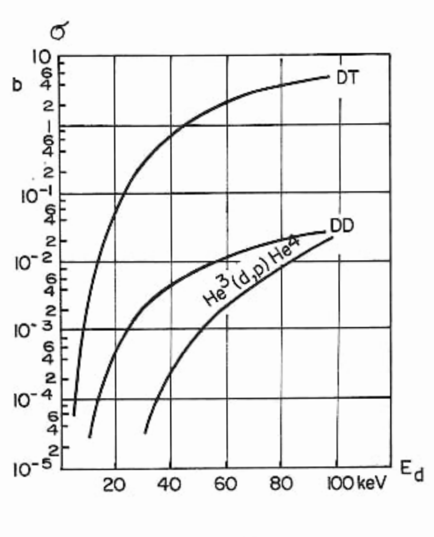


Fig. 20. 21

(1) und (2), sowie (3) und (4) sind gekoppelt, denn sie sind aufeinanderfolgende Schritte eines sukzessiven, exothermen Fusionsprozesses: die Wirkungsquerschnitte für die entsprechenden Anfangsschritte sind ungefähr gleich, wie aus Fig. 20. 21 zu sehen ist.

Man könnte mit Recht behaupten, dass eine kontrollierte Fusionsreaktion wie in (1) tatsächlich im Labor schon ausgeführt worden ist. Die Darstellung von Neutronen mit der D-D-Reaktion (1) ist eine Alltäglichkeit in Laboratorien, die mit Cockcroft-Walton-Beschleunigern ausgerüstet sind. Bei diesen Prozessen übersteigt jedoch der Energieaufwand bei weitem die Ausbeute, weil das meiste der kinetischen Energie des einfallenden Deuteronenstrahles unnütz durch Ionisation, Strahlung und Energieübertragung auf die Hüllenelektronen des Targets (vgl. Abschn. 16. 9. 5) verlorengeht. Die Energieausbeute beträgt nur etwa 10^{-4} von derjenigen, die bei einer günstigen Energiebilanz zu erwarten ist. Um den Hauptteil dieser Verluste zu vermeiden, ist es nötig, die Targetatome von ihren Hüllenelektronen zu befreien,

d. h. man muss Deuteronen direkt auf Deuteronen schiessen, mit genügender Energie, um einen hohen Fusionsquerschnitt zu bekommen. Diese Bedingung kann nicht einfach dadurch erfüllt werden, dass man Plasma einer gewöhnlichen elektrischen Entladung in Deuterium-Gas als Target verwendet, da die Ionisation unvollständig ist, und die einfallenden Deuteronen schnell (innerhalb $\sim 1\ \mu$sec) viel von ihrer kinetischen Energie verlieren. Auch durch Benutzung kollidierender Deuteronenstrahlen erreicht man nichts, da die Intensitäten zu schwach sind. Ein aussergewöhnlich intensiver Deuteronenstrahl kann mit den heutigen Techniken mit einer Stromdichte von etwa 0,1 A. cm^{-2} hergestellt werden; das bedeutet für 100 keV-Deuteronen einen Teilchenfluss von $2 \cdot 10^9 cm^{-3}$ bei einer Geschwindigkeit von $3 \cdot 10^8$ cm. sec^{-1}. Selbst dies ergibt die vernachlässigbar kleine Leistungsdichte von $4 \cdot 10^{-11}$ Watt. cm^{-3}.

Für eine günstige Energiebilanz ist die vollständige Ionisation eines Gases zu einem Plasma nötig. Dabei ist das Problem des stabilen Einschlusses des Plasmas ohne Wärmeübertragung an die Umgebung zu lösen.

20. 8. 3 Fusionstheorie

Da die Fusion hauptsächlich eine Kollision von zwei Körpern ist, bedarf es der Betrachtung von binären Reaktionen bzw. deren Raten. In diesem Zusammenhang ist es nützlich, an Stelle der kinetischen Energie eines beteiligten Teilchens seine KINETISCHE TEMPERATUR einzuführen, analog zu den Kerntemperaturen in Abschn. 15. 5. 4. Bei einer Maxwell-Verteilung der Energie, wie sie in einem Plasma vorkommt, ist die mittlere, kinetische Energie eines Teilchens

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT . \qquad (20.78)$$

Oft ist es bequem, die kinetischen Temperaturen in keV auszudrücken, wobei

$$1 \text{ keV} \mathrel{\hat{=}} 1,16 \cdot 10^7 \ {}^{o}K \qquad (20.79)$$

entspricht. Dies bedeutet $\frac{2}{3}$ der mittleren Teilchenenergie in einer Maxwell-Verteilung :

$$N(v)\, dv = const. \ T^{-\frac{3}{2}} \ v^2 \ e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \ dv \qquad (20.80)$$

bei dieser Temperatur.

Dann kann die Wahrscheinlichkeit der Reaktion zwischen Ionen der Sorte 1 und Ionen der Sorte 2 bei der kinetischen Temperatur T, ausgedrückt durch einen gegenseitigen Reaktionsquerschnitt σ , wie folgt berechnet werden:

(i) σ ist eine Funktion der Relativgeschwindigkeit v_{12} zwischen den Ionen. Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für eine Reaktion zwischen einem gegebenen Teilchen der Sorte 1 und einem beliebigen der Sorte 2 (z. B. einem D mit einem He^3-Ion) ist dann gegeben durch

$$W \sim \sigma v_{12} \cdot n_2 , \qquad (20.81)$$

wo n_2 die Dichte der Ionen der Sorte 2 ist.

(ii) Die Relativgeschwindigkeit v_{12} ist jedoch keine feste Grösse: Bei einem gegebenen T des Plasmas unterliegt v_{12} einer Maxwell-Verteilung. Es ist deshalb nötig, (σv_{12}) zu mitteln (vgl. Fig. 20.22). Dieser Erwartungswert wird $<\sigma v_{12}>$ geschrieben.

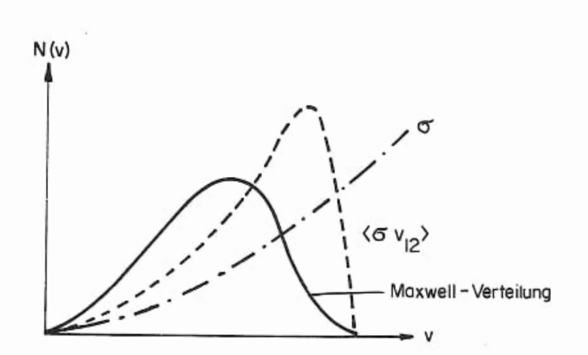


Fig. 20.22

(iii) Die Zahl der Reaktionen in der sec pro Ion der Sorte 1 mit Ionen der Sorte 2 ist jetzt gegeben durch

$$R_1 = n_2 <\sigma v_{12}> . \qquad (20.82)$$

(iv) Die Zahl der Reaktionen pro sec in einer Volumeneinheit des Plasmas, d.h. die totale Reaktionsrate, ist also gleich dem Produkt von R_1 mit der Teilchendichte n_1 der Ionen der Sorte 1 :

$$R_{12} = R_1 n_1 = n_1 n_2 <\sigma v_{12}> . \qquad (20.83)$$

(v) Wenn die Ionen der Sorte 1 und der Sorte 2 identisch sind, wie z.B. bei der DD-Reaktion, so wird die Reaktionsrate

$$R_{11} = \frac{1}{2} n^2 <\sigma v> . \qquad (20.84)$$

Da n die totale Ionendichte ist, muss der Faktor $\frac{1}{2}$ auftreten, da sonst alle Reaktionen doppelt gezählt sind (A + B = B + A).

(vi) Die Reaktionsleistung pro Volumeneinheit Plasma ist die Reaktionsrate, multipliziert mit der Energieausbeute E_{12} pro Reaktion,

$$\boxed{P = n_1 n_2 <\sigma v_{12}> E_{12} .} \qquad (20.85)$$

Bei einer Reaktion zwischen identischen Ionen ist die LEISTUNGSDICHTE einfach

$$P = \frac{1}{2} n^2 <\sigma v> E . \qquad (20.86)$$

(vii) Der Wirkungsquerschnitt der DD-Reaktion bei kleinen Geschossenergien lässt sich auf eine Form bringen, die vom Gamow-Typus ist: Der genaue Ausdruck ist:

$$\sigma_{DD} = \frac{288}{E\,(\text{keV})} \cdot e^{-45{,}8\sqrt{E}} \quad \text{barn}. \qquad (20.87)$$

(viii) Damit kann der Mittelwert $<\sigma v>_{DD}$ für die DD-Reaktion berechnet werden, indem man σ_{DD} mit der Maxwell-Verteilung der Relativgeschwindigkeiten v multipliziert und über alle möglichen v integriert. Das Ergebnis ist (für T < 50 keV) :

$$<\sigma v>_{DD} = 260 \cdot 10^{-16}\ T^{-2/3}\ e^{-18{,}76\,T^{-1/3}} , \qquad (20.88)$$

wo T in keV einzusetzen ist.

Für die DT-Reaktion erhält man einen ähnlichen, aber komplizierteren Ausdruck. Die Werte der für die Reaktionsrate charakteristischen Parameter $<\sigma v>_{DD}$ und $<\sigma v>_{DT}$ sind für die beiden wichtigen Reaktionen (DD- und DT-Fusion) in Fig. 20. 23 graphisch dargestellt.

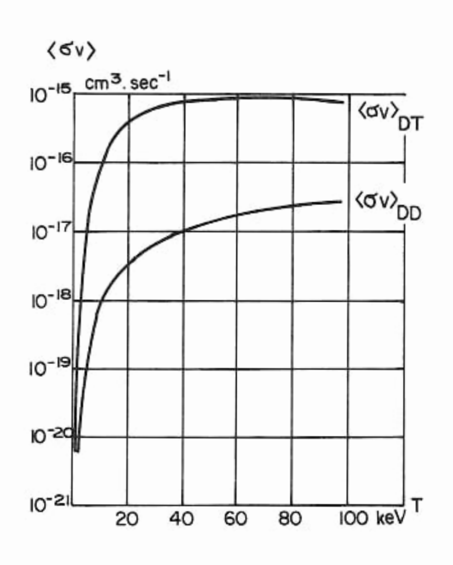


Fig. 20.23

Der äusserst rasche Abfall von $<\sigma v>$ bei niedrigen Energien hat eine bemerkenswerte Konsequenz. Bei T kleiner als etwa 5 keV reagieren effektiv nur die Teilchen, deren Energie einige Male grösser ist als die mittlere kinetische Energie, d. h. die Teilchen am hochenergetischen "Schwanz" der Verteilung. Bei der DD-Fusion bei T = 1 keV werden die meisten Reaktionen durch Teilchen ausgelöst, deren Energie etwa 8-mal grösser ist als die mittlere Energie bei der zugehörigen kinetischen Temperatur. Wie man sieht, sitzt bei kleinen Temperaturen der ganze Effekt im Schwanz der Maxwell-Verteilung.

(ix) Nimmt man an, dass die DD-Reaktion bei einer kinetischen Temperatur von 100 keV stattfindet, so ist σ_{DD} verhältnismässig konstant und gross. Aus Fig. 20. 23 liest man $<\sigma v>_{DD} = 3 \cdot 10^{-17} cm^3.sec^{-1}$ ab. Weiter ist die mittlere Reaktionsenergie für die totale DD-Reaktion

$$D + D \begin{cases} \rightarrow He^3 + n + 3{,}25 \text{ MeV} \\ \rightarrow T + p + 4 \text{ MeV} \end{cases}$$

gleich

$$E = \tfrac{1}{2}(3{,}25 + 4) = 3{,}6 \text{ MeV} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ joule}, \qquad (20.89)$$

wobei die arithmetische Mittelung gerechtfertigt ist, da die Wirkungsquerschnitte der beiden Teilreaktionen ungefähr gleich sind.

Die MITTLERE LEISTUNGSDICHTE DER TOTALREAKTION ist dann für die DD-Fusion

$$P_{DD} = \tfrac{1}{2} n_D^2 <\sigma v>_{DD} E = \tfrac{1}{2} n_D^2 (3 \cdot 10^{-17}) \cdot (6 \cdot 10^{-13}) \qquad (20.90)$$

$$\boxed{P_{DD} = 9 \cdot 10^{-30} \, n_D^2 \ \text{W.cm}^{-3} \text{ bei } T = 100 \text{ keV.}} \qquad (20.91)$$

Die quadratische Abhängigkeit von n_D zeigt die Empfindlichkeit der Leistung gegen Änderungen des Deuteronenflusses. Die Teilchendichte von Deuterongas bei S. T. P. (Normaldruck und -Temperatur) ist

$$n_D = 2{,}7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}, \qquad (20.92)$$

so dass die zugehörige Leistungsdichte

$$P = 6500 \text{ MW.cm}^{-3} \qquad (20.93)$$

wäre !

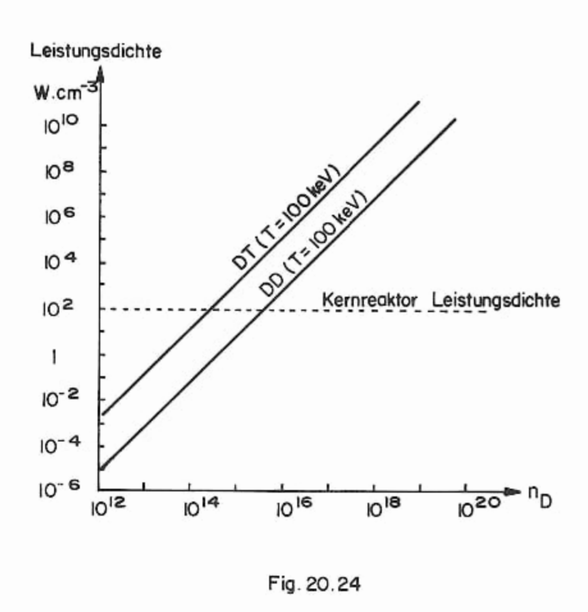


Fig. 20.24

In Fig. 20.24 ist die Leistungsdichte für die DD-Reaktion und für eine 1 : 1 Mischung von D und T dargestellt, in beiden Fällen für eine kinetische Temperatur von 100 keV.

Es ist klar, dass bei einer solchen Temperatur und bei Dichten, die sogar nur annähernd die atmosphärischen Dichten erreichen, ein kontinuierlicher Betrieb äusserst hoffnungslos ist. Vergleichsweise erzeugt ein grosses, dampfgetriebenes, elektrisches Kraftwerk heute eine Leistung von etwa 500 MW. Mit Deuteronen unter atmosphärischer Dichte und bei 100 keV Temperatur würde diese Leistung mit der DD-Reaktion in einem Volumen von nur 0,03 cm^3 zu erreichen sein ! Ferner wäre in diesem Fall der gaskinetische Druck, den der Brennstoff ausüben würde, etwa 10^7 atm.

Der Einfluss der Dichte ist sehr entscheidend: Wenn man n_D auf 10^{12} cm^{-3} verkleinern würde, was die Grössenordnung der Plasmadichten in gewöhnlichen Gasentladungen ist, so würde die Leistungsdichte für den DD-Prozess nur etwa 10^{-5} Watt. cm^{-3} betragen.

20.8.4 Mittlere freie Reaktionsweglänge

Wenn $<\sigma v>$ bekannt ist, kann die mittlere Lebensdauer eines Ions vor der Reaktion berechnet werden nach

$$\tau = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{n<\sigma v>} \quad . \qquad (20.94)$$

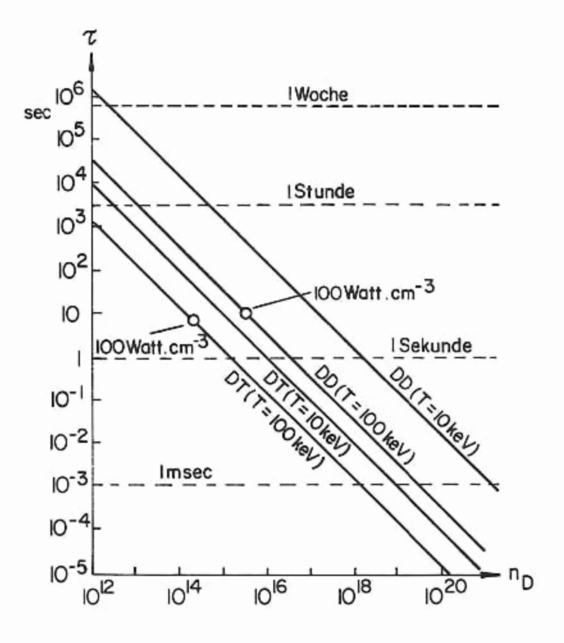


Fig. 20.25

τ ist in Fig. 20.25 als Funktion der Deuteronendichte für die DD- und die DT-Reaktion bei 10 keV und 100 keV dargestellt. Bei einer Leistungsdichte von 100 W. cm^{-3}, wie sie in einem Spaltungsreaktor erreicht wird, ist die mittlere Lebensdauer bei 100 keV etwa 10 sec. Während dieser Zeit müssen die Teilchen im wesentlichen unter Reaktionsbedingungen bleiben, damit die Leistungsbilanz erhalten bleibt. Die Folgen dieser Forderung macht man sich klar, wenn man bedenkt, dass die Ionen vor der Reaktion eine ungeheuer grosse, mittlere freie Weglänge besitzen. Sie beträgt

$$\lambda = \frac{1}{n\,\overline{\sigma}} \quad , \qquad (20.95)$$

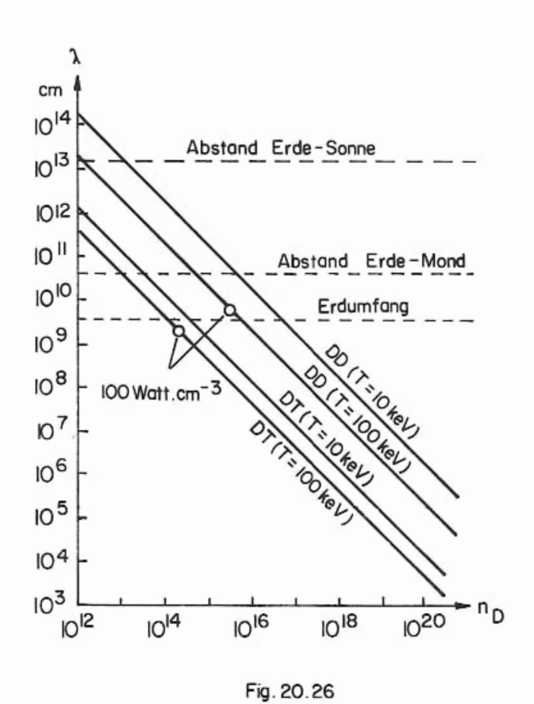


Fig. 20.26

wie in Fig. 20.26 aufgetragen. Beispielsweise ist die mittlere freie Weglänge für Deuteronen in der DD-Reaktion bei 100 keV und 100 W. cm^{-3}, $\lambda = 5 \cdot 10^9$ cm, was den Erdumfang übertrifft !

20. 8. 5 Energieverteilung und Energieverluste bei der Fusion

Die Reaktionsenergie wird auf die Reaktionsprodukte umgekehrt proportional zu ihren Massen verteilt. Die leichtesten Teilchen erhalten also die höchste kinetische Energie. Deshalb entfernen sich entstehende Neutronen sehr rasch aus der Reaktionszone und führen einen grossen Teil der Fusionsenergie mit sich. Vernachlässigt man die kinetische Energie des Ausgangssystems, so verteilt sich die Energie bei den charakteristischen Fusionsprozessen wie folgt:

$$D + D \longrightarrow (He^3 + 0,8\ MeV) + (n + 2,45\ MeV),$$
$$D + D \longrightarrow (T + 1,0\ MeV) + (p + 3,0\ MeV),$$
$$D + T \longrightarrow (He^4 + 3,6\ MeV) + (n + 14,1\ MeV).$$

Bei der totalen DD-Reaktion entfallen im Mittel 66 % der Reaktionsenergie auf geladene Teilchen und 34 % auf Neutronen, wobei letzteres einen Verlust darstellt. Bei der DT-Reaktion sind die entsprechenden Werte 20 % und 80 %, also noch ungünstiger. Doch zeigen die Zahlen, dass andere Energieverluste entscheidend sind für die Energiebilanz bei der Fusion. Solche sind z. B.

(i) Strahlung aus der Elektronenwolke im Plasma,

(ii) Stossvorgänge innerhalb des Plasmas,

(iii) Entweichen geladener Partikel durch Diffusion aus der Reaktionszone.

Die Grösse des Strahlungsverlustes (i) ist glücklicherweise nicht so niederschmetternd, wie man nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz erwarten sollte, da dieses die Strahlung schwarzer Körper betrifft und für das Plasma nicht gilt (nach dem T^4-Gesetz würde sich für T = 10 keV $\hat{=}$ 10^8 °K eine Strahlungsintensität von 10^{21} W. cm^{-2} ergeben). Ein Strahlungsgleichgewicht zwischen den Teilchen und dem Strahlungsfeld kann sich nur einstellen, wenn die mittlere freie Weglänge für die Strahlung kleiner ist als die Abmessungen des Systems; bei der Fusion sind die Verhältnisse jedoch umgekehrt. Dies zeigt noch einmal, dass die für die Beschreibung eines Plasmas angemessene Grösse die kinetische Temperatur ist und nicht etwa eine Strahlungstemperatur.

Im Plasma ist die vorherrschende Strahlungsart die Bremsstrahlung oder Röntgen-Emission, die durch Ablenkung der schnell beweglichen Plasma-Elektronen im Coulomb-Feld der Plasma-Ionen entsteht. In einem vollständig ionisierten Gas mit der Elektronentemperatur T_e keV und der Elektronendichte n_e ist die Leistungsdichte der Strahlung bis auf einen Fehler von 5 % gleich

$$P_r = 0,54 \cdot 10^{-30} Z^2 n_e^2 T_e^{1/2} \quad W \cdot cm^{-3}, \tag{20.96}$$

was für die DD-Reaktion

$$P_r = 0,54 \cdot 10^{-30} n_D^2 T_e^{1/2} \quad W \cdot cm^{-3} \tag{20.97}$$

ergibt, da $n_D = n_e$ ist.

Wegen der Z^2-Abhängigkeit von P_r muss mit peinlicher Sorgfalt auf die Reinheit des Brennstoffes geachtet werden und darauf, dass keine ionisierten Elemente mit hohem Z aus den Reaktorwänden usw. das Plasma verunreinigen.

20.8.6 Minimale Temperatur für sich selbst erhaltende Fusion

Die Leistungsausstrahlung (20.97) und die Leistungserzeugung,

$$P = \frac{1}{2} n_D^2 <\sigma v>_{DD} E \tag{20.98}$$

hängen beide von n_D^2 ab, und deshalb ist die Temperatur T ein entscheidender Faktor für die Durchführbarkeit einer sich selbst erhaltenden Reaktion, unabhängig von der Ionendichte. $<\sigma v>$ wächst exponentiell mit T, während P_r nur mit $T^{1/2}$ geht. Die innere Leistungsproduktion P_i (d.h. die Leistungsdichte, die auf geladene Teilchen in der Fusionszone entfällt: $P_i = P_{tot} - P_{Neutronen}$) übertrifft deshalb die Strahlung oberhalb einer kritischen Temperatur T_c (bei der $P_i = P_r$ ist).

Nun ist

$$\frac{P_i}{P_r} = 1,92 \cdot 10^4 \; T^{-7/6} \; e^{-18,76 \, T^{-1/3}} \; . \tag{20.99}$$

Setzt man diesen Bruch gleich 1, so findet man

$$\begin{aligned} T_c &= 35 \text{ keV} \quad \text{für die DD-Reaktion} \\ \text{und} \quad T_c &= 4 \text{ keV} \quad \text{für die DT-Reaktion.} \end{aligned} \tag{20.100}$$

Unterhalb dieser kinetischen Temperaturen kann aus energetischen Gründen keine kontrollierte, sich selbst erhaltende Reaktion stattfinden. Die Situation ist in Fig. 20.27 dargestellt.

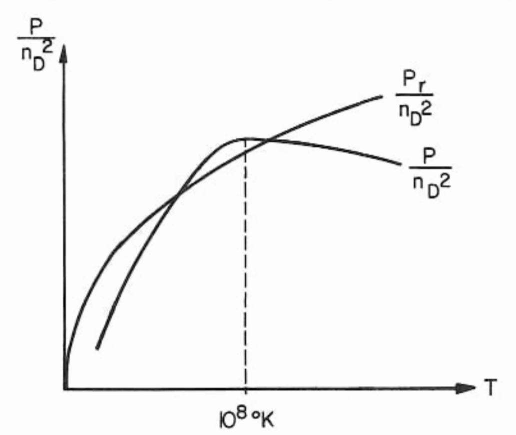


Fig. 20.27

20.8.7 Einschliessung des Plasmas

Obwohl keine technischen Schranken dem Erreichen der erforderlichen hohen Fusionstemperaturen von etwa $10^9\ ^oK$ entgegenstehen, stellen die hohen Teilchendichten (z. B. $10^{15} cm^{-3}$) und die langen Reaktionszeiten das Problem des Einschliessens der Fusionsreaktion in einem genügend grossen Volumen. Das Plasma übt bei hohen Temperaturen einen grossen Druck auf die Umgebung aus. Dieser beträgt z. B. bei $6 \cdot 10^{15}$ Teilchen. cm^{-3} und 100 keV etwa 1000 atm. Solche Drucke können nicht mehr durch Gravitationskräfte, sondern allenfalls durch elektromagnetische Kräfte kompensiert werden. Elektrostatische Felder sind für diesen Zweck aus folgenden Gründen nicht verwendbar:

(i) In der klassischen Elektrostatik wird gezeigt (Theorem von Earnshaw), dass sogar ein einzelnes, geladenes Teilchen nicht in einem irgendwie gearteten "Käfig" aus geladenen Leitern in einem stabilen Gleichgewicht zu halten ist.

(ii) Ionen mit entgegengesetzten Vorzeichen der elektrischen Ladung werden angezogen bzw. abgestossen, so dass nur eine Ionensorte einzuschliessen wäre.

(iii) Der elektrostatische "Druck" ist beschränkt durch die Energiedichte $\frac{\overline{E}^2}{8\pi}$ erg. cm^{-3} des Feldes. Um ein Plasma von $6 \cdot 10^{15}$ Teilchen. cm^{-3} bei 100 keV einzuschliessen, müsste die Feldstärke $\overline{E} = 4{,}8 \cdot 10^7$ V. cm^{-1} betragen !

Deshalb scheinen magnetische "Spiegel" und der "Pinch"-Effekt (Verengungseffekt) heutzutage die einzigen Möglichkeiten zu sein, dem Problem der Plasmaeinschliessung beizukommen.

20.8.8 Pinch-Effekt

Zwei parallele Leiter, die gleichgerichtete Ströme führen, ziehen sich an. In ähnlicher Weise wird ein Strahl geladener Teilchen verengt infolge der Anziehungskräfte zwischen den Elementarströmen.

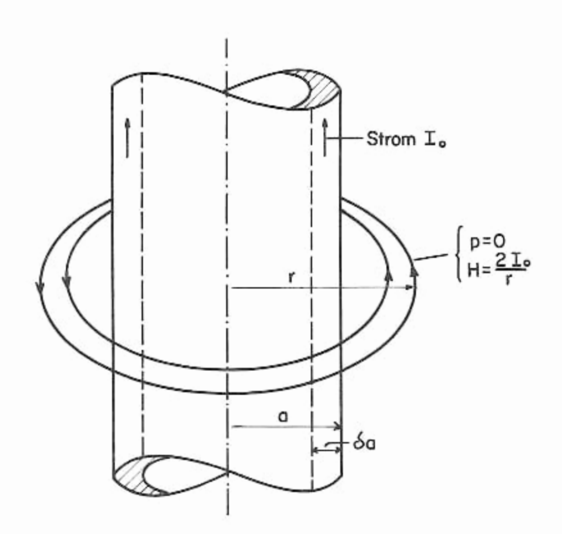


Fig. 20.28

Der Effekt kann wie folgt behandelt werden:

Man betrachtet einen Strom I_o in einem dünnen Hohlzylinder der Dicke δa und dem äusseren Radius a (Fig. 20.28). Man nimmt an, dass im plasmagefüllten Innenteil die Temperatur T herrsche und ausserdem eine homogene Verteilung von einfach geladenen Ionen und Elektronen vorliege. Wegen des Ladungsgleichgewichtes müssen die Dichten der entgegengesetzten Ladungsträger gleich sein: $n_i = n_e$. (N. B. : Die Ladungsgleichheit ist eine strenge Bedingung: das elektrostatische Feld, das nötig wäre, um plötzlich alle Elektronen aus einem Plasma der Elektronen- bzw. Ionendichte $10^{15} cm^{-3}$, das in einer Kugel von 1 cm Radius eingeschlossen ist, zu entfernen, ist nach dem Satz von Gauss

$$\overline{E} = \frac{Q}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \cdot 10^{15} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^8 \ \ V \cdot cm^{-1} \ \ !). \qquad (20.101)$$

Der kinetische Druck innerhalb des Hohlzylinders ist

$$p = (n_i + n_e)\,kT\ ; \qquad (20.102)$$

ausserhalb ist er null, da dort $n_i = n_e = 0$ ist. Dieser Druck muss kompensiert werden durch den Gradienten des zugehörigen Magnetfeldes. Die magnetische Feldstärke in einem Punkt im Abstand r von der Achse des Zylinders ist

$$H(r) = \frac{2I}{r}\ , \qquad (20.103)$$

wo

$$I(r) = I_o \left(\frac{r + \delta a - a}{\delta a} \right) \qquad (20.104)$$

ist, mit

$$(a - \delta a) < r < a\ . \qquad (20.105)$$

Setzt man

$$x \equiv a - r \qquad \text{mit} \qquad 0 < x < \delta a\ , \qquad (20.106)$$

so kann geschrieben werden

$$I(x) = I_o \left(1 - \frac{x}{\delta a} \right), \qquad (20.107)$$

so dass

$$H(x) = \frac{2I_o}{a - x} \left(1 - \frac{x}{\delta a} \right) \xrightarrow{x \ll a} \frac{2I_o}{a} \left(1 - \frac{x}{\delta a} \right). \qquad (20.108)$$

Bedenkt man, dass die Stromdichte

$$j = \frac{I_o}{2\pi a\, \delta a} \qquad (20.109)$$

ist, bei $\delta a \ll a$, und die gesamte in Richtung auf die Zylinderachse wirkende Kraft pro Flächeneinheit gleich

$$\int [\vec{j} \times \vec{H}]\, dx \qquad (20.110)$$

ist, so ist, falls $\vec{j}$ senkrecht zu $\vec{H}$ steht, die Kraft pro Flächeneinheit beim Pinch-Effekt gleich

$$K = \int_0^{\delta a} (j\,H)\, dx = \left(\frac{2I_o}{a} \right) \left(\frac{I_o}{2\pi a\, \delta a} \right) \int_0^{\delta a} \left(1 - \frac{x}{\delta a} \right) dx, \qquad (20.111)$$

$$K = \frac{I_o^2}{2\pi a^2}\ . \qquad (20.112)$$

Da diese Pinch-Kraft pro Flächeneinheit gleich dem kinetischen Druck des Plasmagases sein soll, folgt aus (20. 102):

$$K = (n_i + n_e)\, kT, \qquad (20.113)$$

woraus

$$I_o^2 = 2NkT, \qquad (20.114)$$

wo N die Zahl der Teilchen pro Längeneinheit in dem begrenzenden Zylinder vom Radius a ist. Der Strom I_o ist unabhängig vom Radius der Verengung. Die magnetische Feldstärke beträgt an der Oberfläche des Zylinders

$$H_o = \frac{2I_o}{a}\ , \qquad (20.115)$$

woraus

$$\frac{H_o^2}{8\pi} = \frac{I_o^2}{2\pi a^2} = K = p\ . \qquad (20.116)$$

Der magnetische Druck, der gleich der magnetischen Energiedichte ist, kompensiert also tatsächlich den kinetischen Druck, wenn die magnetischen Feldlinien parallel sind. Für eine DD-Reaktion

bei 100 keV mit $n_D = 3 \, . \, 10^{15} cm^{-3}$ ergibt sich

$$p = (n_i + n_e) kT = 6 . 10^{15} . 1,6 . 10^{-7} = 10^9 \; dyn . cm^{-2} \approx 1\,000 \; atm., \qquad (20.117)$$

also

$$\frac{H_o^2}{8\pi} = 10^9 \qquad (20.118)$$

und somit

$$H_o = 1,6 . 10^5 \; Gauss . \qquad (20.119)$$

Bei einem Plasma vom Radius a = 10 cm ist zur Erzeugung dieses Feldes ein Strom von $8 \, . \, 10^6$ A nötig.

Weitere Resultate auf dem Gebiet der Plasma-Physik sind zusammengefasst in Varenna Course Proceedings "Fisica del Plasma" (in Englisch) (1959).

ANHANG H

H. VEKTORADDITION VON DREHIMPULSEN

H. 1 Drehimpulsoperatoren für ein einzelnes Teilchen

Für ein einzelnes, quantenmechanisches System, das durch eine Zustandsfunktion ψ charakterisiert wird, die eine Eigenfunktion des Drehimpulses ist, sind die Eigenwerte des Drehimpulses (nicht-relativistisch) gegeben durch

$$\underline{I}^2 \psi(j,m) = j(j+1)\hbar^2 \psi(j,m), \tag{H.1}$$

$$\underline{I}_z \psi(j,m) = m\hbar \psi(j,m), \tag{H.2}$$

$$(\underline{I}_x + i\underline{I}_y)\psi(j,m) = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\cdot\psi(j,m+1), \tag{H.3}$$

$$(\underline{I}_x - i\underline{I}_y)\psi(j,m) = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\cdot\psi(j,m-1), \tag{H.4}$$

worin $\underline{I}_x$, $\underline{I}_y$, $\underline{I}_z$, die Operatoren für die Komponenten des totalen Drehimpulsoperators $\underline{I}$, durch

$$\underline{I}^2 = \underline{I}_x^2 + \underline{I}_y^2 + \underline{I}_z^2 \tag{H.5}$$

verknüpft sind, mit den Vertauschungsrelationen

$$\underline{I}_x\underline{I}_y - \underline{I}_y\underline{I}_x = i\hbar\underline{I}_z, \tag{H.6}$$

$$\underline{I}^2\underline{I}_x - \underline{I}_x\underline{I}^2 = 0 \quad \text{und zyklisch.} \tag{H.7}$$

Man beachte, dass der totale Drehimpuls eines isolierten Systems quantenmechanisch durch zwei Parameter j und m beschrieben wird; m wird als die Projektion von j auf eine beliebige Achse angesehen, die als z-Achse gewählt wird (Fig. H. 1). Im Gegensatz dazu würde die klassische Darstellung des totalen Drehimpulses die Bestimmung aller drei Komponenten I_x, I_y und I_z erfordern.

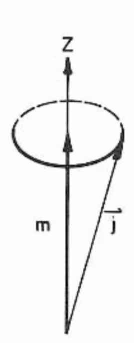


Fig. H.I

H. 2 Drehimpulse für zwei Teilchen: Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Anstelle eines einzelnen Systems seien jetzt zwei unabhängige Systeme betrachtet, von denen jedes einen totalen Drehimpuls hat, dessen Betrag und Richtung wohldefiniert sind. Die klassische Zusammensetzung von Drehimpulsen zum resultierenden totalen Drehimpuls wird von Edmonds in "Angular Momentum in Quantum Mechanics" (S. 31) erörtert; er behandelt dann das quantenmechanische Problem ebenso wie Blatt-Weisskopf (S. 789), wie es auch hier durchgeführt werden soll.

Die Kenntnis solcher Kopplungskonstanten, wie sie im folgenden untersucht werden, ist erforderlich für die Berechnung von Winkelkorrelationen bei Streuproblemen; die sogenannte "RACAH-ALGEBRA" wird bei Behandlung von Multipol-Wechselwirkungen und Übergangswahrscheinlichkeiten benützt werden. Im folgenden werden die Hauptgesichtspunkte der betreffenden Kopplungskonstanten mit zunehmendem Grad von Komplexheit betrachtet werden.

Eine gründlichere Erörterung findet sich bei Sharp: "The Quantum Theory of Angular Momentum" (AECL Rep. No. 465, 1957, revised 1958), Edmonds: "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Rose: "Elementary Theory of Angular Momentum", 1957, und Sharp: "Racah Algebra and the Contraction of Groups", (AECL-1098, 1960).

Für das System 1 lassen sich die Quantenzahlen j_1 und m_1 und die Zustandsfunktion $\psi(j_1, m_1)$ angeben; ebenso für das System 2, j_2, m_2 und $\psi(j_2, m_2)$.

Für das Gesamtsystem, das sich durch Zusammensetzung der beiden Systeme ergibt, werden die Quantenzahlen als j und m und die Zustandsfunktion als $\Psi(j_1, m_1; j_2, m_2)$ geschrieben.

Man hat in erster Näherung

$$\Psi(j_1, m_1; j_2, m_2) = \psi(j_1, m_1) . \psi(j_2, m_2) . \qquad (H.8)$$

Wenn man jedoch die totale Zustandsfunktion des zusammengesetzten Systems als $\Psi(j, m)$ schreibt, dann kann man dies nicht direkt mit $\Psi(j_1, m_1; j_2, m_2)$ gleichsetzen. Man erhält sie daraus durch eine unitäre Transformation, die sich durch eine unitäre Matrix der Dimension $(2 j_1 + 1)(2 j_2 + 1)$ darstellen lässt, deren Zeilen und Spalten durch die entsprechenden Paare von m_1, m_2 und j, m angegeben werden (s. beispielsweise Dirac "Principles of Quantum Mechanics", 1958, S. 67). Das allgemeine Matrixelement daraus lässt sich als

$$(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j m) \quad \text{oder} \quad \langle j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j m \rangle \qquad (H.9)$$

schreiben; es dient als Faktor in der gesuchten Gleichung:

$$\boxed{\Psi(j, m) = \sum_{m_1 = -j_1}^{+j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{+j_2} (j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j m) . \psi(j_1, m_1) . \psi(j_2, m_2) .} \qquad (H.10)$$

Was hierbei eigentlich unternommen wurde, ist, die Eigenfunktionen der unabhängigen, totalen Drehimpulsoperatoren $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ in einer solchen Weise zu kombinieren, dass die Eigenfunktion $\Psi(j, m)$ des resultierenden totalen Drehimpulsoperators $\underline{I} \equiv \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ gebildet wird. Die Behandlung ist dieselbe, ob die Drehimpulse $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ von zwei unabhängigen Systemen, beispielsweise von zwei Teilchen, stammen oder entsprechend Spin und Drehimpuls eines einzelnen Teilchens sind. Der Transformationsfaktor $(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j m)$ stellt die unitäre Transformation dar, die aus der Vektoraddition der Eigendrehimpulse $j_1 + j_2 \rightarrow j$ und $m_1 + m_2 \rightarrow m$ folgt, und wird als "CLEBSCH-GORDAN"- oder "VEKTOR-ADDITIONSKOEFFIZIENT", manchmal auch als "WIGNER"-, "V-C"- oder "C-KOEFFIZIENT", bezeichnet. Es lässt sich zeigen, wie in Abschn. H. 3 (iv), dass die Addition der j vektoriell und die der m algebraisch ist.

Es gibt auch andere Schreibweisen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, z. B.:

Blatt-Weisskopf: $$C_{jj'}(J,M;\ m,m') \equiv C_{j_1 j_2}(j,m;\ m_1,m_2)\,, \qquad (H.11)$$

Condon u. Shortley: $$(j\,j'\,m\,m' \,|\, j\,j'\,J\,M) \equiv (j_1\,j_2\,m_1\,m_2 \,|\, j_1\,j_2\,j\,m)\,, \qquad (H.12)$$

Wigner ("Gruppentheorie"): $$S^{jj'}_{J\,m\,m'} \equiv S^{j_1 j_2}_{j\,m_1 m_2}\,, \qquad (H.13)$$

Rose: $$C\,(j_1\,j_2\,j\,;\ m_1\,m_2\,m)\,, \qquad (H.14)$$

bzw. $C\,(j_1\,j_2\,j\,;\ m_1\,,\ m-m_1)$ mit $m_2 \equiv m - m_1$,

Edmonds: $$(j_1\,j_2\,j\,m \,|\, j_1\,m_1\,j_2\,m_2)\,. \qquad (H.15)$$

Diese sind alle äquivalent; in dieser Abhandlung wird durchwegs die einfache Schreibweise

$$(j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j\,m) \qquad (H.16)$$

benützt werden.

Die Phasen der Wellenfunktionen werden gemäss Konvention so gewählt, dass sich reelle Clebsch-Gordan-Koeffizienten ergeben.

Eine einfache Herleitung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten wurde von Sharp gegeben: (Am. J. Phys. 1960, 28, 116).

H. 3 Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

(i) Der unitäre Charakter der Transformation verlangt, dass je 2 Reihen oder 2 Spalten der Transformationsmatrix orthogonal zueinander sind; daraus erhält man entsprechend die "UNITÄREN BEDINGUNGEN" ("UNITARY CONDITIONS"):

$$\sum_{m_1,m_2} (j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j\,m)(j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j'\,m') = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}\,, \qquad (H.17)$$

und

$$\sum_{j,m} (j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j\,m)(j_1\,m_1',\ j_2\,m_2' \,|\, j\,m) = \delta_{m_1 m_1'}\,\delta_{m_2 m_2'}\,. \qquad (H.18)$$

(ii) Ausserdem folgt aus dem unitären Charakter der Matrix U, dass

$$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^{+}\,. \qquad (H.19)$$

Daraus ergibt sich die "INVERSE TRANSFORMATION" zu

$$\psi(j_1,m_1)\cdot\psi(j_2,m_2) = \sum_{j,m} (j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j\,m)\ \Psi(j,m)\,. \qquad (H.20)$$

(iii) Ebenso wie die VEKTORADDITION

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I} \qquad (H.21)$$

durch den Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$(j_1\,m_1,\ j_2\,m_2 \,|\, j\,m) \qquad (H.22)$$

charakterisiert ist, so wird die VEKTORSUBTRAKTION

$$\underline{I} - \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \qquad (H.23)$$

durch

$$(j\, m,\ j_1\ -m_1 \mid j_2\ m_2) \qquad (H.24)$$

beschrieben.

(iv) Man beachte auch, dass die j und die m innerhalb des Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgendermassen untereinander in Beziehung stehen:

$$m_1 + m_2 = m \qquad \text{(d. h. algebraisch)}, \qquad (H.25)$$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \qquad \text{(vektoriell)}, \qquad (H.26)$$

wobei die zweite Beziehung als "DREIECK-BEZIEHUNG" ("TRIANGLE RELATION") bezeichnet wird (Fig. H. 2), in Analogie zu der Beziehung zwischen den drei Seiten eines Dreiecks, das aus den Vektoren $\vec{j}_1$, $\vec{j}_2$ und $\vec{j}$ gebildet wird.

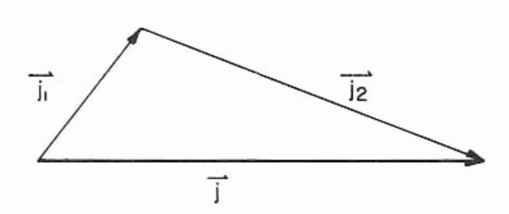


Fig. H.2

Man kann die Gültigkeit der Beziehungen (H. 25) und (H. 26) folgendermassen zeigen:

Wendet man den Operator $\underline{I}_z = \underline{I}_z^{(1)} + \underline{I}_z^{(2)}$ auf $\Psi(j, m)$ an, so folgt

$$m\,\Psi(j,m) = \sum_{m_1, m_2} (m_1 + m_2)(j_1\, m_1,\, j_2\, m_2 \mid j\, m)\, \psi(j_1, m_1) \cdot \psi(j_2, m_2), \qquad (H.27)$$

woraus

$$\sum_{m_1, m_2} (m - m_1 - m_2)(j_1\, m_1,\, j_2\, m_2 \mid j\, m)\, \psi(j_1, m_1) \cdot \psi(j_2, m_2) = 0 \qquad (H.28)$$

ist. Da $\psi(j_1, m_1)$ und $\psi(j_2, m_2)$ linear unabhängig sind, gilt

$$(j_1\, m_1,\, j_2\, m_2 \mid j\, m) = 0, \qquad \text{wenn nicht } m_1 + m_2 = m. \qquad (H.29)$$

Diese Einschränkungen für m haben zur Folge, dass der Clebsch-Gordan-Koeffizient verschwindet, wenn j nicht innerhalb des Bereiches der Dreieckbeziehung

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \qquad (H.30)$$

liegt.

(v) Clebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich mit Hilfe von Rekursionsformeln berechnen, wie sie von Edmonds, S. 38 u. 39 angegeben werden. Rose gibt auf S. 39 verschiedene, von Wigner und von Racah abgeleitete Ausdrücke an. Diese sind alle sehr kompliziert und werden hier nicht wiedergegeben. Die meisten der sich ergebenden Ausdrücke sind in Edmonds, App. 2, S. 122 (Vorsicht: seine Tabellen enthalten einige Druckfehler) in einer Schreibweise angegeben, die hier erläutert werden soll.

H. 4 3j-Symbol

Die Schreibweise wird in mancher Hinsicht durch die Einführung der Wignerschen 3j-SYMBOLE vereinfacht, die durch

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 j_3 + 1}} \cdot (j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j_3 \; -m_3) \qquad (H.31)$$

definiert sind, worin sich j_3 und j sowie m_3 und -m entsprechen, so dass die Beziehung für die totale Zustandsfunktion

$$\Psi(j, m) = \sqrt{2j+1} \cdot (-1)^{j_1 - j_2} \sum_{m_1, m_2} (-1)^m \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \cdot \psi(j_1, m_1) \cdot \psi(j_2, m_2) \quad (H.32)$$

lautet; natürlich ist $(-1)^{-m} = (-1)^m$.

Es sei beispielsweise die Zusammensetzung zweier Systeme betrachtet, deren jedes aus einem Fermion mit dem Spin ½ besteht. Dieser kann parallel oder antiparallel zum Vektor des Bahndrehimpulses ausgerichtet sein, d. h. für jedes System kann

$$j = \ell + \tfrac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad j = \ell - \tfrac{1}{2} \qquad (H.33)$$

gelten.

Es seien zwei Systeme mit $\ell = 0$ betrachtet, deren Zustandsfunktionen

$$\psi_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad \psi_1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \quad \text{für System 1,} \qquad (H.34)$$

$$\psi_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad \psi_2(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \quad \text{für System 2} \qquad (H.35)$$

lauten, und die sich so zusammensetzen, dass sich für das resultierende System ein Singulettzustand ergibt. Die totale Zustandsfunktion ist dann

$$\Psi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \psi_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \psi_2(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \psi_1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \psi_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}). \quad (H.36)$$

Die Werte der hier eingehenden 3j-Symbole lassen sich aus (H. 31) ableiten:

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2j+1}}, \qquad (H.37)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^0}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (H.38)$$

Für den Singulettzustand folgt also das wohlbekannte Resultat

$$\Psi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \psi_2(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - \psi_1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \psi_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \right]. \qquad (H.39)$$

Spin: $\Uparrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Uparrow$.

H. 4. 1 Werte der 3j-Symbole

Rekursionsformeln, aus denen sich der Wert jedes beliebigen 3j-Symbols bestimmen lässt, sind von Edmonds ("Angular Momentum in Quantum Mechanics", S. 48) angegeben, der im App. 2 eine Liste ihrer Werte anfügt.

Einige von den einfachen seien hier wiedergegeben mit der Notierung

$$J \equiv j_1 + j_2 + j_3 \; : \tag{H.40}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \, , \tag{H.41}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, \text{ wenn J ungerade ist,} & \text{(H.42)} \\ (-1)^{J/2} \sqrt{\frac{(J-2j_1)!\,(J-2j_2)!\,(J-2j_3)!}{(J+1)!}} \cdot \frac{\left(\frac{J}{2}\right)!}{\left(\frac{J}{2}-j_1\right)!\left(\frac{J}{2}-j_2\right)!\left(\frac{J}{2}-j_3\right)!} , & \text{(H.43)} \\ \text{wenn J gerade ist ,} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} J & J & 1 \\ M & -M & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \cdot \frac{M}{\sqrt{J(J+1)(2J+1)}} \, , \tag{H.44}$$

$$\begin{pmatrix} J & J & 1 \\ M & -M-1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{J(2J+1)(2J+2)}} \, . \tag{H.45}$$

H. 4. 2 Eigenschaften der 3j-Symbole

Damit sind auch zugleich einige Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten charakterisiert.

(i) Wie oben (H. 26) gilt die Dreiecksbeziehung $\Delta\,(j_1, j_2, j_3)$, nämlich

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \, . \tag{H.46}$$

(ii) Ebenso folgt direkt, dass

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \, . \tag{H.47}$$

(iii) Die Werte bleiben unverändert, d. h. der Phasenfaktor ist 1, wenn eine gerade Permutation der Reihen vorgenommen wird, z. B. :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} . \tag{H.48}$$

(iv) Eine ungerade Permutation liefert einen Phasenfaktor

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \equiv (-1)^J \, , \tag{H.49}$$

z. B.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^J \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} . \tag{H.50}$$

(v) Die Transformation aller m zu -m ergibt ebenfalls einen Phasenfaktor $(-1)^J$,

z. B. $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^J \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \qquad (H.51)$$

Es folgt also automatisch, dass eine gleichzeitige, ungerade Permutation und Umkehrung der Vorzeichen der m die Werte unverändert lässt, weil der Phasenfaktor

$$(-1)^{2J} = +1 \qquad (H.52)$$

ist, z. B. $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ -m_1 & -m_3 & -m_2 \end{pmatrix}. \qquad (H.53)$$

Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit der m nach (ii), lässt sich das Vorzeichen eines einzelnen m nicht nach Belieben, sondern nur gleichzeitig bei allen dreien umkehren.

H. 5 Kombinationskoeffizienten

Diese Form des Impulskalküls lässt sich erweitern, um drei oder mehr Drehimpulse zu koppeln, wobei es jetzt im Gegensatz zur Kopplung von zwei Drehimpulsen mehr als eine Möglichkeit gibt, die Drehimpulse paarweise zu kombinieren. Bei der Betrachtung der Beziehungen zwischen verschiedenen Kopplungsschemata kommen Kombinationskoeffizienten (RECOUPLING COEFFICIENTS) hinein.

H. 5. 1 Racah-Koeffizienten

Man betrachte die Kopplung dreier unabhängiger (kommutativer) Drehimpulse j_1, j_2, j_3 mit den zugehörigen Eigenfunktionen $\psi(j_1,m_1)$, $\psi(j_2,m_2)$ und $\psi(j_3,m_3)$, um die Eigenfunktion $\Psi(j,m)$ des resultierenden, totalen Drehimpulses

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 \qquad (H.54)$$

zu erhalten.

Um der mathematischen Einfachheit willen seien im folgenden die zugehörigen m durchwegs unterdrückt.

Eine Form des Kopplungsschemas ist diejenige, zuerst die Addition $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_{12}$ auszuführen und die Eigenfunktion für j_{12} zu bestimmen und dann $\vec{j}_{12} + \vec{j}_3 = \vec{j}$ zu koppeln, um die resultierende Eigenfunktion $\Psi(j)$ zu erhalten. Dabei hat man

$$\Psi(j)_{\text{Kopplung } 12,3} = (j_1 j_2 | j_{12})(j_{12} j_3 | j)\, \psi(j_1)\cdot\psi(j_2)\cdot\psi(j_3). \qquad (H.55)$$

Eine andere Möglichkeit ist, zuerst $\vec{j}_2 + \vec{j}_3 = \vec{j}_{23}$ zu koppeln und dann die Eigenfunktion von $\vec{j} = \vec{j}_{23} + \vec{j}_1$ zu bestimmen, nämlich

$$\Psi(j)_{\text{Kopplung } 23,1} = (j_2 j_3 | j_{23})(j_{23} j_1 | j)\, \psi(j_1)\cdot\psi(j_2)\cdot\psi(j_3). \qquad (H.56)$$

$\Psi(j)_{12,3}$ muss sich nun als eine lineare Kombination der $\Psi(j)_{23,1}$ ausdrücken lassen; die Koeffizienten W sind dabei unabhängig von m, da die m durch die Reihenfolge der Addition nicht beeinflusst werden.

Also ist

$$\Psi(j)_{12,3} = \sum_{j_{23}} \sqrt{2j_{12}+1}\,\sqrt{2j_{23}+1}\;.\;W(j_1\, j_2\, j\, j_3,\, j_{12}\, j_{23})\;\Psi(j)_{23,1}\;, \qquad (H.57)$$

oder nach Substitution mit (H. 55) und (H. 56),

$$(j_1 j_2|j_{12})(j_{12} j_3|j) = \sum_{j_{23}} \sqrt{2j_{12}+1}\,\sqrt{2j_{23}+1}\;(j_2 j_3|j_{23})(j_{23} j_1|j)\,.\,W(j_1\, j_2\, j\, j_3,\, j_{12}\, j_{23})\,. \qquad (H.58)$$

Dieses ist symbolisch von der Form

$$(a\, b\,|\, e)\,(e\, d\,|\, c) = \sum_{f} \sqrt{2e+1}\;.\;\sqrt{2f+1}\,(f\, a\,|\, c)\,(b\, d\,|\, f).\;W(a\, b\, c\, d,\, e\, f). \qquad (H.59)$$

Die Beziehung definiert den RACAH-KOEFFIZIENTEN W (a b c d, e f) in Ausdrücken der Clebsch-Gordan-Koeffizienten und legt die Phasen fest. Man beachte, dass W unabhängig von den magnetischen Quantenzahlen ist.

H. 5. 2 Eigenschaften der Racah-Koeffizienten

Mit der Definition von W lässt sich ein Vektordiagramm (Fig. H. 3) verknüpfen, welches das Kopplungsschema andeutet und die vier DREIECKSBEZIEHUNGEN zusammenfasst, die erfüllt sein müssen, damit W (a b c d, e f) nicht gleich null ist, beispielsweise

$$|(a-b)| \leq e \leq a+b \qquad \text{etc.} \qquad (H.60)$$

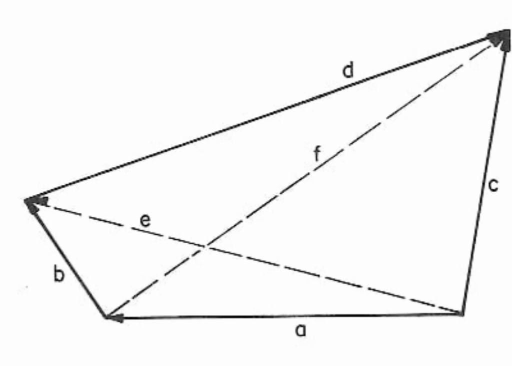


Fig. H.3

Die Symmetrie zwischen den zwei Diagonalen enthält die ORTHOGONALITÄTSEIGENSCHAFT:

$$\sum_{e} (2e+1)\,(2f+1)\;.\;W(a\, b\, c\, d,\, e\, f)\;.\;W(a\, b\, c\, d,\, e\, g) = \delta_{fg}\;. \qquad (H.61)$$

Eine Untersuchung der entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten zeigt, dass die Racah-Koeffizienten notwendigerweise die Symmetrien des Diagramms

$$W(a\, b\, c\, d,\, e\, f) = W(b\, a\, d\, c,\, e\, f) = W(c\, d\, a\, b,\, e\, f) \qquad (H.62)$$

$$= W(a\, c\, b\, d,\, f\, e) \qquad (H.63)$$

$$= (-1)^{e+f-a-d}\;.\;W(e\, b\, c\, f,\, a\, d) \qquad (H.64)$$

$$= (-1)^{e+f-b-c}\;.\;W(a\, e\, f\, d,\, b\, c) \qquad (H.65)$$

erfüllen.

H. 5. 3 6j-Symbole

Analog zu dem Übergang von der Schreibweise der Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu den 3j-Symbolen lässt sich ein Wigner-6j-SYMBOL einführen, welches folgendermassen definiert ist:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+\ell_1+\ell_2} \cdot W(j_1 j_2 \ell_2 \ell_1, j_3 \ell_3) \qquad (H.66)$$

$$= \sum_{c,\lambda} (-1)^{j_1+j_2+j_3+\ell_1+\ell_2+\ell_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -c_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & j_2 & \ell_3 \\ -\lambda_1 & -c_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & j_3 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -c_3 \end{pmatrix}. \qquad (H.67)$$

Dieses 6j-Symbol hat eine grössere Symmetrie als die W: Die Vertauschung eines vertikalen Paares lässt das 6j-Symbol unverändert, z. B.,

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ \ell_2 & \ell_1 & \ell_3 \end{Bmatrix} ; \qquad (H.68)$$

die vertikale Vertauschung eines horizontalen Paares ebenso, z. B.

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} . \qquad (H.69)$$

Die Dreiecksbeziehung ist innerhalb der oberen drei, aber nicht innerhalb der unteren drei Werte des 6j-Symbols erfüllt.

Wenn einer der Ausdrücke in einem solchen Triplett null ist, dann fallen die beiden Endterme weg, z. B.,

$$\begin{Bmatrix} j & j & 0 \\ \ell & \ell & \ell_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{j+\ell+\ell_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2j+1)(2\ell+1)}} . \qquad (H.70)$$

Ausgedrückt als Racah-Koeffizient:

$$W(a\,b\,c\,d,\ e\,0) = (-1)^{b+c-e} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}} \cdot \delta_{ac}\,\delta_{bd} . \qquad (H.71)$$

Explizite, allgemeine Formeln für Racah-Koeffizienten sind angegeben worden von Racah (PR 1942, 62, 438) und Sharp (AECL Report No. 465, 1958).

Ein anderer, bei Winkelverteilungs-Probleme benützter Koeffizient dieser Art ist von Biedenharn, Blatt u. Rose (RMP 1952, 24, 249) als Z-KOEFFIZIENT definiert:

$$Z(a\,b\,c\,d,\ e\,f) = (i)^{f-a+c} \sqrt{(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)} \cdot (a\,0, c\,0 \mid f\,0) \cdot W(a\,b\,c\,d,\ e\,f). \qquad (H.72)$$

H. 5. 4 X-Koeffizienten

Diese entstehen bei der Kopplung von vier Drehimpulsen j_1, j_2, j_3 und j_4; es lassen sich zunächst $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_{12}$ und $\vec{j}_3 + \vec{j}_4 = \vec{j}_{34}$ und dann $\vec{j}_{12} + \vec{j}_{34} = \vec{j}$ koppeln. Andererseits kann man auch zuerst $\vec{j}_1 + \vec{j}_3 = \vec{j}_{13}$ und $\vec{j}_2 + \vec{j}_4 = \vec{j}_{24}$ und dann $\vec{j}_{13} + \vec{j}_{24} = \vec{j}$ koppeln. Die Eigenfunktionen der beiden Kopplungsschemata müssen dann gegenseitig durch eine unitäre Transformation verknüpft sein. Dies lässt sich definieren durch

$$(j_1 j_2 | j_{12})(j_3 j_4 | j_{34})(j_{12} j_{34} | j) = \sum_{j_{13}, j_{24}} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)} \times$$

$$\times (j_1 j_3 | j_{13})(j_2 j_4 | j_{24})(j_{13} j_{24} | j) \cdot X \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{pmatrix}, \qquad (H.73)$$

worin der X-Koeffizient reell und unabhängig von magnetischen Quantenzahlen ist. Die Vektordiagramme, die die sechs in den Definitionen enthaltenen Dreiecksbeziehungen verdeutlichen, sind in Fig. H.4 gezeigt, wobei die strichpunktierten Linien das eine Kopplungsschema und die gestrichelten Linien das andere darstellen.

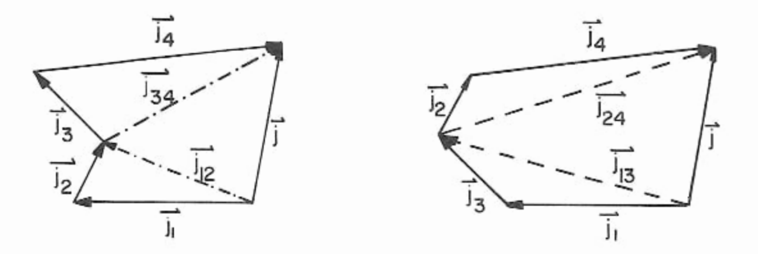


Fig. H.4

H. 5. 5 9j-Symbole

Es lässt sich ein 9j-Symbol definieren, das einem bestimmten X-Koeffizienten entspricht. Man kann es durch 3j-Symbole ausdrücken, wie z. B.:

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} = \sum_{\text{alle } m} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{31} & j_{32} & j_{33} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}. \qquad (H.74)$$

Vertauschung von Zeilen oder Spalten eines 9j-Symbols ergibt einen Phasenfaktor 1 für eine gerade Permutation und einen Phasenfaktor $(-1)^{j_{11} + j_{12} + j_{13} + j_{21} + \ldots + j_{31} + j_{32} + j_{33}}$ für eine ungerade Permutation.

Wenn einer der Terme in einem 9j-Symbol null ist, dann reduziert es sich auf ein 6j-Symbol, z. B.,

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & e \\ f & f & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{b+c+e+f} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}} \cdot \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}. \qquad (H.75)$$

H. 5. 6 Koeffizienten höherer Ordnung

Alle Kombinationskoeffizienten für die Vektoraddition von drei Drehimpulsen lassen sich durch W-Koeffizienten oder 6j-Symbole ausdrücken, und diejenige für vier Drehimpulse durch X-Koeffizienten oder 9j-Symbole. Bei der Kopplung von mehr als vier Drehimpulsen entstehen jedoch Komplikationen; beispielsweise für fünf Drehimpulse sind zwei ganz verschiedene 12j-Symbole im Zusammenhang mit der Theorie der "fractional-parentage"-Koeffizienten untersucht worden.

Eine formale Theorie für die Kombination von n Drehimpulsen, die durch Koeffizienten mit 3(n - 1) Parametern charakterisiert werden, ist von Racah und ebenso von Sharp entwickelt worden. Für die meisten Rechnungen reichen jedoch Racah- und X-Koeffizienten aus.

SACHREGISTER

P. MARMIER · KERNPHYSIK II